ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы — математические модели. *Предметом теории вероятностей* являются математические модели случайных явлений. При этом под *случайным явлением* понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). *Примеры случайных явлений*: выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п.

Цель теории вероятностей — осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

2. Случайные события, их классификация

Сначала определим понятие «случайное событие» исходя из его интуитивного, наглядного понимания. Пусть проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты в теории вероятностей называют *случайными*. При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять, хотя бы теоретически, при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, $\ldots$.

Пример 1.1. Опыт: бросание игральной кости; событие A — выпадение 5 очков, событие B — выпадение четного числа очков, событие C — выпадение 7 очков, событие D — выпадение целого числа очков, событие E — выпадение не менее 3-х очков, $\ldots$.

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями* и обозначаются через w. Элементарные события (их называют также «элементами», «точками», «случаями») рассматриваются как неразложимые и взаимоисключающие исходы w_1, w_2, w_3 ... этого опыта.

Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий или пространством исходов*, обозначается через Ω.

Рассмотрим пример 1.1. Здесь 6 элементарных событий w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6. Событие w_i означает, что в результате бросания кости выпало i очков, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пространство элементарных событий таково: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ или $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта, обозначается через Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта, обозначается через $\varnothing$.

В примере 1.1 события A и B — случайные, событие C — невозможное, событие D — достоверное.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте, т. е. не смогут произойти вместе в одном опыте. В противном случае события называются *совместными*.

Так, в примере 1.1 события A и B — несовместные, A и E — совместные.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

В примере 1.1 события w_1–w_6 образуют полную группу, w_1–w_5 — нет.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. все события имеют равные «шансы».

В примере 1.1 элементарные события w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 равновозможны. Выпадение герба (A) или решки (B) при бросании монеты — равновозможные события, если, конечно, монета имеет симметричную форму, не погнута, ...

3. Действия над событиями

Введем основные операции над событиями; они полностью соответствуют основным операциям над множествами.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т. е. или A, или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т. е. и A и B одновременно).

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т. е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Событие A *влечет событие* B (или A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A, следует, что происходит событие B; записывают $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то события A и B называются *равными*; записывают $A = B$.

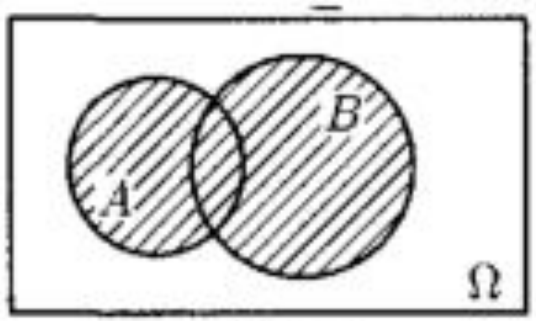
Так, в примере 1.1 (п. 1.2) $B = \{2, 4, 6\}$, $E = \{3, 4, 5, 6\}$, $A = \{5\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда: $B + E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cdot E = \{4, 6\}$, $B - E = \{2\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B \subseteq D$, $D = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера–Венна*: достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события — точками прямоугольника; случайное событие — областью внутри него.

Действия над событиями можно изобразить так, как показано на рис. 1–5.

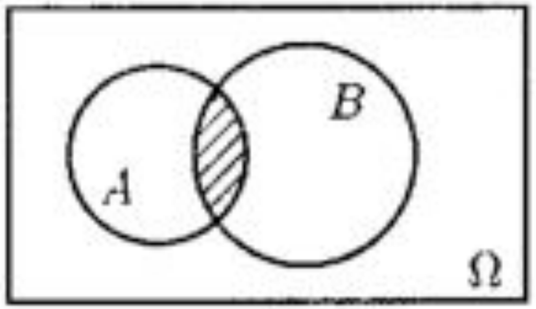
Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ (распределительное);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
- $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A - B = A \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ и $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ — законы де Моргана



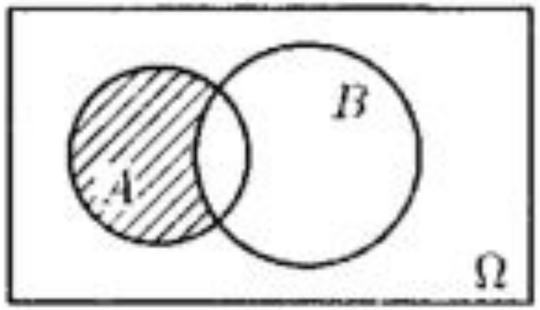
$A + B$

Рис. 1



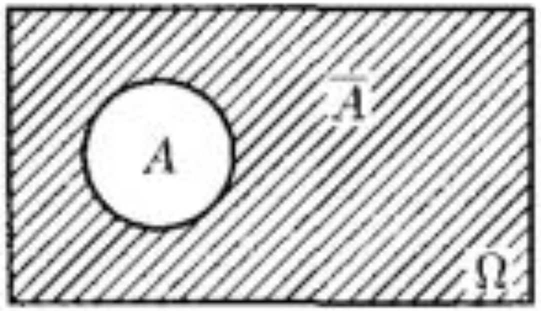
$A \cdot B$

Рис. 2



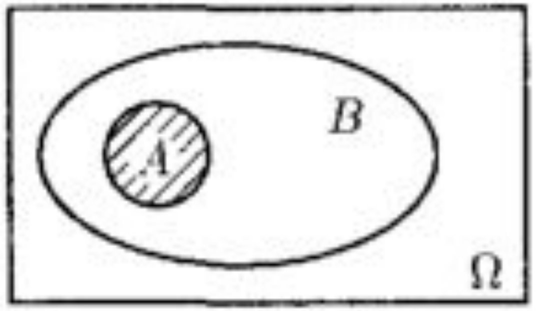
$A - B$

Рис. 3



$\overline{A}$

Рис. 4



$A \subseteq B$

Рис. 5

4. Случайные события. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка)

Определим теперь основные понятия теории вероятностей, следуя теоретико-множественному подходу, разработанному академиком Колмогоровым А. Н. в 1933 году.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом.

Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий* (коротко: ПЭС), а сами исходы ω — *элементарными событиями* (или «элементами», «точками»).

Случайным событием A (или просто *событием* A) называется любое подмножество множества Ω, если Ω конечно или счетно (т. е. элементы этого множества можно пронумеровать с помощью множества натуральных чисел): $A \subseteq \Omega$.

Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими событию* A.

Множество Ω называется *достоверным* событием. Ему благоприятствует любое элементарное событие; в результате опыта оно обязательно произойдет.

Пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием; в результате опыта оно произойти не может.

Пример.3. Опыт: один раз бросают игральную кость. В этом случае ПЭС таково: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ или $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_6\}$, где w_i — элементарное событие, состоящее в выпадении грани с i очками ($i = \overline{1, 6}$). В данном случае Ω конечно. Примером события A является, например, выпадение нечетного числа очков; очевидно, что $A = \{w_1, w_3, w_5\}$; событию A благоприятствуют элементарные события w_1, w_3, w_5. Однако если нас интересует только факт выпадения четного числа очков, то ПЭС можно построить иначе: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 — выпадение четного числа очков, ω_2 — нечетного.

Пример.4. Опыт: стрельба по цели до первого попадания. Тогда $\Omega = \left\{\underset{w_1}{\underline{\text{П}}}, \underset{w_2}{\underline{\text{НП}}}, \underset{w_3}{\underline{\text{ННП}}}, \underset{w_4}{\underline{\text{НННП}}} \dots\right\}$, где П означает попадание в цель, Н — непопадание. Исходов у этого опыта бесконечно (теоретически); Ω счетно.

Пример.5. Опыт: наблюдение за временем безотказной работы некоторого агрегата. В этом случае в качестве результата может появиться любое число $t \geqslant 0$; время t меняется непрерывно; ПЭС таково: $\Omega = \{t, 0 \leqslant t < \infty\}$. Исходов у этого опыта бесконечно, Ω несчетно (континуально).

Над событиями можно проводить все операции, выполнимые для множеств.

Сумма (или объединение) двух событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается $A + B$ или $A \cup B$) — это множество, которое содержит элементы, принадлежащие

Произведени … ется AB или $A \cap B$) — это мн … щие для событий A и B.

Разность с … $-B$ или $A \backslash B$) — это множество, … A, не принадлежащие событи

Противопо … $\backslash A$. ($\overline{A}$ называют также *дополнен*

Событие A влечет событие B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент события A содержится в B.

По определению: $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

События A и B называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу* несовместных событий, если их сумма представляет все ПЭС, а сами события несовместны, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Полную группу образуют, например, события A и $\overline{A}$ $(A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing)$.

В случае несчетного пространства Ω в качестве событий рассматриваются не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Класс S подмножеств пространства Ω называется *алгеброй множеств (событий)*, если:

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in S$;
2. из $A \in S$ вытекает, что $\overline{A} \in S$;
3. из $A \in S$, $B \in S$ вытекает, что $A + B \in S$, $A \cdot B \in S$.

Заметим, что в условии 3 достаточно требовать либо $A + B \in S$, либо $AB \in S$, так как $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

Событие A *влечет событие* B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент события A содержится в B.

По определению: $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

События A и B называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу* несовместных событий, если их сумма представляет все ПЭС, а сами события несовместны, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Полную группу образуют, например, события A и $\overline{A}$ ($A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$).

В случае несчетного пространства Ω в качестве событий рассматриваются не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Класс S подмножеств пространства Ω называется *алгеброй множеств (событий)*, если:

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in S$;

2. из $A \in S$ вытекает, что $\overline{A} \in S$;

3. из $A \in S$, $B \in S$ вытекает, что $A + B \in S$, $A \cdot B \in S$.

Заметим, что в условии 3 достаточно требовать либо $A + B \in S$, либо $AB \in S$, так как $A + B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

Алгебру событий образует, например, система подмножеств $S = \{\varnothing, \Omega\}$. Действительно, в результате применения любой из вышеприведенных операций к любым двум элементам класса S снова получается элемент данного класса: $\varnothing + \Omega = \Omega$, $\varnothing \cdot \Omega = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$.

При расширении операций сложения и умножения на случай счетного множества алгебра множеств S называется σ-алгеброй, если из $A_n \in S$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ (достаточно требовать либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, либо $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$).

Множество всех подмножеств множества Ω, если оно конечно или счетно, образует алгебру.

5. Свойство статистической устойчивости относительной частоты события

Пусть в n повторяющихся опытах некоторое событие A *наступило* n_A *раз.*

Число n_A называется *частотой* события A, а отношение

$$\frac{n_A}{n} = P^*(A) \tag{1.1}$$

называется *относительной частотой* (или *частостью*) события A в рассматриваемой серии опытов.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

1. Частость любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1.$$

2. Частость невозможного события равна нулю, т. е.

$$P^*(\varnothing) = 0.$$

3. Частость достоверного события равна 1, т. е.

$$P^*(\Omega) = 1.$$

4. Частость суммы двух несовместных событий равна сумме частоты этих событий, т. е. если $AB = \varnothing$, то

$$P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B).$$

❑ Свойства очевидны, так как $0 \leqslant n_A \leqslant n$ для любого события A; для невозможного события $n_A = 0$; для достоверного события $n_A = n$; если события A и B несовместны ($AB = \varnothing$), то $n_{A+B} = n_A + n_B$, следовательно, $P^*(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P^*(A) + P^*(B)$. ■

Частость обладает еще одним фундаментальным свойством, называемым *свойством статистической устойчивости*: с увеличением числа опытов (т. е. n) она принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу (говорят: частость стабилизируется, приближаясь к некоторому числу, частость колеблется около некоторого числа, или ее значения группируются около некоторого числа).

Так, например, в опыте — бросание монеты (однородной, симметричной, ...) — относительная частота появления герба при 4040 бросаниях (Ж. Бюффон) оказалась равной $0{,}5069 = \frac{2048}{4040}$, а в опыте с 12000 и 24000 бросаниями (К. Пирсон) она оказалась равной соответственно $0{,}5015 = \dfrac{6018}{12\,000}$ и $0{,}5005 = \dfrac{12012}{24000}$, т. е. частность приближается к числу $\dfrac{1}{2} = 0{,}500\ldots$. А частость рождения мальчика, как показывают наблюдения, колеблется около числа $0{,}515$.

Отметим, что теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления с неопределенным исходом, для которых предполагается наличие устойчивости относительной частоты.

6. Статистическое определение вероятности

Для математического изучения случайного события необходимо ввести какую-либо количественную оценку события. Понятно, что одни события имеют больше шансов («более вероятны») наступить, чем другие. Такой оценкой является *вероятность события*, т. е. число, выражающее степень возможности его появления в рассматриваемом опыте. Математических определений вероятности существует несколько, все они дополняют и обобщают друг друга.

Рассмотрим опыт, который можно повторять любое число раз (говорят: «проводятся повторные испытания»), в котором наблюдается некоторое событие A.

Статистической вероятностью события A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний (опытов).

Вероятность события A обозначается символом $P(A)$. Согласно данному определению

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{n_A}{n}. \qquad (1.2)$$

Математическим обоснованием близости относительной частоты $P^*(A)$ и вероятности $P(A)$ некоторого события A служит теорема Я. Бернулли (см. п. 5.3).

Вероятности $P(A)$ приписываются свойства 1-4 относительной частоты:

1. Статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Статистическая вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Статистическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

4. Статистическая вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Статистический способ определения вероятности, опирающийся на реальный опыт, достаточно полно выявляет содержание этого понятия. Некоторые ученые (Р. Мизес и другие) считают, что эмпирическое определение вероятности (т. е. $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$) следует считать основным определением вероятности.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так в примере с бросанием монеты (п. 1.5) в качестве вероятности можно принять не только число 0,5, но и 0,49 или 0,51 и т. д. Для надежного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний (опытов), что не всегда просто (или дешево).

7. Классическое определение вероятности

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечного числа исходов опыта. Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных* событий. Такие исходы называются *случаями, шансами, элементарными событиями*, опыт — *классическим*. Про такой опыт говорят, что он сводится к *схеме случаев* или *схеме урн* (ибо вероятностную задачу для такого опыта можно заменить эквивалентной ей задачей с урнами, содержащими шары разных цветов).

Случай ω, который приводит к наступлению события A, называется *благоприятным* (или — *благоприятствующим*) ему, т. е. случай w влечет событие A: $w \subseteq A$.

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

Наряду с обозначением $P(A)$ для вероятности события A используется обозначение p, т. е. $p = P(A)$.

Из классического определения вероятности (1.3) вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Они проверяются так же, как и для относительной частоты (п. 1.5). В настоящее время свойства вероятности определяются в виде аксиом

Пример 1 В урне (емкости) находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

❍ Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n = 12 + 8 = 20$ — число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 12, т. е. $m = 12$. Следовательно, по формуле (1.3) имеем: $P(A) = \frac{12}{20}$, т. е. $P(A) = 0,6$.

8. Элементы комбинаторики

Согласно классическому определению подсчет вероятности события A сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными методами.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «сколькими способами?».

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно *правилами умножения и сложения*.

Правило умножения (основной принцип): если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Пример.7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

❍ Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 2, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т. е. искомое число трехзначных чисел есть 60. (Вот некоторые из этих чисел: 243, 541, 514, 132, ...) Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. (Вот некоторые из них: 255, 333, 414, 111, ...)

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Пример . В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

❍ По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей — $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

Решение вероятностных (и не только их) задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте (эксперименте), состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Существуют две схемы выбора m элементов ($0 < m \leqslant n$) из исходного множества: *без возвращения* (без повторений) и *с возвращением* (с повторением). В первом случае выбранные элементы не возвращаются обратно; можно отобрать сразу все m элементов или последовательно отбирать их по одному. Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по m элементов $(0 < m \leqslant n)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Из определения вытекает, что размещения — это выборки (комбинации), состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m («А из эн по эм») и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) \qquad (1.4)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad \text{где} \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1. \qquad (1.5)$$

❑ Для составления размещения A_n^m надо выбрать m элементов и
множества с n элементами и упорядочить их, т. е. заполнить m ме
элементами множества. Первый элемент можно выбрать n способам
т. е. на первое место можно поместить любой из n элементов. Посл
этого второй элемент можно выбрать из оставшихся $n-1$ элемент
$n-1$ способами. Для выбора третьего элемента имеется $n-2$ способ
четвертого — $n-3$ способа, и, наконец, для последнего m-го элеме
та — $(n-(m-1))$ способов. Таким образом, по правилу умножени
существует $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))$ способов выбора m элемент
из данных n элементов, т. е. $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Пример 1.9. Составить различные размещения по 2 из элементов мн
жества $D=\{a,b,c\}$; подсчитать их число.

❍ Из трех элементов можно образовать следующие размещения и
два элемента: (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b). Согласно форм
ле (1.4) их число: $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n эл ментов по n элементов.

Из определения вытекает, что перестановки — это выборки (ко бинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от дру только порядком следования элементов. Число перестановок из n эл ментов обозначается символом P_n («пэ из эн») и вычисляется по фо муле

$$P_n = n!. \tag{1.}$$

Формула (1.6) следует из определения перестановки:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Пример 1.10. Составить различные перестановки из элементов мн жества $E = \{2, 7, 8\}$; подсчитать их число.

◐ Из элементов данного множества можно составить следующие п рестановки: $(2,7,8)$; $(2,8,7)$; $(7,2,8)$; $(7,8,2)$; $(8,2,7)$; $(8,7,2)$. По фо муле (1.6) имеем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 1.11. Скольками способами можно расставить на полке

❍ Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т. е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. ●

Сочетанием из n элементов по m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества.

Из определения вытекает, что сочетания — это выборки (комбинации), каждая из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т. е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m («цэ из эн по эм») и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \tag{1.7}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.8}$$

❑ Число A_n^m размещений из n элементов по m элементов можно найти следующим образом: выбрать m элементов из множества, содержащего n элементов (это можно сделать C_n^m способами); затем в каждом из полученных сочетаний (подмножеств) сделать все перестановки для упорядочения подмножеств (это можно сделать P_m способами). Следовательно, согласно правилу умножения, можно записать: $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Отсюда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$ или $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ■

Можно показать, что имеют место формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \leqslant n), \tag{1.9}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{1.10}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}, \quad (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{1.11}$$

Формулу (1.9) удобно использовать при вычислении сочетаний, когда $m > \frac{n}{2}$. Так, $C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$. Формула (1.10) выражает число всех подмножеств множества из n элементов (оно равно 2^n). Числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, …, C_n^n являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n a^0 b^n$.

Пример.12. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

❍ Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: (a, b); (a, c); (b, c). Их число: $C_3^2 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ (формула (1.7)).

Пример.13. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики? А если выбрать 1 красную гвоздику и 2 розовых?

❍ Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 14 гвоздик, можно C_{14}^3 способами. По формуле (1.7) находим: $C_{14}^3 = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 13 \cdot 4 = 364$. Далее: красную гвоздику можно выбрать $C_{10}^1 = 10$ способами. Выбрать две розовые гвоздики из имеющихся четырех можно $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способами. Поэтому букет из одной красной и двух розовых гвоздик можно составить, по правилу умножения, $C_{10}^1 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ способами.

Схема выбора с возвращением

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещения с повторениями*.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\bar{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\bar{A}_n^m = n^m. \tag{1.12}$$

Приме\ 14. Из 3 элементов a, b, c составить все размещения по два элемента с повторениями.

По формуле (1.12) число размещений по два с повторениями равно $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Это: (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c), (c,a), (c,b).

Пример .15. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя цифры: а) 2, 5, 7, 8; б) 0, 1, 9?

❍ а) Все пятизначные числа, составленные из цифр 2, 5, 7, 8, отличаются друг от друга либо порядком их следования (например, 25558 и 52855), либо самими цифрами (например, 52788 и 78888). Следовательно, они являются размещениями из 4 элементов по 5 с повторениями, т. е. $\bar{A}_4^5$. Таким образом, искомое число пятизначных чисел равно $\bar{A}_4^5 = 4^5 = 1024$. Этот же результат можно получить, используя правило умножения: первую цифру слева в пятизначном числе можно выбрать четырьмя способами, вторую — тоже четырьмя способами, третью — четырьмя, четвертую — четырьмя, пятую — четырьмя. Всего получается $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ пятизначных чисел.

б) Если пятизначные числа состоят из цифр 0, 1, 9, то первую цифру слева можно выбрать двумя способами (0 не может занимать первую позицию), каждую из оставшихся четырех цифр можно выбрать тремя способами. Согласно правилу умножения, таких чисел будет $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$. (Иначе: $\bar{A}_3^5 - \bar{A}_3^4 = 243 - 81 = 162$.) ●

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это *сочетания с повторениями.*

Число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\bar{C}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \tag{1.13}$$

Пример 1.16. Из трех элементов a, b, c составить все сочетания по два элемента с повторениями.

❍ По формуле (1.13) число сочетаний по два с повторениями равно $\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Составляем эти сочетания с повторениями: (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c).

Пример 1.17. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

❍ Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем, равный 5. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5 в каждом. По формуле (1.13) имеем $\bar{C}_3^5 = C_7^5 = C_7^{7-5} = C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$.

Пусть в множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент — n_2 раз ..., k-й элемент — n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Перестановки из n элементов данного множества называют *перестановками с повторениями из n элементов.*

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{1.14}$$

Пример 1.18. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 3, 3, 5, 5, 8?

❍ Применим формулу (1.14). Здесь $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Число различных пятизначных чисел, содержащих цифры 3, 5 и 8, равно $P_5(2, 2, 1) = \dfrac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$. ●

9. Примеры вычисления вероятностей

Пример .19. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут черными?

❍ Выбрать 5 шаров из 20 можно C_{20}^5 различными способами (все выборки — неупорядоченные подмножества, состоящие из 5 элементов), т. е. $n = C_{20}^5$. Определим число случаев, благоприятствующих событию B – «среди 5 вынутых шаров 3 будут черными». Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно C_8^3. Каждому такому выбору соответствует C_{12}^2 способов выбора 2-х белых шаров из 12 белых в урне. Следовательно, по основному правилу комбинаторики (правилу умножения), имеем: $m = C_8^3 \cdot C_{12}^2$. По формуле (1.3) находим, что $P(B) = \dfrac{C_8^3 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^5} \approx 0{,}24$.

Пример 20 . В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

Сначала заметим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = 220$.

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно C_5^3 способами; 3 красных из имеющихся 4 можно выбрать C_4^3 способами; 3 зеленых из 3 зеленых — C_3^3 способами.

По правилу сложения общее число m случаев, благоприятствующих событию $A = \{$три карандаша, вынутых из коробки, одного цвета$\}$, равно $m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

б) Пусть событие $B = \{$три вынутых карандаша разных цветов$\}$. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события B, по правилу умножения равно $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

в) Пусть событие $C = \{$из трех выбранных карандашей 2 синих и 1 зеленый$\}$. Выбрать 2 синих карандаша из имеющихся 5 синих можно C_5^2 способами, а 1 зеленый из имеющихся 3 зеленых — C_3^1 способами. Отсюда по правилу умножения имеем: $m = C_5^2 \cdot C_3^1 = 30$. Поэтому $P(\mathrm{C}) = \frac{m}{n} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$.

Пример.21 . Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что: а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в ряд в порядке появления.

а) Из шести данных букв можно составить $n = A_6^3 = 120$ трехбуквенных «слов» (НИЛ, ОЛЯ, ОНИ, ЛЯМ, МИЛ и т. д.). Слово ЛОМ при этом появится лишь один раз, т. е. $m = 1$. Поэтому вероятность появления слова ЛОМ (событие A) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

б) Шестибуквенные «слова» отличаются друг от друга лишь порядком расположения букв (НОЛМИЯ, ЯНОЛИМ, ОЛНИЯМ и т. д.). Их число равно числу перестановок из 6 букв, т. е. $n = P_6 = 6!$. Очевидно, что $m = 1$. Тогда вероятность появления слова МОЛНИЯ (событие B) равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$.

Пример .22. В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки: а) одинаковы, б) различны?

❍ Выбрать 4 открытки 6 видов можно $\overline{C_4^6} = 126$ способами, т.е. $n = 126$.

а) Пусть событие $A = \{$продано 4 одинаковые открытки$\}$. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события A, равно числу видов открыток, т.е. $m = 6$. Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}.$$

б) Пусть событие $B =$ проданы 4 различные открытки. Выбрать 4 открытки из 6 можно $C_4^6 = 15$ способами. т.е. $m = 15$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}.$$

10. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности применяется в случае, когда исходы опыта равновозможны, а ПЭС (или Ω) есть бесконечное несчетное множество. Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, имеющую площадь S_Ω, и внутри области Ω область D с площадью S_D (см. рис. 8).

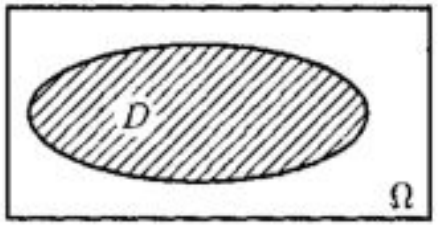


Рис. 8

В области Ω случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как *бросание точки X в область* Ω. При этом попадание точки в область Ω — достоверное событие, в D — случайное. Предполагается, что все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможны), т. е. что брошенная точка может попасть в любую точку области Ω и вероятность попасть в область D пропорциональна площади этой области и не зависит от ее расположения и формы. Пусть событие $A = \{X \in D\}$, т. е. брошенная точка попадет в область D.

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области D к площади области Ω, т. е.

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}. \qquad (1.15)$$

Геометрическое определение вероятности события применимо и в случае, когда области Ω и D обе линейные или объемные. В первом случае

$$P(A) = \frac{l_D}{l_\Omega}. \tag{1.16}$$

во втором —

$$P(A) = \frac{V_D}{V_\Omega}, \tag{1.17}$$

где l – длина, а V — объем соответствующей области.

Все три формулы ((1.15)), ((1.16)), ((1.17)) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \Omega}, \tag{1.18}$$

где через mes обозначена мера (S, l, V) области.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, присущими классическому (и другим) определению:

1. Геометрическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Геометрическая вероятность невозможного события равна нулю, т. е.
$$P(\varnothing) = 0.$$
3. Геометрическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$
4. Геометрическая вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Проверим, например, свойство 4: пусть $A = \{x \in D_1\}$, $B = \{x \in D_2\}$, где $D_1 \cdot D_2 = \varnothing$, т. е. D_1 и D_2 непересекающиеся области. Тогда $P(A+B) = \dfrac{S_{D_1+D_2}}{S_\Omega} = \dfrac{S_{D_1}}{S_\Omega} + \dfrac{S_{D_2}}{S_\Omega} = P(A) + P(B)$.

Пример .23. (Задача о встрече.) Два человека договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

❍ Пусть x — время прихода первого, а y — второго. Возможные значения x и y: $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречающихся (см. рис. 9).

❍ Пусть x — время прихода первого, а y — второго. Возможные значения x и y: $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречающихся (см. рис. 9).

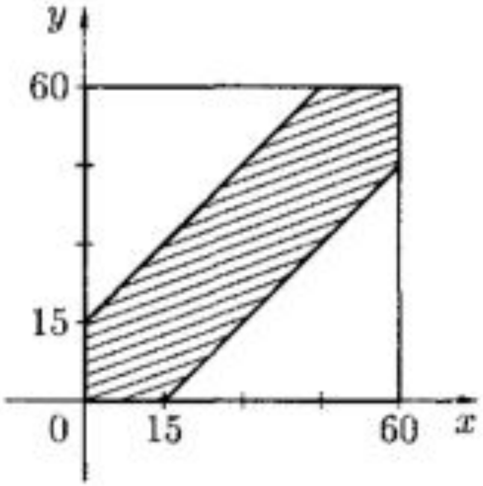


Рис. 9

Тогда $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$; все исходы Ω равновозможны, так как лица приходят наудачу. Событие A — лица встретятся — произойдет, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин (по модулю), т. е. $A = \{(x, y) : |y - x| \leqslant 15\}$. Неравенство $|y - x| \leqslant 15$, т. е. $x - 15 \leqslant y \leqslant x + 15$ определяет область, заштрихованную на рис. 9, т. е. точки полосы есть исходы, благоприятствующие встрече. Искомая вероятность определяется по формуле (1.15):

$$P(A) = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16} \approx 0{,}44.$$

11. Аксиоматическое определение вероятности

Аксиоматическое построение теории вероятностей создано в начале 30-х годов академиком А. Н. Колмогоровым. Аксиомы теории вероятностей вводятся таким образом, чтобы вероятность события обладала основными свойствами статистической вероятности, характеризующей ее практический смысл. В этом случае теория хорошо согласуется с практикой.

Пус ... опы-
та (экс ... что
совокуп ... (σ-
алгебро
1. S
2. Е ... тво)
принад ... ение
(т. е. пр
Вер ... лгеб-
ре собы ... оря-
ющая с

А3. *Аксиома аддитивности:* вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Совокупность объектов (Ω, S, P), где Ω — пространство элементарных событий, S — алгебра событий, P — числовая функция, удовлетворяющая аксиомам А1–А3, называется *вероятностным пространством* случайного эксперимента.

Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления; заданием этого пространства завершается аксиоматика теории вероятностей.

А1. *Аксиома неотрицательности:* вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, т. е.

$$P(A) \geqslant 0.$$

А2. *Аксиома нормированности:* вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

А3. *Аксиома аддитивности:* вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Совокупность объектов (Ω, S, P), где Ω — пространство элементарных событий, S — алгебра событий, P — числовая функция, удовлетворяющая аксиомам А1–А3, называется *вероятностным пространством* случайного эксперимента.

Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления; заданием этого пространства завершается аксиоматика теории вероятностей.

12. Свойства вероятностей

Приведем ряд свойств вероятности, являющихся следствием аксиом Колмогорова.

C1. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

C2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

C3. Вероятность любого события не превосходит единицы, т. е.

$$P(A) \leqslant 1.$$

C4. Если $A \subseteq B$, т. е. событие A влечет за собой событие B, то

$$P(A) \leqslant P(B).$$

C5. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Пример24 . Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется *хотя бы одна* «дама».

❍ Пусть A — интересующее нас событие, A_1 — появление одной «дамы», A_2 — двух «дам», A_3 — трех «дам». Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_1, A_2, A_3 несовместные. Поэтому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Число всевозможных случаев выбора трех карт из 36 равно C_{36}^3; число случаев, благоприятных событиям A_1, A_2, A_3, соответственно равно $m_1 = C_4^1 \cdot C_{32}^2$, $m_2 = C_4^2 \cdot C_{32}^1$, $m_3 = C_4^3 \cdot C_{32}^0$. Таким образом, $P(A) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^2 + C_4^2 \cdot C_{32}^1 + C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} \approx 0{,}31$.

Задача решается проще, если воспользоваться свойством С2. Находим $P(\overline{A})$, где $\overline{A}$ — среди вынутых карт нет ни одной «дамы»! $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3} \approx 0{,}69$. Значит, $P(A) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$.