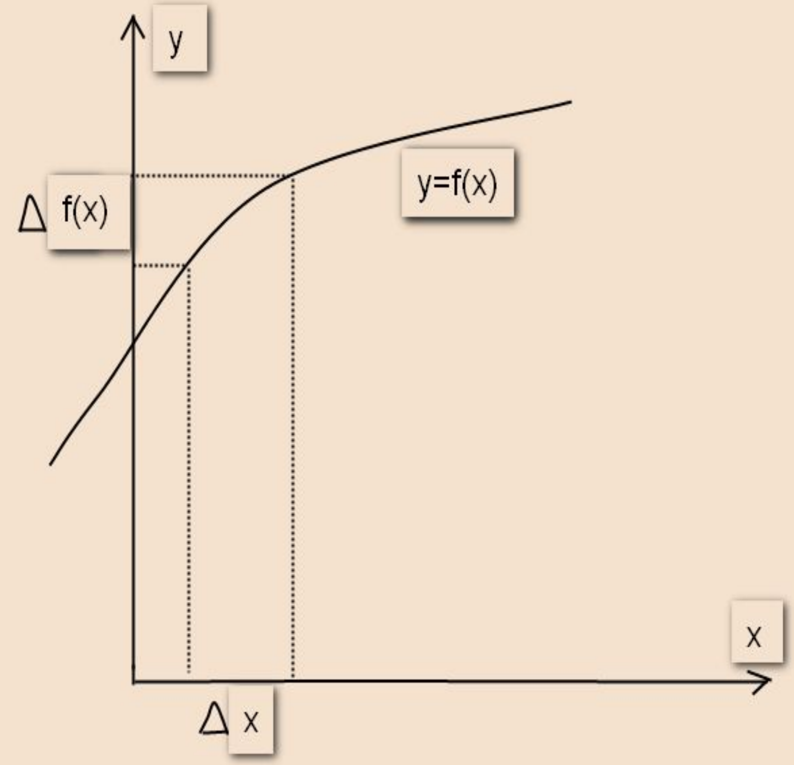
Первообразная

Определение производной функции?

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента , стремиться к нулю.

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Устная работа

$(x-1)^{/} =$ 1

$(12\text{-}x^4)^{/} =$ $-4x^3$

$(\sin x - 5)^{/} =$ cosx

$(6x - 4x^3)^{/} =$ $6-12x^2$

$(\cos x + 12x)^{/} =$ sinx+12

$(7x + \sqrt{x})^{/} =$ $7+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Устная работа

$$(\; x^3 \;)' = 3x^2$$

$$(\; C \;)' = 0$$

$$(\; \cos x \;)' = \sin x$$

$$(\; 4x \;)' = 4$$

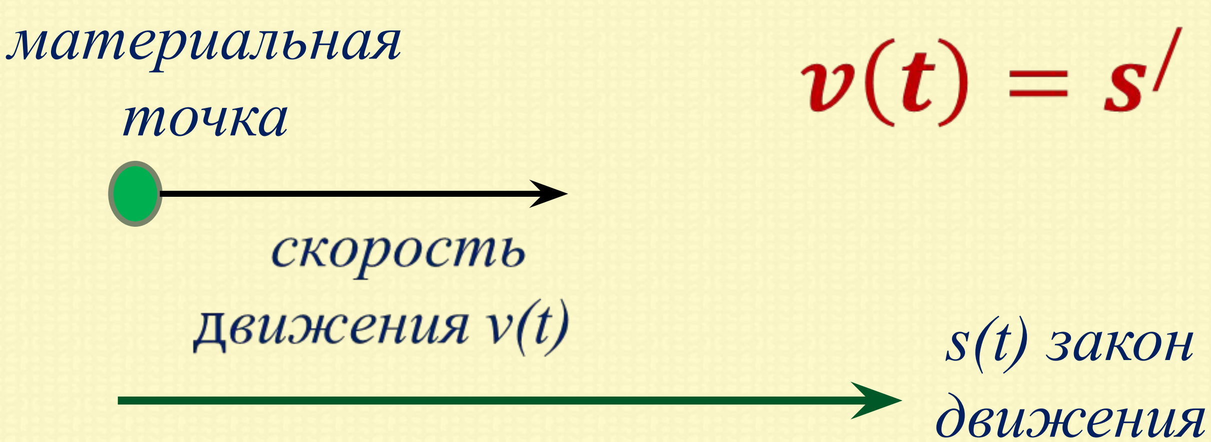
$$(x^2 + 6x)' = 2x+6$$

Используя определение производной функции, решают ряд задач в алгебре, физике, химии.

Рассмотрим физический смысл производной.

Если материальная точка движется прямолинейно и её координата изменяется по закону $s(t)$, то скорость её движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $s^{/}(t)$:

$$\boldsymbol{v(t) = s^{/}(t)}$$



Задача: Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 2t$ (где $s(t)$ – измеряется в м). Найдите скорость точки в момент времени $t=2$с.

Решение:

$$\mathbf{v(t) = s^{/}(t).}$$

$$v(t) = 3t^2 + 2$$

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \text{ м/с}$$

Ответ: 14 м/с.

Что мы сделали за часть урока?

- Повторили определение производной функции и формулы дифференцирования.

- Решили задачу на применение производной: зная закон движения,   нашли скорость при заданном времени.

В математике часто приходиться решать обратную задачу:
зная скорость найти закон движения.

Задача: По прямой движется материальная точка, скорость которой в момент времени t задается формулой $v(t) = 3t^2$. Найдите закон движения.

Решение: Пусть s(t) – закон движения

так как $v(t) = s'(t)$

$s'(t) = 3t^2$, $s(t) = t^3$.

надо найти функцию, производная которой равна $3t^2$.

Эта задача решена верно, но не полно.

Эта задача имеет бесконечное множество решений.

$s(t)=t^3$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+2$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+5$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+\frac{1}{2}$ $\quad s'(t) = 3t^2$

можно сделать вывод, что любая функция вида **$s(t)=t^3+C$** является решением данной задачи, где C любое число.

При решении задачи, мы, зная производную функции, восстановили ее первичный образ.

Эта операция восстановления - операция интегрирования.

Востановленная функция – первообразная (первичный образ функции)

Операция дифферен-цирования	$\downarrow$	функция $y = F(x)$ (первообразная) $y = f(x)$ производная	$\uparrow$	Операция интегри-рования

Определение первообразной

$y = F(x)$ называют первообразной для $y = f(x)$ на промежутке X, если при $x \in X$

$$F'(x) = f(x)$$

Операция дифферен-цирования ↓

функция $y = F(x)$
(первообразная)
$y = f(x)$
производная

↑ Операция интегри-рования

В математике много операций которые являются обратными

$3^2 = 9$? $\sqrt{9} = 3$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$? $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Сегодня мы познакомились с новой операцией
интегрирование ? дифференцирование

Запомните: Первообразная – это родитель производной: $F^{/}(x)=f(x)$

Задача: Докажите, что функция y = F(x) является первообразной для функции y = f(x), если:

а) $F(x)= x^2+x^3$, $f(x)= 2x+3x^2$

б) $F(x)= x^4 - x^{11}$, $f(x)= 4x^3 - 11x^{10}$

в) $F(x)=-4cosx$, $f(x)= 4sinx$

г) $F(x)=-9sinx$, $f(x)=-9cosx$

f(x)	F(x)
1	

Задача:

Найдите все первообразные для функций:

$$f(x)=3$$

$$f(x)=x^2$$

$$f(x)=\cos x$$

$$f(x)=12$$

$$f(x)=x^5$$

Три правила нахождения первообразных

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке
первообразные соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
Первообразная суммы равна сумме первообразных	
$y = k\,f(x)$	$y = k\,F(x)$
Постоянный множитель можно выносить за знак первообразной	

Найти первообразные для функции

$$f(x) = 5x^3 + e^{2x+7} - 4\cos x$$

f(x)	F(x)

Решение:
Используя правила нахождения первообразных и таблицу получим

$$F(x) = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} e^{2x+7} - 4\sin x + C$$

Задача.

Для функции y=f(x) найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 4x^2 + 6x^2$

г) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

б) $f(x) = -\sin x + 2\cos x$

д) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

в) $f(x) = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$

г) $f(x) = (4 - 5x)^4$

Для функции y=f(x) найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

б) $f(x) = 3\cos x - \sin x$

в) $f(x) = \cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$

г) $f(x) = \frac{1}{x} - 2e^x$

д) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

г) $f(x) = (3x - 12)^4$