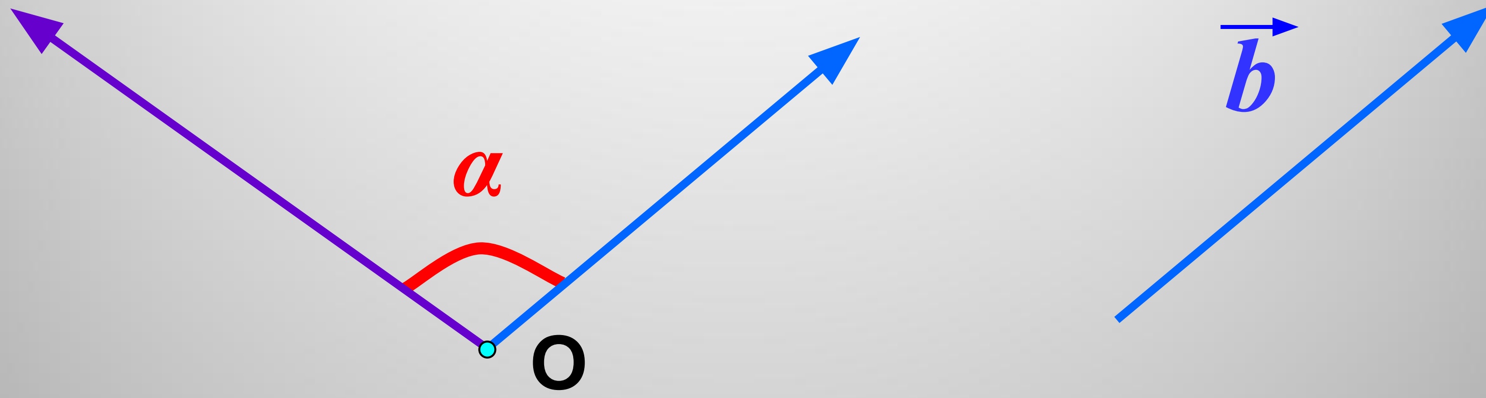
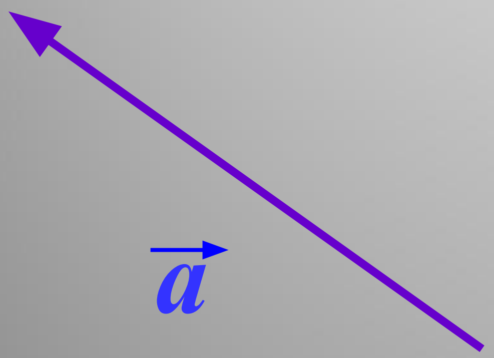
# Задание на 3 неделю по геометрии

1. Законспектируйте материал в тетрадь
2. Выполните в тетрадях №1 -8
3. Работы прислать к 18.00 23 апреля

# Скалярное произведение векторов

# Угол между векторами

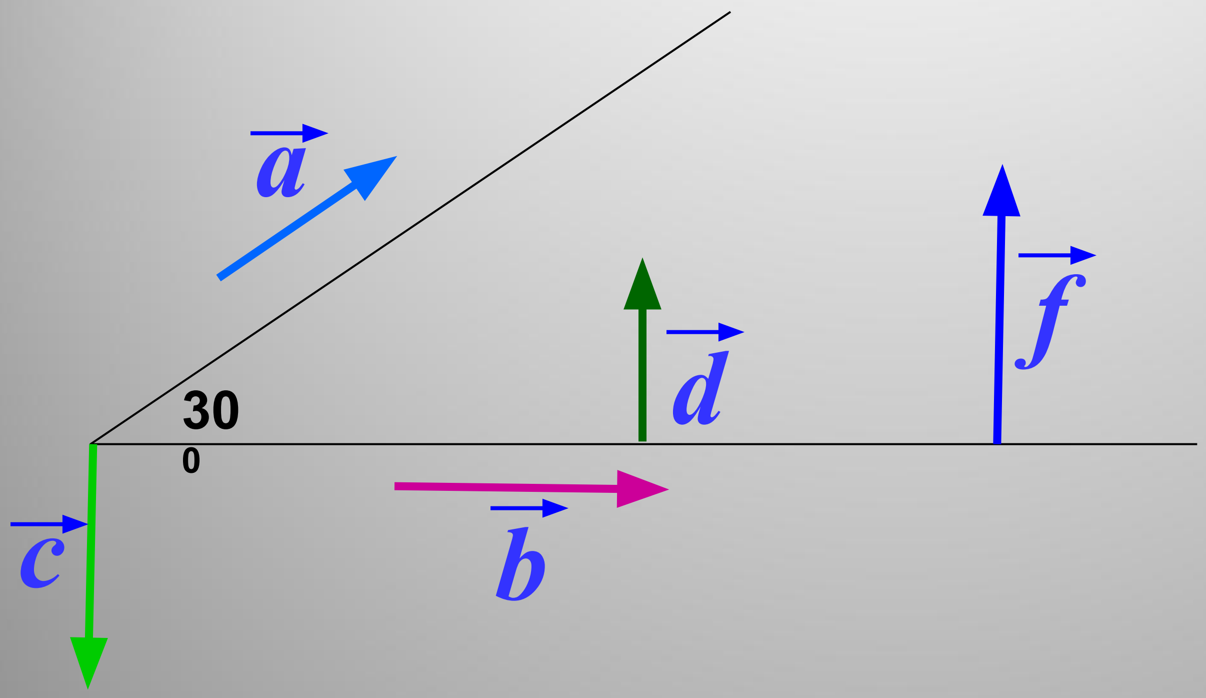



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\alpha$ .

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

# Найдите угол между векторами




$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$

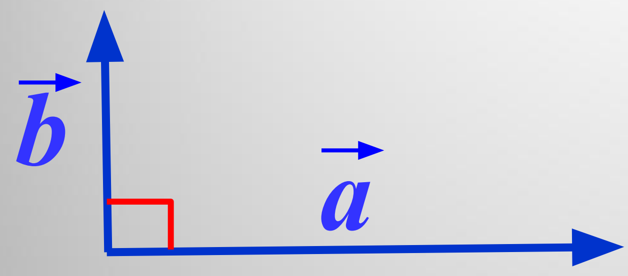
## Определение

<u>**Скалярным произведением**</u> **двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

**Скалярное произведение векторов – число (скаляр).**

## Частный случай №1



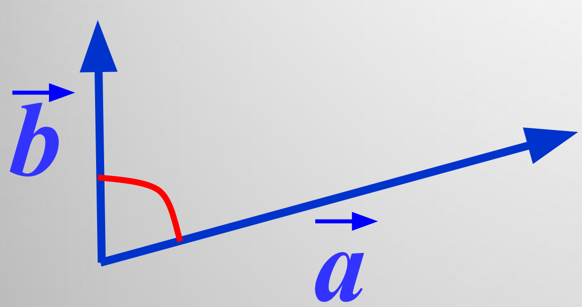

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

## Частный случай №2




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

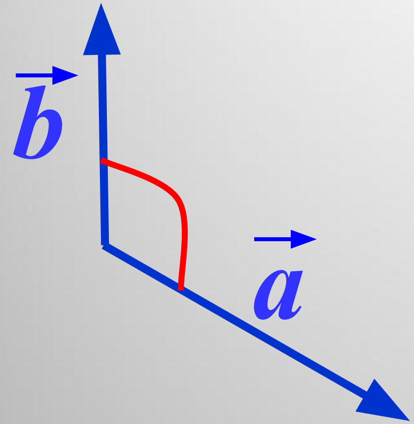
$$> 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

# Частный случай №3




$$\widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$$

$< 0$

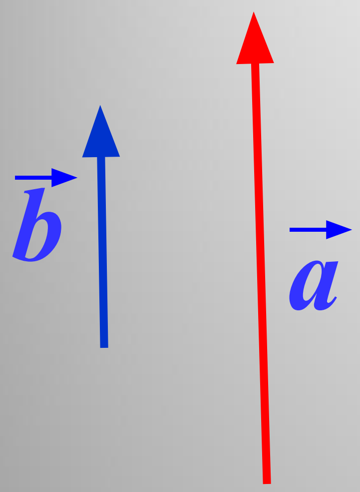
$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos \alpha$$

$< 0$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec a \cdot \vec b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$$

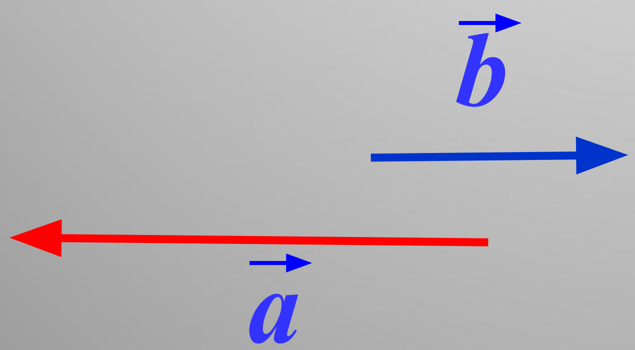
# Частный случай №4




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



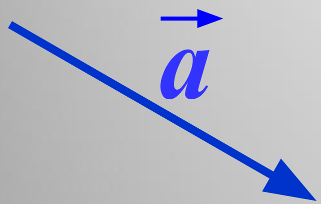

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

# Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$




$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,

**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

# Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

## Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6; 9; 5\}$ $\vec{b}\ \{-1; 0; 7\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot 0 + 5\cdot 7 = 41$$

## Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 22 + 0\cdot 1 + 4\cdot 8 = 32$$

## Пример №3

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{1;\ 7;\ 9\}$ $\vec{b}\ \{-2;\ 4;\ 0\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

# Скалярное произведение векторов

Через длины векторов и угол между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

в координатах

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\,\{3;\ -4;\ 2\},\ \vec{b}\,\{-2;\ 1;\ 3\},\ \vec{c}\,\{-2; -1{,}5;\ 0\}$$

Найдите

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 + 2\cdot 3 = -4$$ тупой

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-1{,}5) + 3\cdot 0 = 2{,}5$$ острый

$$\vec{c}\cdot\vec{a} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot(-1{,}5) + 2\cdot 0 = 0$$ прямой

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа $k$ справедливы равенства:

1 $\vec{a}^{\,2} \geq 0$ причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *Переместительный закон*

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *Распределительный закон*

4 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *Сочетательный закон*

## Решите в тетрадях

1. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{1;\ 10;\ 7\}$ $\vec{b}\ \{0;\ 7;\ 0\}$

2. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{7;\ 25;\ 0\}$ $\vec{b}\,\{11;\ 0;\ 54\}$

3. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-1;\ 2;\ 8\}$ $\vec{b}\ \{5;\ 5;\ 0\}$

4. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если:

$$\left|\vec{a}\right| = 6,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ \angle\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 135°.$$

5. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если:

$$\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ \angle\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 120°.$$

6. При каком значении *n* векторы $\vec{a}\{2n; -3; -6\}$ и $\vec{b}\{3; -n; -3\}$ будут перпендикулярными?

**7.** Найдите угол между векторами $\vec{a}\{5; -2; 7\}$ и $\vec{b}\{7; 5; 2\}$.

8. Найдите угол между векторами $\vec{a}\{2; 1; 1\}$ и $\vec{b}\{-1; -1; 0\}$.