

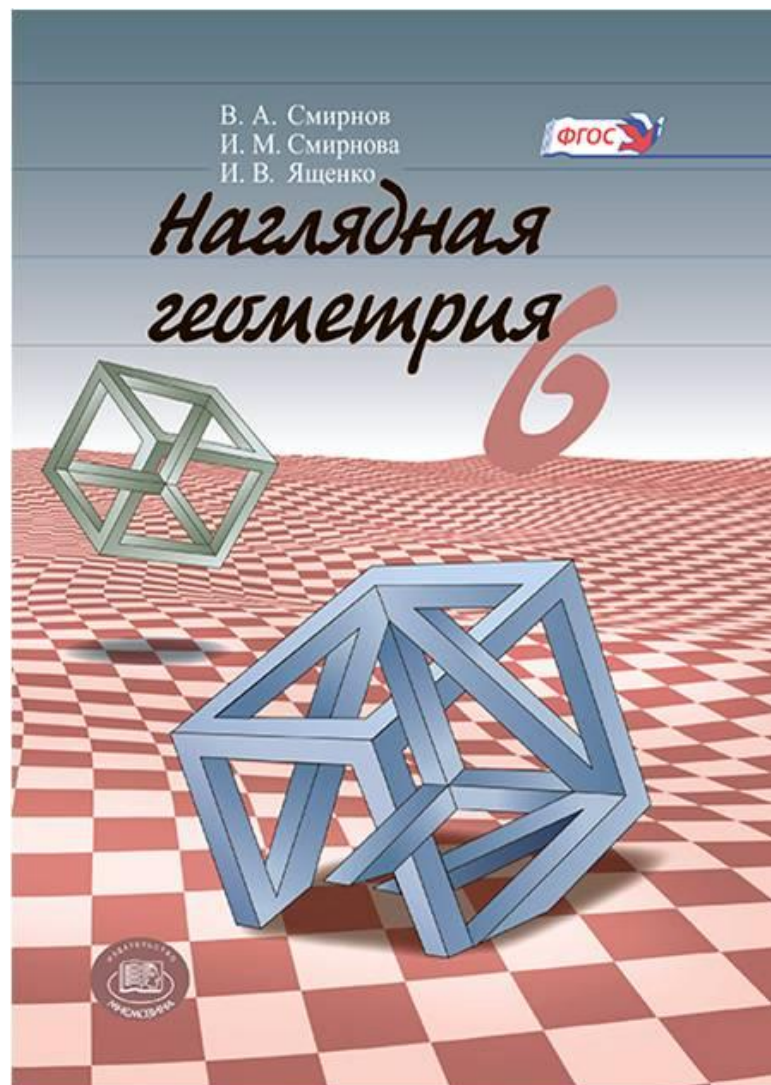
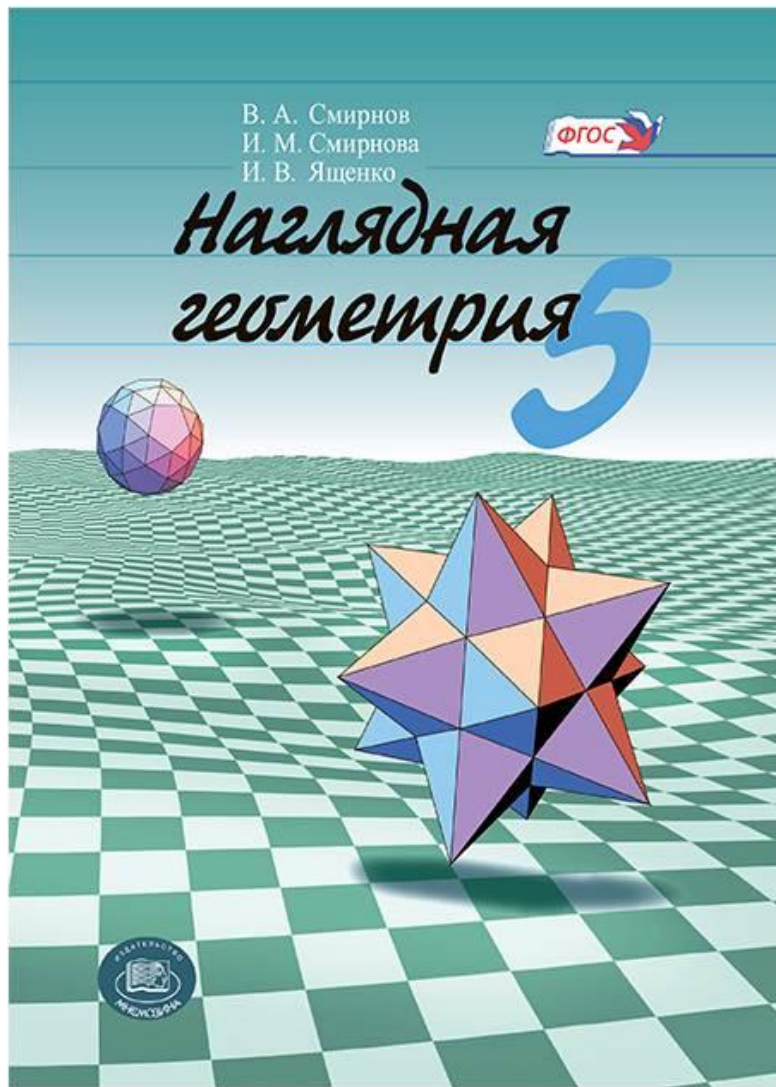
Кривые, как траектории движения точек

ВЕДУЩИЙ: Смирнов Владимир Алексеевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 7—9 и 10—11 классов

Литература

1. Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Наука, 1980.
2. Веров С. Касательные к рулеттам. – Квант, 1975, № 5, с. 22–30.
3. Веров С. Тайны циклоиды. – Квант, 1975, № 8, с. 19–27.
4. Веров С. Брахистохрона, или Еще одна тайна циклоиды. – Квант, 1975, № 12, с. 29–35.
5. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Кривые. – М.: Мнемозина, 2007.
6. Сайт «Математические этюды»: www.etudes.ru

Учебные пособия по наглядной геометрии для 5, 6 классов издательства «Мнемозина»



5 класс

Оглавление

Предисловие	3
§ 1. Точки, прямые, плоскости	7
§ 2. Лучи, отрезки	12
§ 3. Измерение длин отрезков	17
§ 4. Ломаные	21
§ 5. Полуплоскость и угол	25
§ 6. Измерение величин углов	34
§ 7. Многоугольники	43
§ 8. Треугольники	47
§ 9. Четырёхугольники	51
§ 10. Многогранники	56
§ 11. Моделирование многогранников	66
§ 12. Правильные многогранники	74
§ 13* Полуправильные многогранники	80
§ 14* Звёздчатые многогранники	87
Ответы	92
Примерное планирование	106
Примерная программа	107

6 класс

Оглавление

Предисловие	3
§ 1. Окружность и круг	4
§ 2. Геометрические места точек	13
§ 3* Графы	19
§ 4* Раскрашивание карт	26
§ 5. Центральная симметрия	31
§ 6. Осевая симметрия	37
§ 7. Поворот	45
§ 8* Паркеты	50
§ 9* Кривые	59
§ 10. Разрезания	71
§ 11. Площадь	76
§ 12. Объём	87
§ 13. Площадь поверхности	94
§ 14. Координаты	98
Ответы	104
Примерная программа	142
Примерное планирование	144

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

[Учебно-методический комплект по геометрии](#)

[Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов](#)

[Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов](#)

[Программа по геометрии для 5-6 классов](#)

[Дидактические материалы](#)

Уроки геометрии с "Power Point"

[5-6 классы](#)

[7-9 классы](#)

[10-11 классы](#)

[Геометрия с "GeoGebra".](#)

[Элементарная математика для студентов педагогических вузов](#)

[Статьи о преподавании геометрии](#)



[Видеолекции и вебинары](#)

[Подготовка к ГИА](#)

[Подготовка к ЕГЭ](#)

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Циклоида

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся по прямой, называется **циклоидой**, что в переводе с греческого языка означает кругообразная.

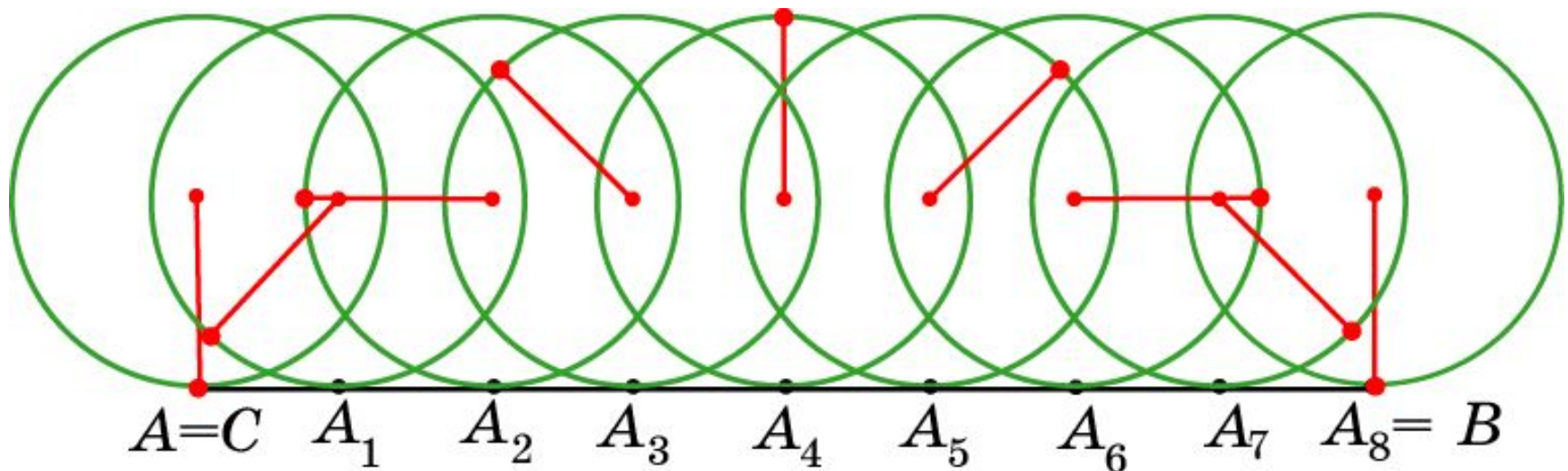
Циклоиду, например, описывает точка, закреплённая на ободе колеса велосипеда, катящегося по ровной дороге.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564–1642). Он же придумал и её название.



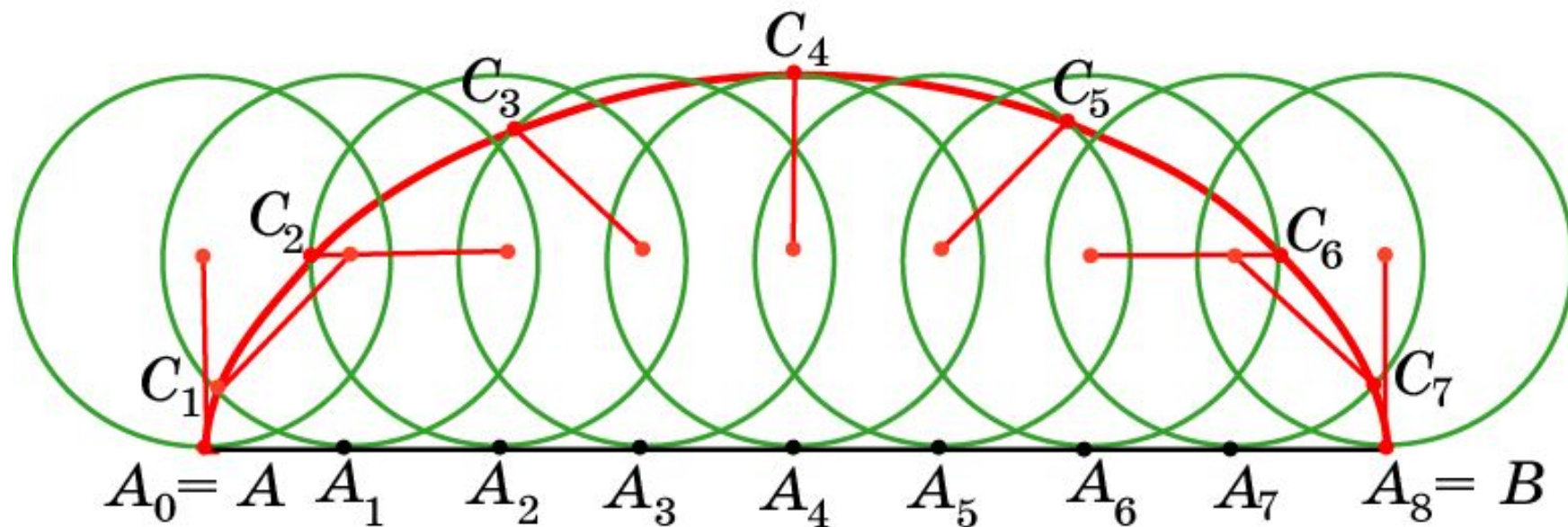
Построение циклоиды

Окружность прокатилась по отрезку AB , сделав полный оборот. Точки, A_1, \dots, A_8 делят отрезок AB на 8 равных частей. Где будет находиться отмеченная точка A , когда окружность, катящаяся по прямой, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 ? (Для указания положения точки используйте направления: восток, запад, север, юг и т.д.)



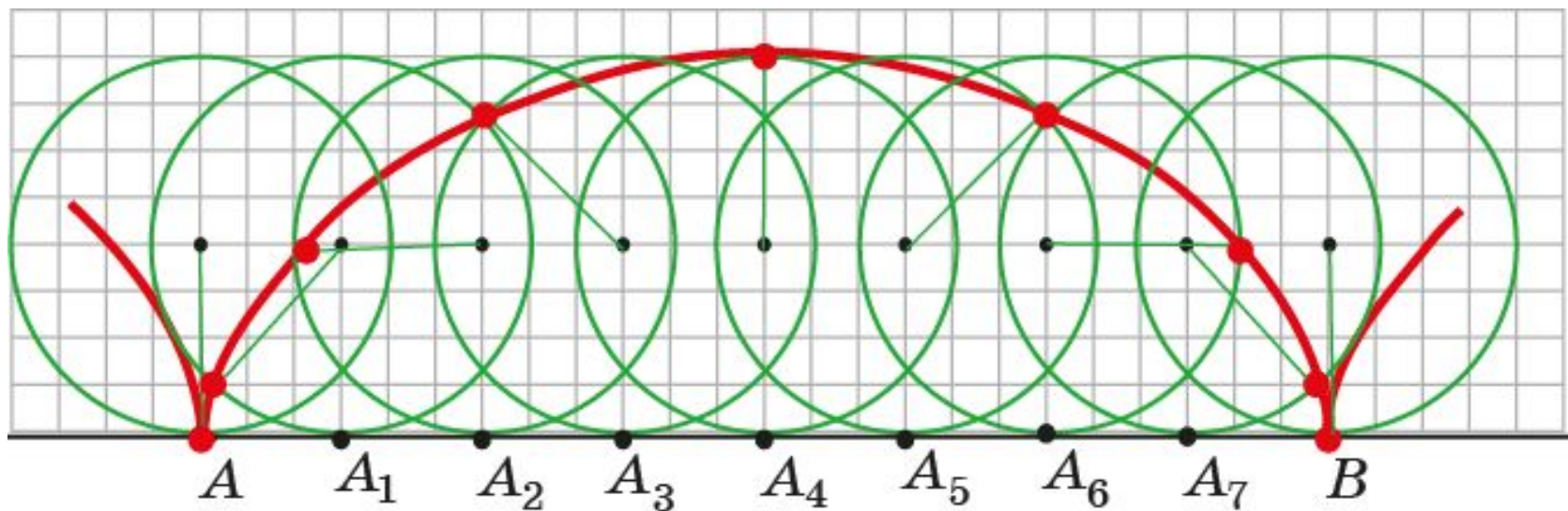
Ответ: а) север; б) запад; в) восток; г) юго-запад; д) северо-запад;
е) северо-восток; ж) юго-восток.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим **ЦИКЛОИДУ**.



Упражнение

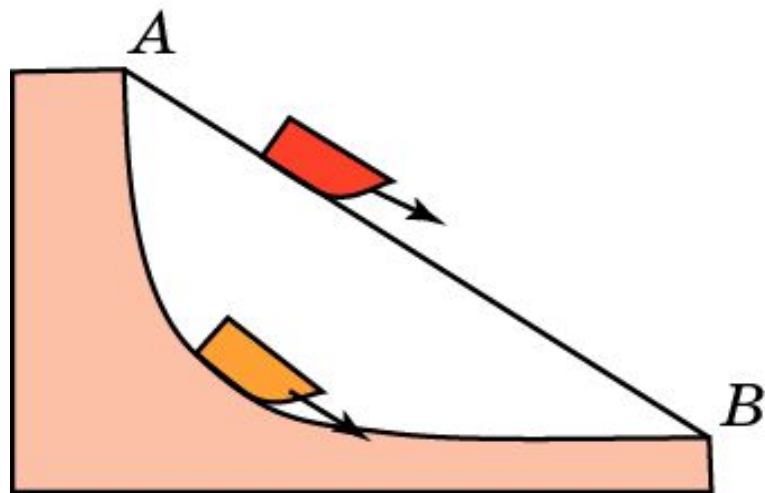
На клетчатой бумаге отложите отрезок AB величиной 24 клетки. Нарисуйте окружность радиуса 4 клетки. Проведите построение ЦИКЛОИДЫ.



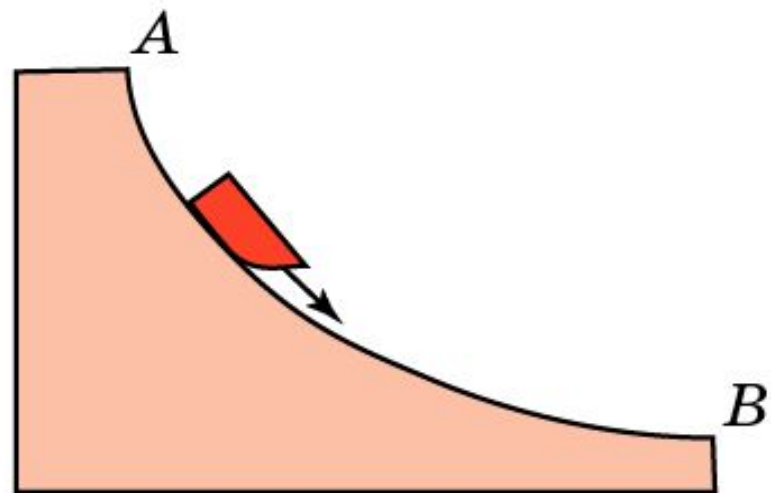
Свойство 1

Ледяная гора. В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки (рис. а), чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время. Искомую кривую называли "брахистохроной", т.е. кривой кратчайшего времени.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевернутая циклоида (рис. б).



а)



б)

Свойство 2

Часы с маятником. Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида (рис. 1, 2). За это свойство циклоиду называют также "таутохрона" – кривая равных времён. Если, например, в форме перевернутой циклоиды изготовить желоб (рис. 1) и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды.

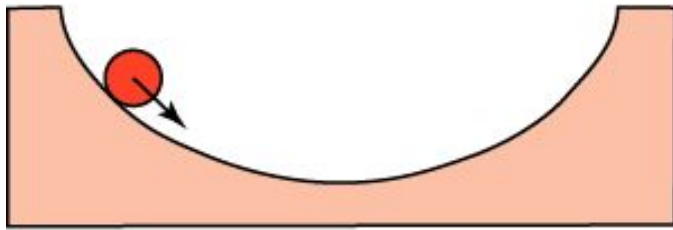


Рис. 1

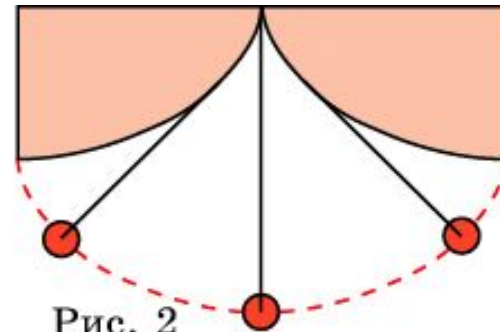
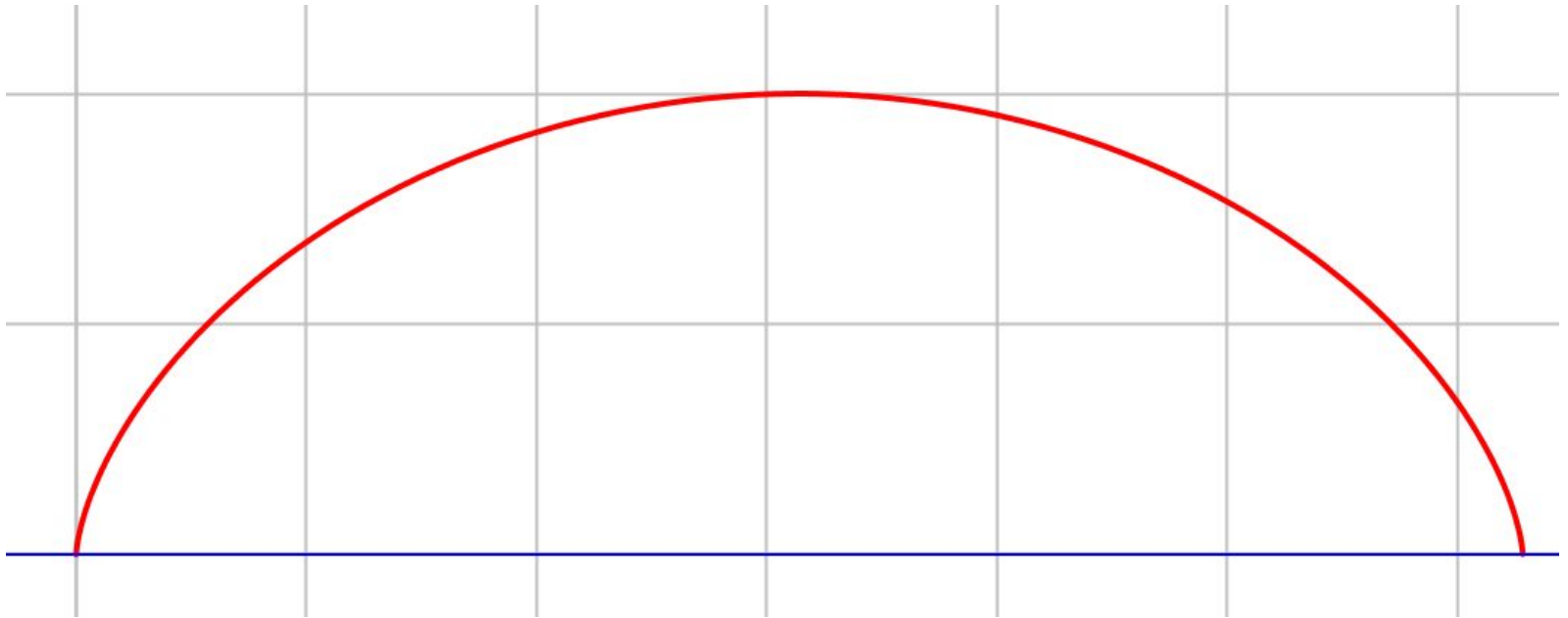


Рис. 2

Упражнение

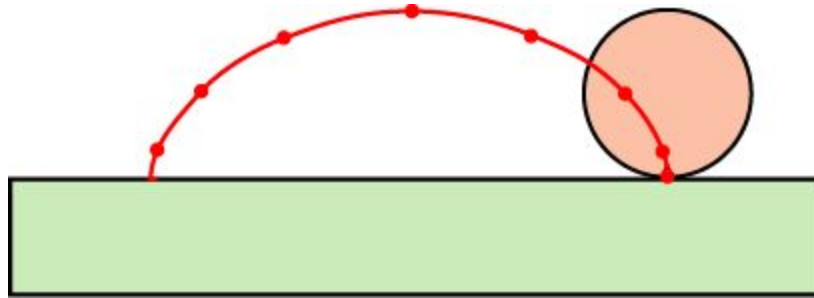
Имеет ли циклоида: а) оси симметрии;
б) центр симметрии?



Ответ: а) да; б) нет.

Лабораторная работа 1

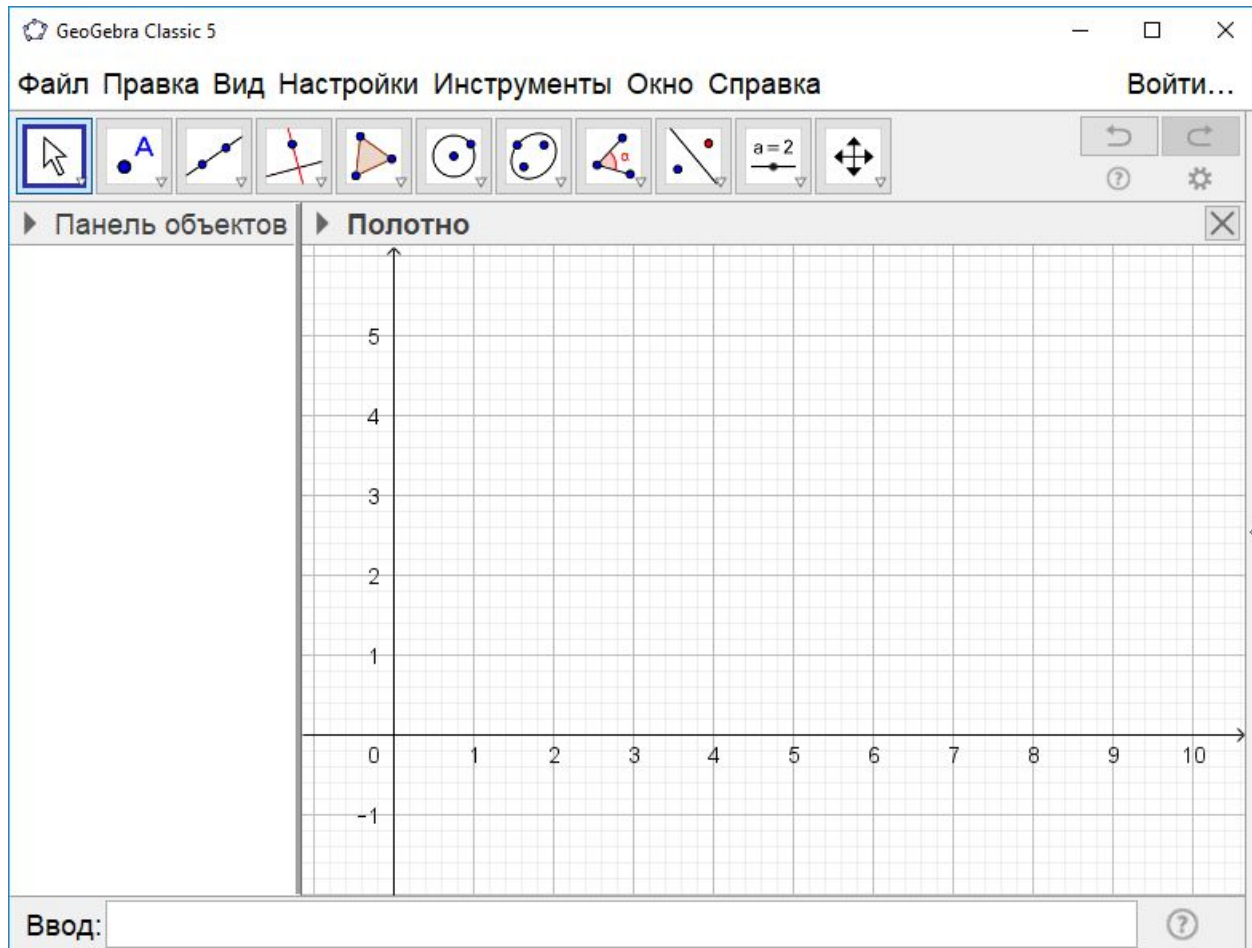
Для проведения лабораторной работы потребуется полоска прямоугольной формы шириной примерно 3 см и длиной примерно 15–20 см, вырезанная из плотного картона, и круг радиуса 2 см, вырезанный из плотного картона, на краю которого вырезан небольшой уголок, в который можно поставить острие карандаша.



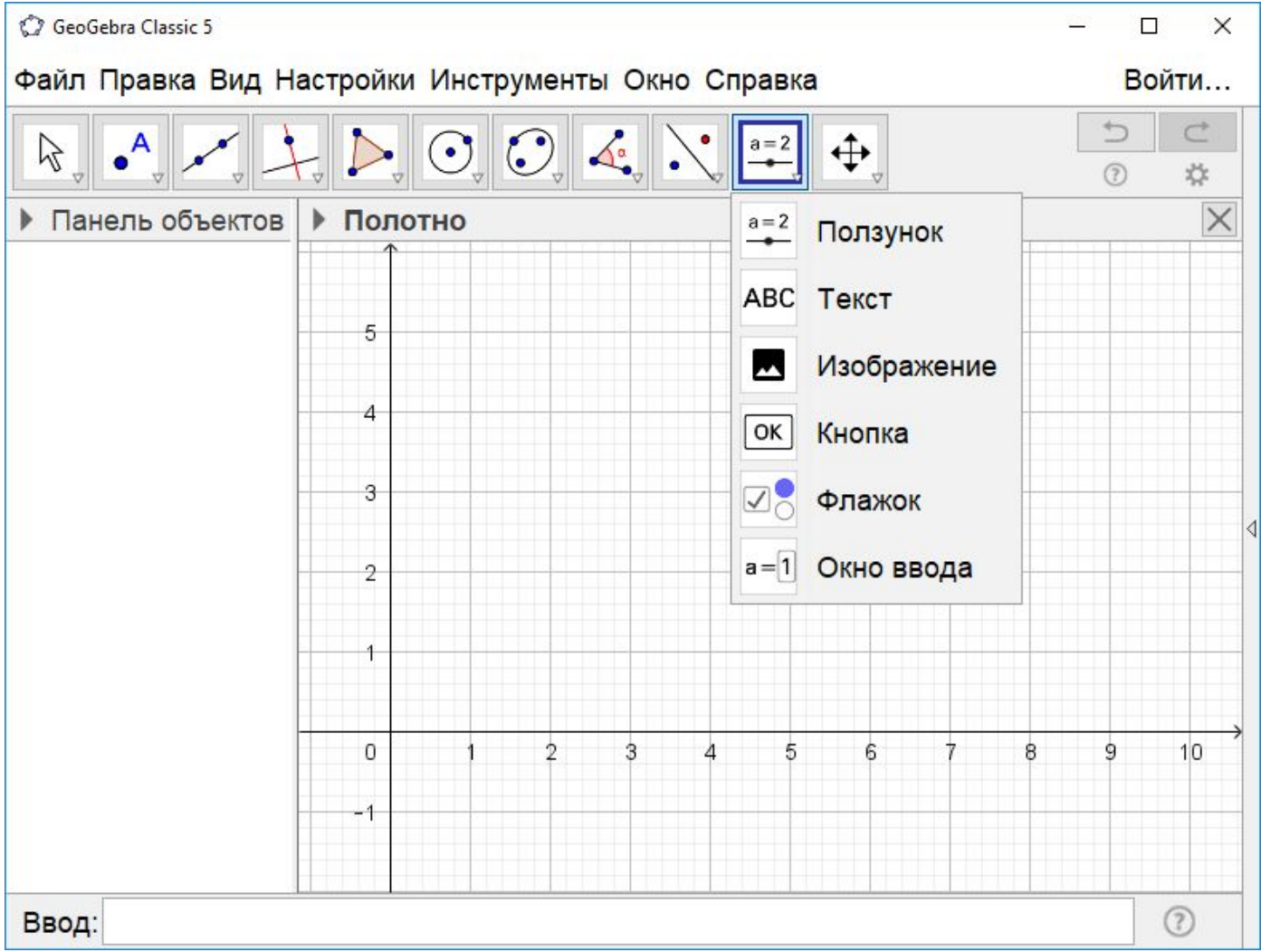
Приклеиваем полоску к листу бумаги. Устанавливаем круг так, чтобы вырезанный уголок находился на краю полоски. Катим круг по краю полоски и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя плавной кривой отмеченные точки, получаем циклоиду.

Лабораторная работа 2

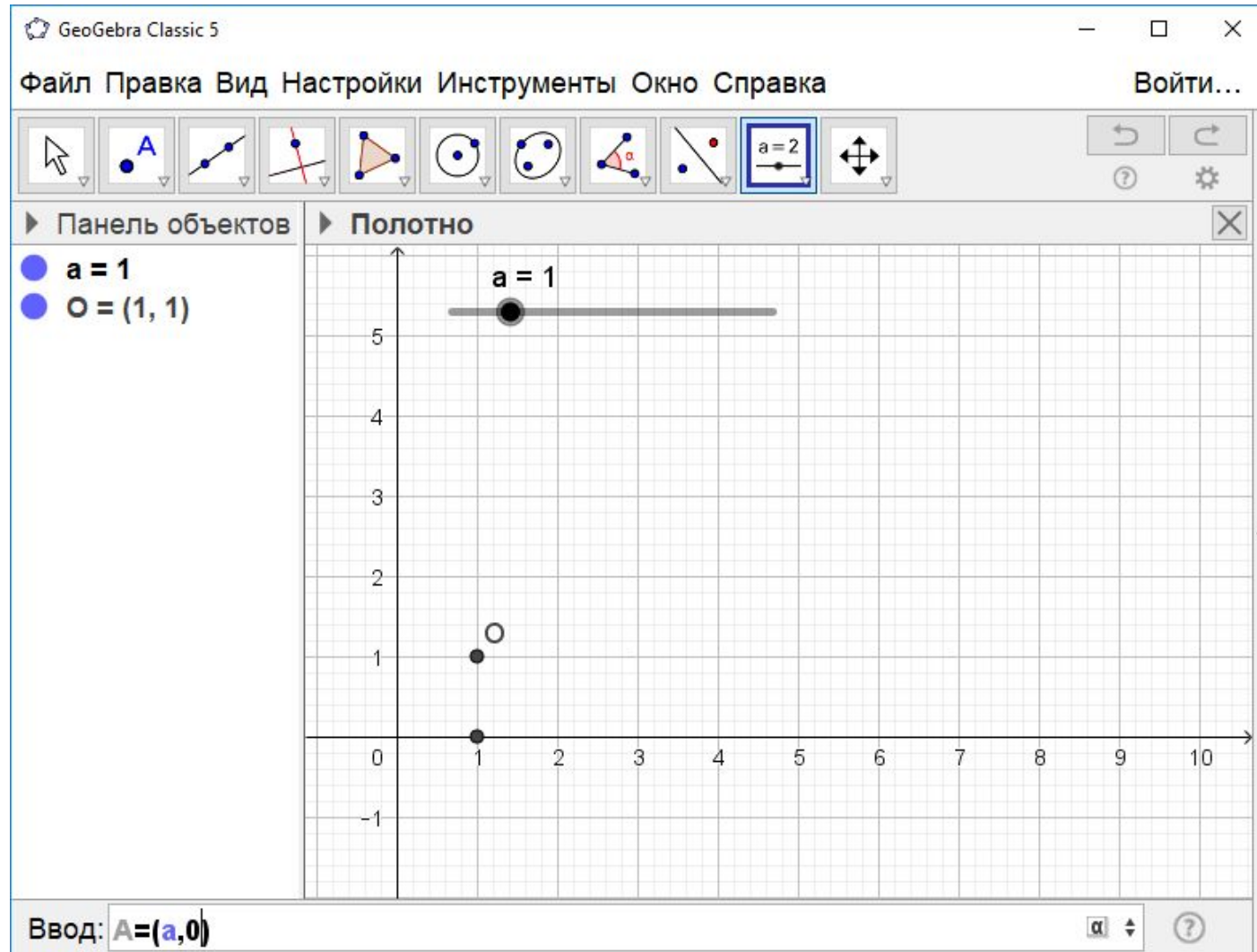
Для получения циклоиды можно воспользоваться программой GeoGebra. Её рабочее окно показано на рисунке.



1. В панели инструментов выберем «Ползунок». В открывшемся окне зададим изменения ползунка, например, от -1 до 10.



2. В строке «Ввод» наберём: $O=(a,1)$ и нажмём “Enter”. Наберём: $A=(a,0)$ и нажмём “Enter”. Получим соответствующие точки.



3. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром O и радиусом 1.

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The main workspace is a coordinate grid with x and y axes ranging from -2 to 10. A circle is drawn with its center at point $O(1, 1)$ and passing through point $A(1, 0)$. The radius is 1. The center O is marked with a black dot and labeled 'O'. Point A is also marked with a black dot and labeled 'A'. The circle is drawn with a black outline.

The left sidebar shows the 'Панель объектов' (Object Panel) with the following items:

- $a = 1$
- $O = (1, 1)$
- $A = (1, 0)$
- $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- $A' = (0.16, 0.46)$
- $f = 1$

The top toolbar contains various geometric tools. The 'Окружность по центру и радиусу' (Circle by center and radius) tool is highlighted with a yellow tooltip that reads: «Окружность по центру и радиусу. Укажите центр и введите величину радиуса».

The bottom status bar shows the input field 'Ввод:' (Input:).

4. С помощью инструмента «Поворот вокруг точки» повернём точку A вокруг точки O на угол a радиан по часовой стрелке.

GeoGebra Classic 5

Файл Правка Вид Настройки Инструменты Окно Справка Войти...

Панель объектов

- $a = 1$
- $O = (1, 1)$
- $A = (1, 0)$
- $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2$
- $A' = (0.16, 0.46)$

Полотно

Поворот вокруг точки
Укажите исходный объект, центр вращения и

Ввод:

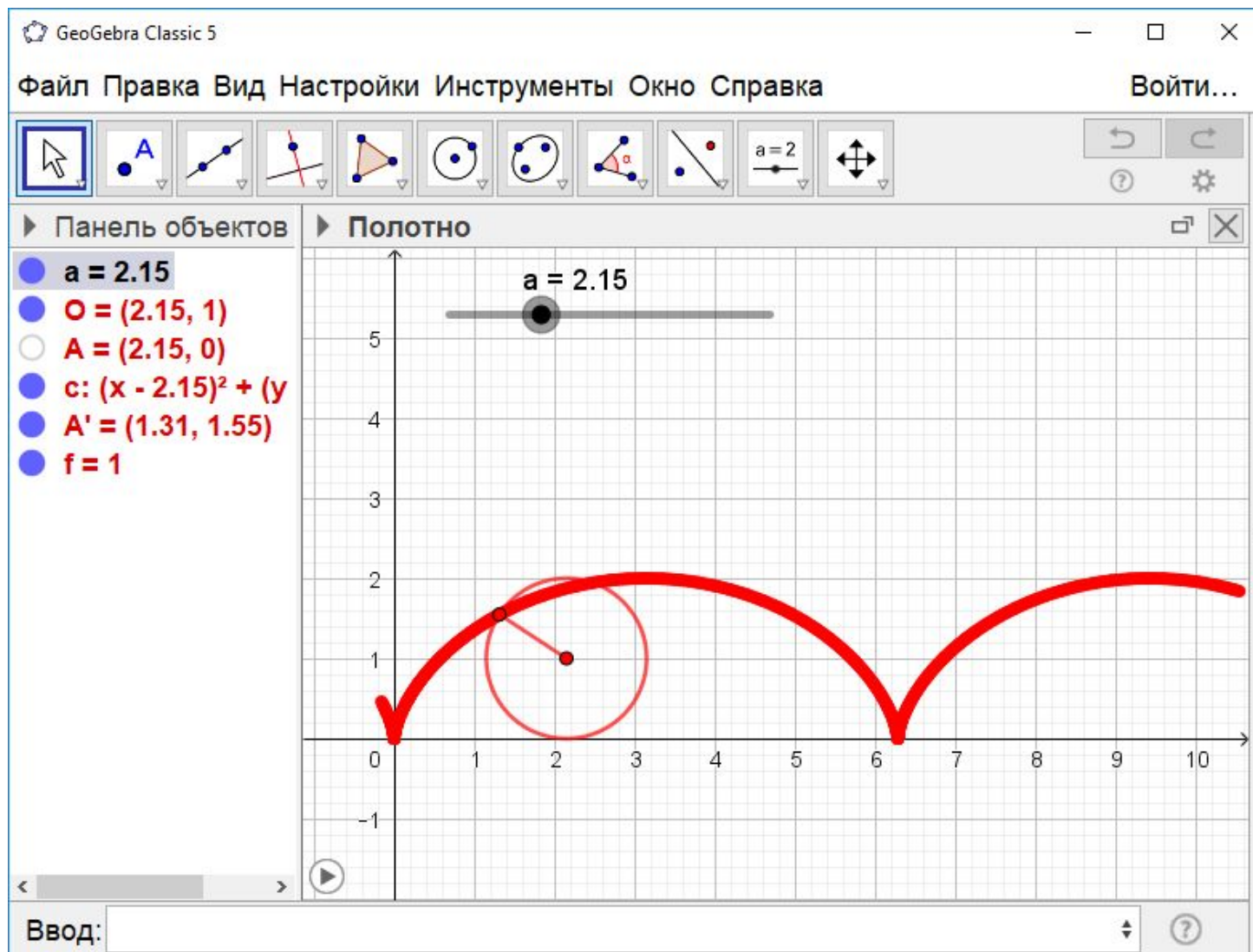
5. С помощью инструмента «Отрезок» соединим точки O и A' отрезком. Правой кнопкой «мыши» кликнем по точке A' и выберем строчку «Оставлять след». Уберём лишние обозначения и изменим цвет.

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The main workspace is a coordinate plane with a grid. A red circle is centered at $(1, 1)$ with a radius of 1. A red point A' is located at $(0.16, 0.46)$ on the circle. A grey segment is drawn from point $O = (1, 1)$ to point $A' = (0.16, 0.46)$. The label $a = 1$ is placed above the segment. The left sidebar shows the object list with the following items:

- $a = 1$
- $O = (1, 1)$
- $A = (1, 0)$
- $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- $A' = (0.16, 0.46)$
- $f = 1$

The top toolbar contains various construction tools, and the bottom input field is empty.

6. Правой кнопкой «мыши» кликнем по ползунку, и выберем строчку «анимировать». Окружность покатится по оси абсцисс, а закреплённая на ней точка будет описывать циклоиду.



Удлинённая циклоида

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой, называется **удлиненной циклоидой**.

На полученном ранее рисунке циклоиды отметьте точку, закреплённую на продолжении радиуса. Отметьте положения этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B ; б) A_4 ; в) A_2 ; г) A_6 ; д) A_1 ; е) A_3 ; ж) A_5 ; з) A_7 . Соедините полученные точки плавной кривой.

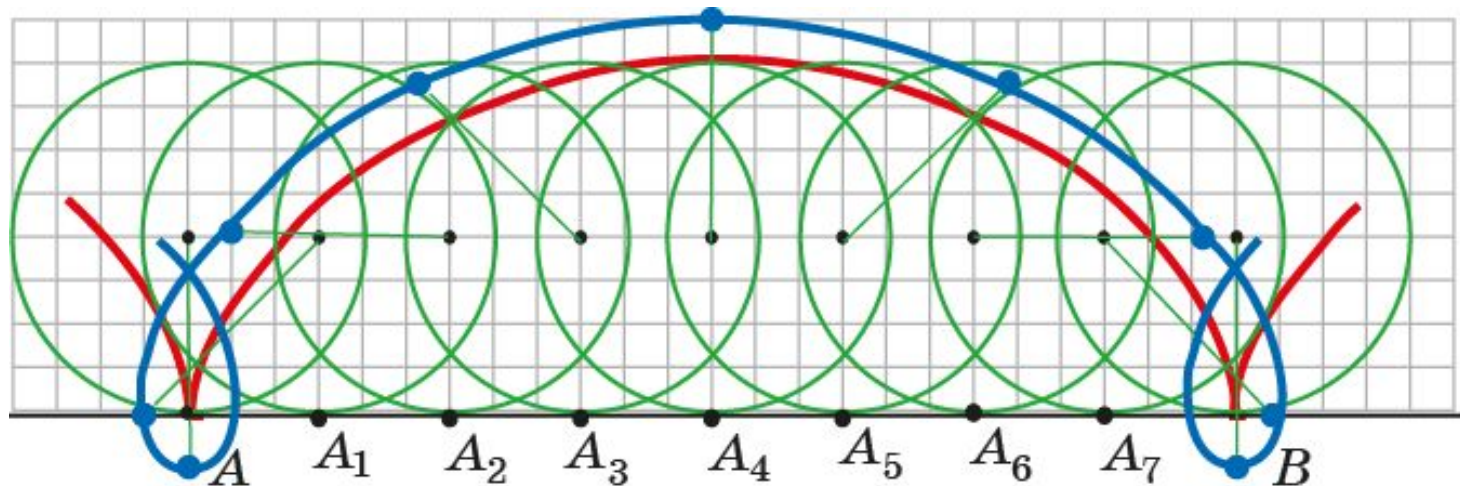
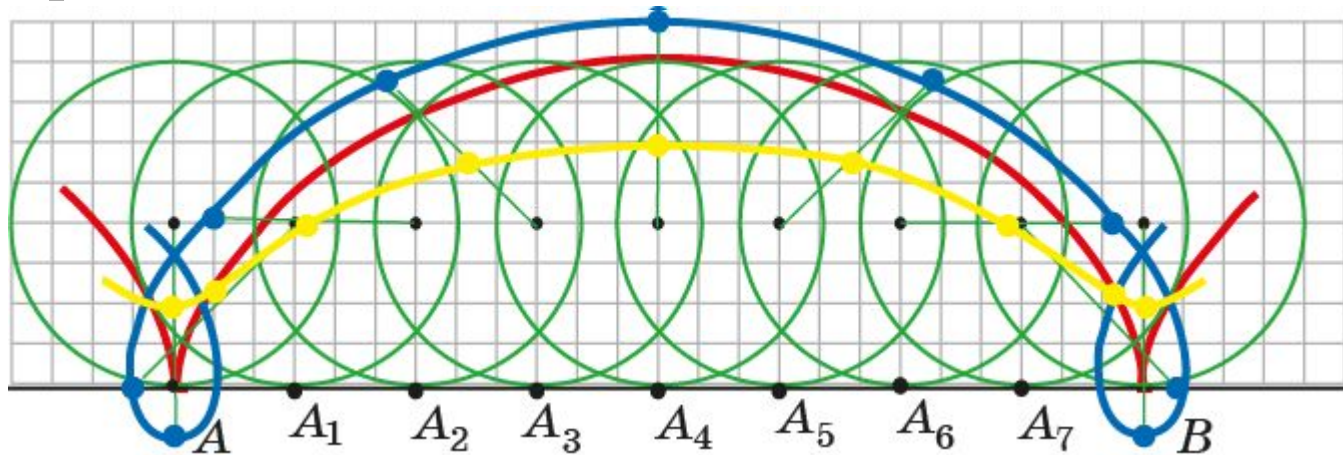


Рис. 23.4'

Укороченная циклоида

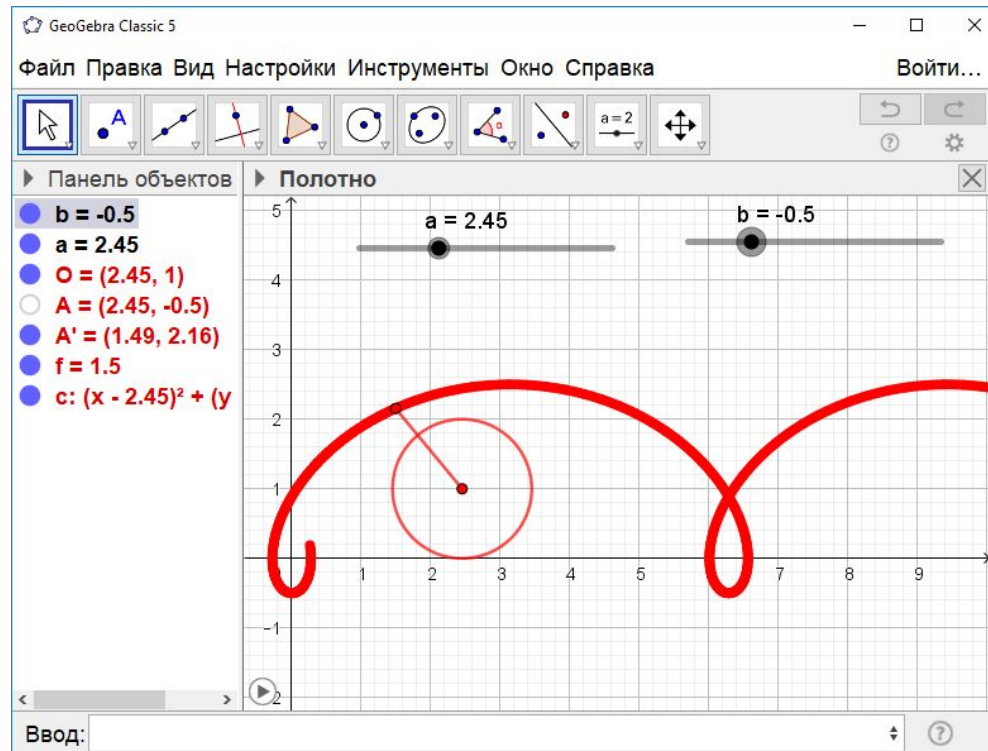
Кривая, которую описывает точка, закрепленная на радиусе внутри окружности, катящейся по прямой, называется **укороченной циклоидой**.

На полученном ранее рисунке циклоиды отметьте точку, закреплённую на радиусе окружности. Отметьте положения этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B ; б) A_4 ; в) A_2 ; г) A_6 ; д) A_1 ; е) A_3 ; ж) A_5 ; з) A_7 . Соедините полученные точки плавной кривой.

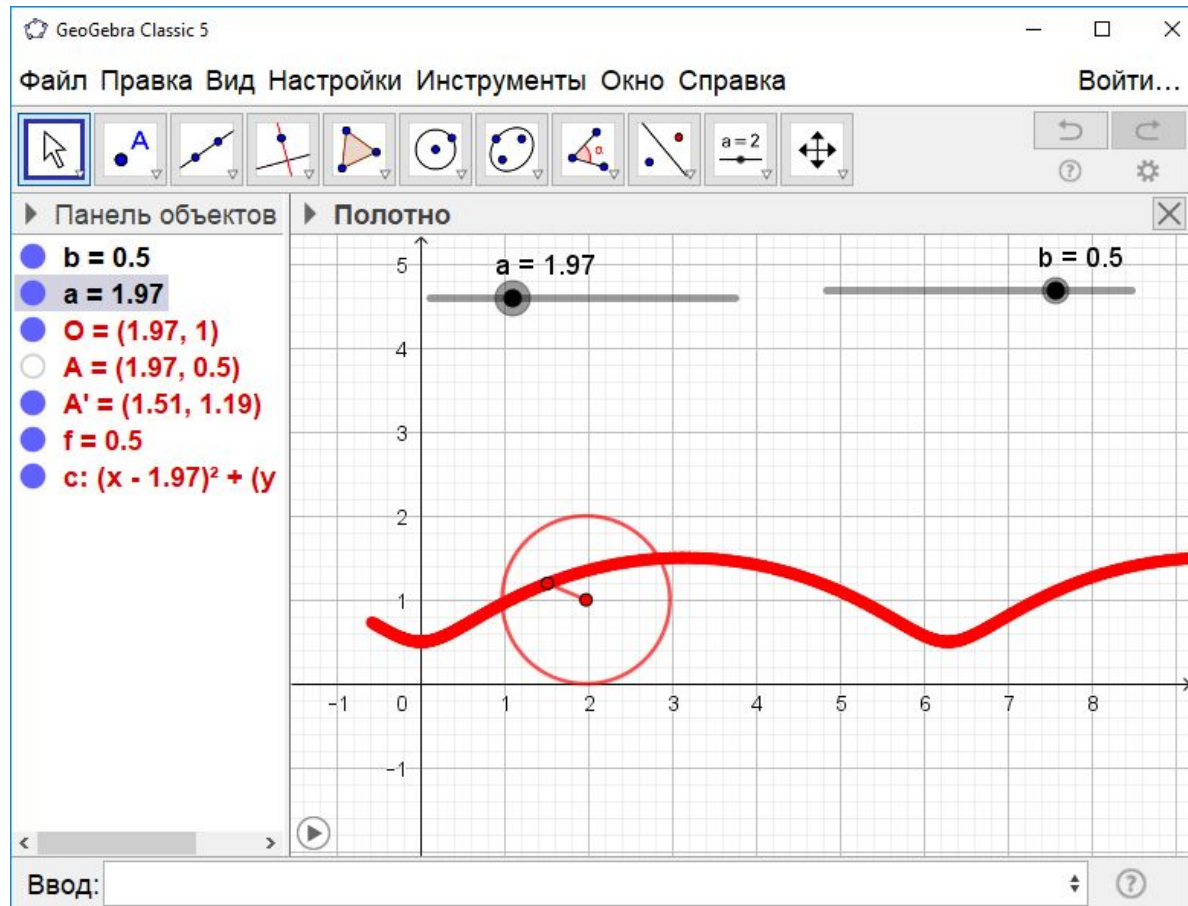


Лабораторная работа

Для получения удлинённой и укороченной циклоиды можно воспользоваться циклоидой, полученной в программе GeoGebra. Для этого нужно создать ещё один ползунок, изменяющийся, например, от -1 до 1. Изменить точку A , кликнув по ней правой кнопкой «мыши». В открывшемся окне выбрать «Свойства». В разделе «Основные» в качестве координат точки A написать (a,b) и нажать «Enter». На рисунке показан случай $b = -0,5$.

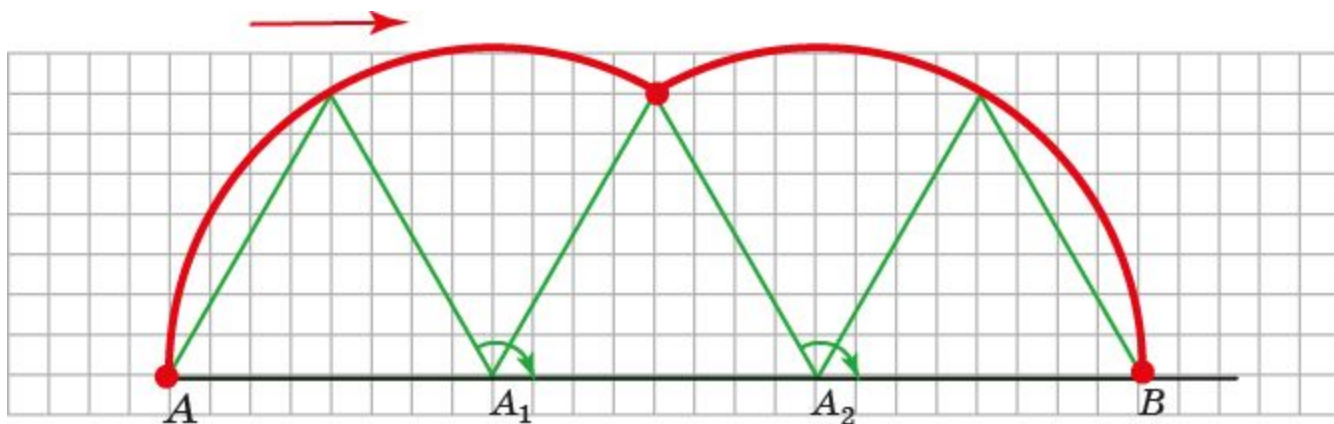


Если в качестве значения b взять, например, 0,5, то получим укороченную циклоиду.



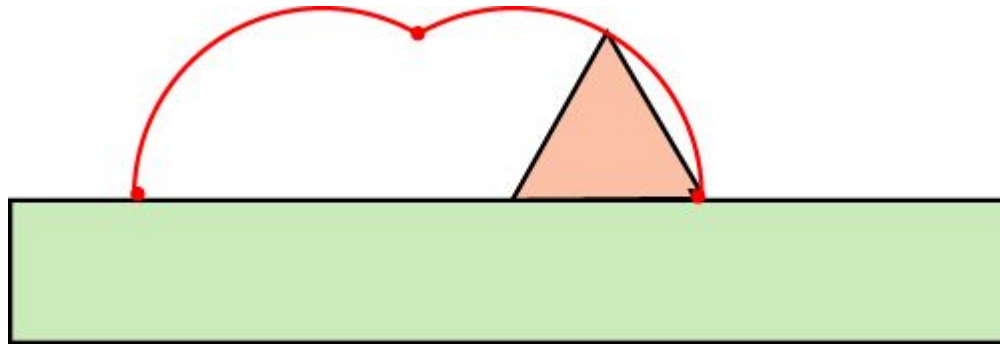
Упражнение

На клетчатой бумаге отложите отрезок AB величиной 24 клетки. Нарисуйте «правильный» треугольник со стороной, равной 8 клеток. Отметьте точку в вершине треугольника. Нарисуйте траекторию движения этой точки, когда треугольник катится по прямой.



Лабораторная работа 1

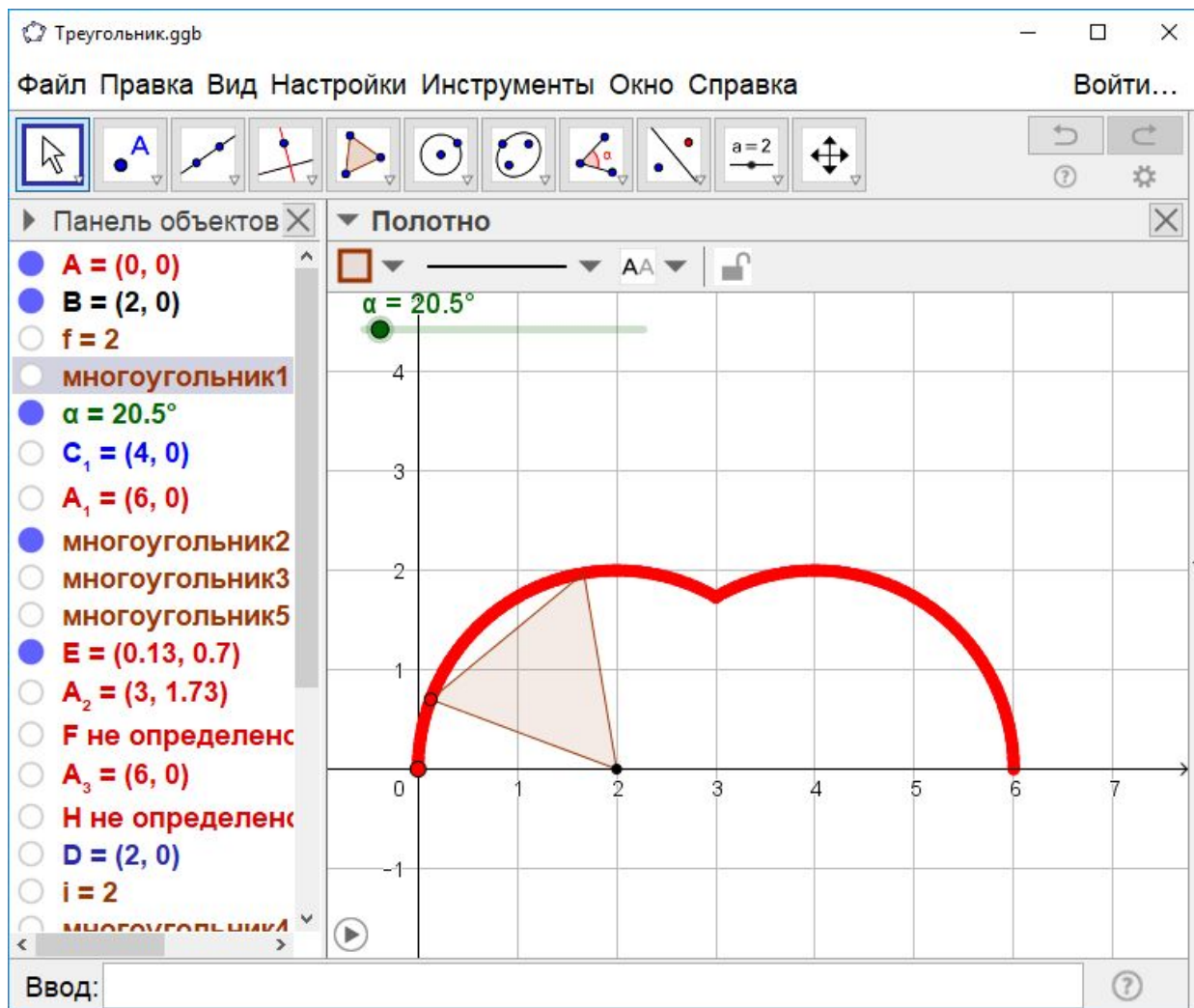
Для проведения лабораторной работы потребуется полоска прямоугольной формы шириной примерно 3 см и длиной примерно 15–20 см, вырезанная из плотного картона, и правильный треугольник со стороной примерно 4 см, вырезанный из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем полоску к листу бумаги. Устанавливаем треугольник на краю полоски. Поворачиваем треугольник и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

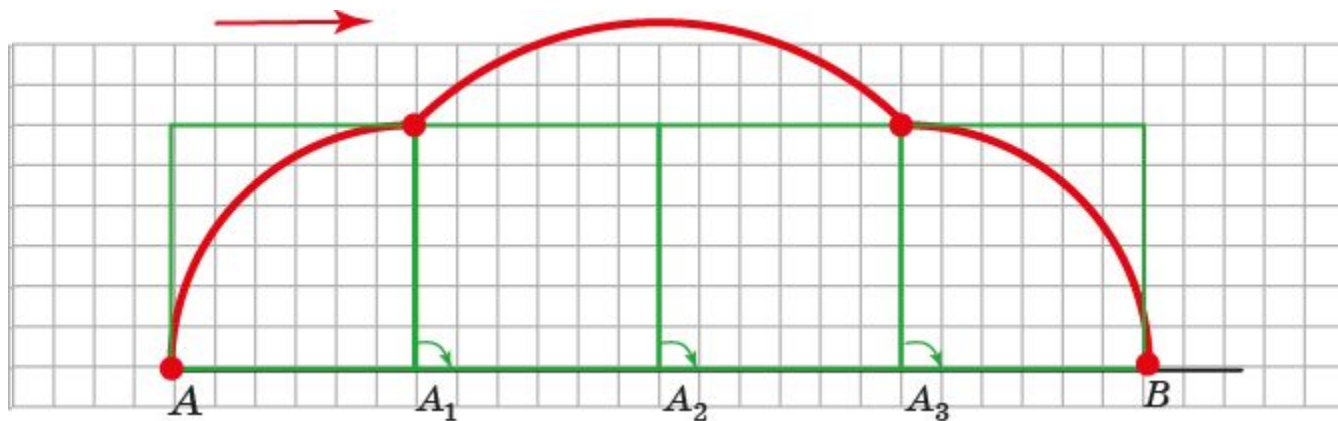
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.



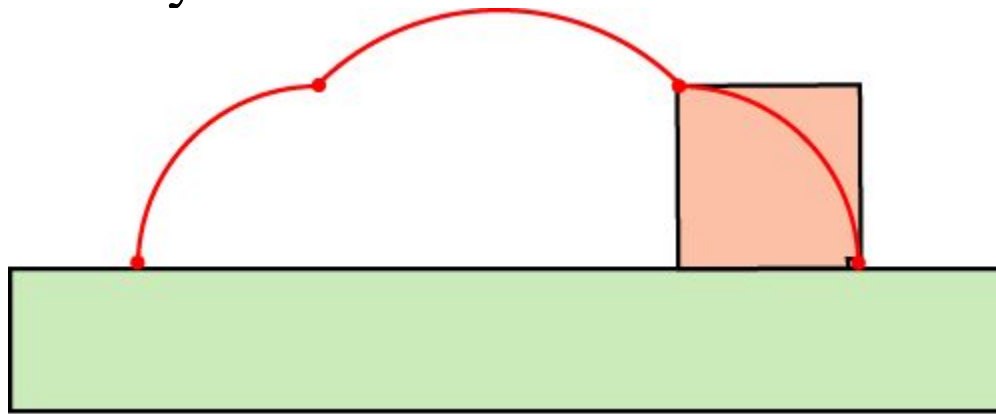
Упражнение

На клетчатой бумаге отложите отрезок AB величиной 24 клетки. Нарисуйте квадрат со стороной, равной 6 клеткам. Отметьте точку в вершине квадрата. Нарисуйте траекторию движения этой точки, когда квадрат катится по прямой.



Лабораторная работа

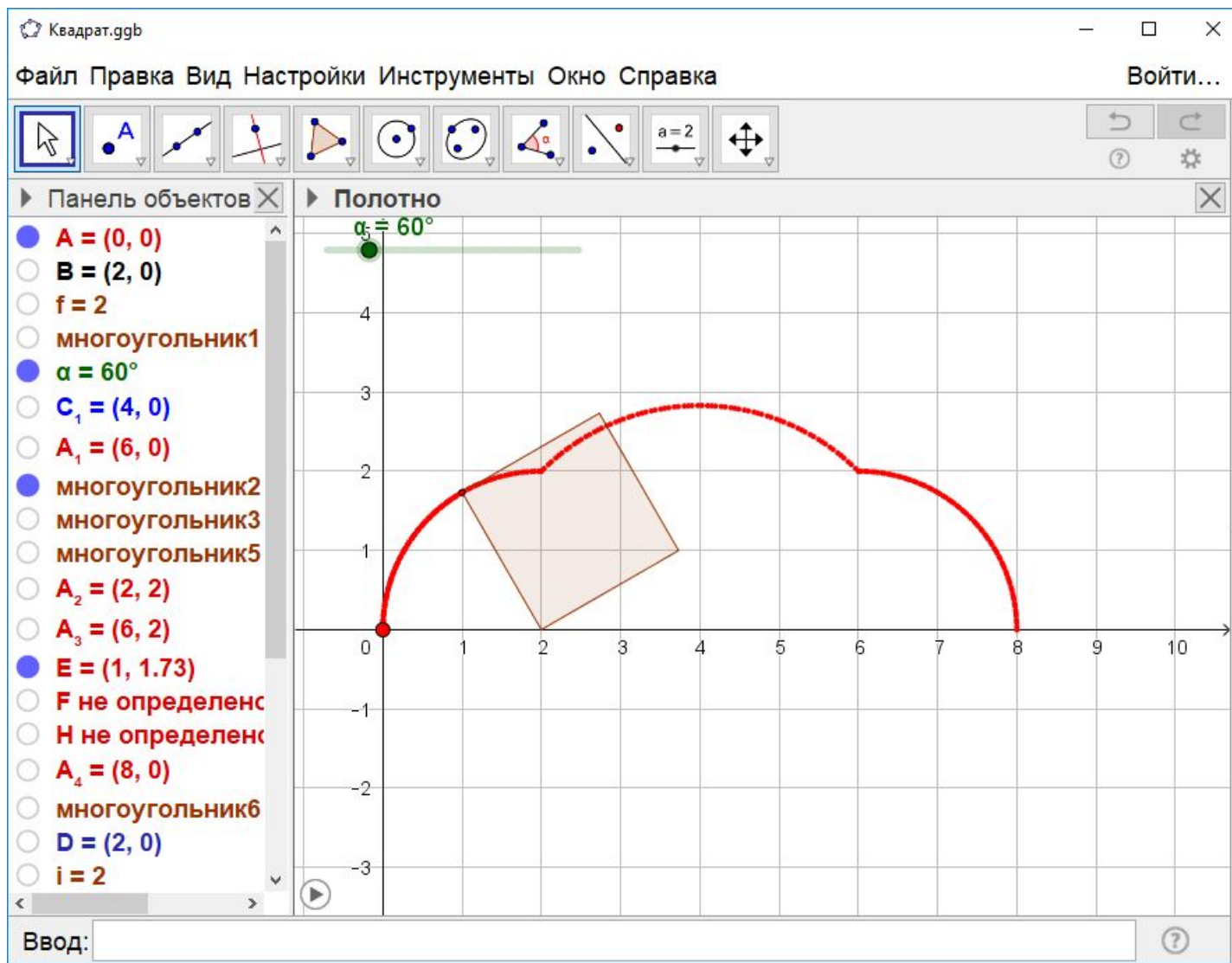
Для проведения лабораторной работы потребуется полоска прямоугольной формы шириной примерно 3 см и длиной примерно 15–20 см, вырезанная из плотного картона, и квадрат со стороной 4 см, вырезанный из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем полоску к листу бумаги. Устанавливаем квадрат на краю полоски. Поворачиваем квадрат и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

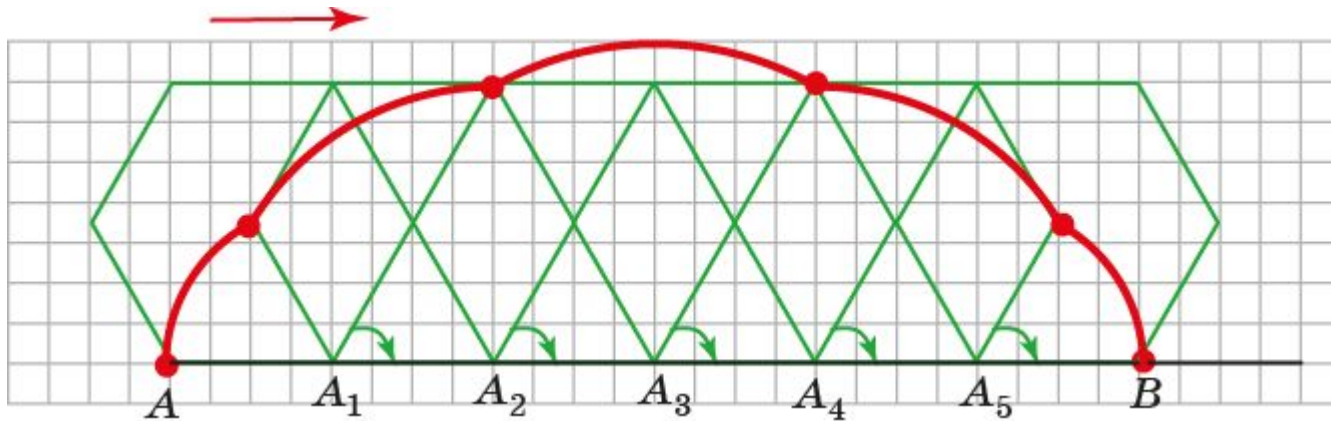
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.



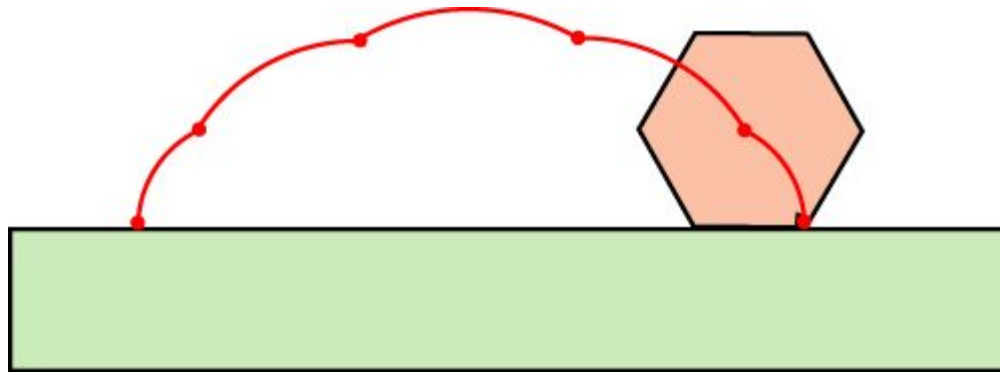
Упражнение 4

На клетчатой бумаге отложите отрезок AB величиной 24 клетки. Нарисуйте «правильный» шестиугольник со стороной, равной 4 клетки. Отметьте точку в вершине шестиугольника. Нарисуйте траекторию движения этой точки, когда шестиугольник катится по прямой.



Лабораторная работа

Для проведения лабораторной работы потребуется полоска прямоугольной формы шириной примерно 3 см и длиной примерно 15–20 см, вырезанная из плотного картона, и правильный шестиугольник со стороной 2 см, вырезанный из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем полоску к листу бумаги. Устанавливаем шестиугольник на краю полоски. Поворачиваем шестиугольник и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.

The screenshot displays the GeoGebra software interface. The window title is "Шестиугольник.ggb". The menu bar includes "Файл", "Правка", "Вид", "Настройки", "Инструменты", "Окно", and "Справка". The toolbar contains various geometric construction tools. The left sidebar shows the "Панель объектов" (Object Panel) with a list of objects:

- $A = (0, 0)$
- $B = (2, 0)$
- $f = 2$
- многоугольник1 = 10.3
- $\alpha = 77^\circ$
- $C_1 = (4, 0)$
- $A_1 = (6, 0)$
- многоугольник2 не опр
- многоугольник3 = 10.3
- многоугольник5 не опр
- $A_2 = (1, 1.73)$
- $A_3 = (4, 3.46)$
- $A_4 = (8, 0)$
- многоугольник6 не опр
- $A_5 = (10, 0)$
- многоугольник7 не опр
- $A_6 = (12, 0)$
- многоугольник8 не опр
- E не определено
- $F = (1.64, 2.53)$

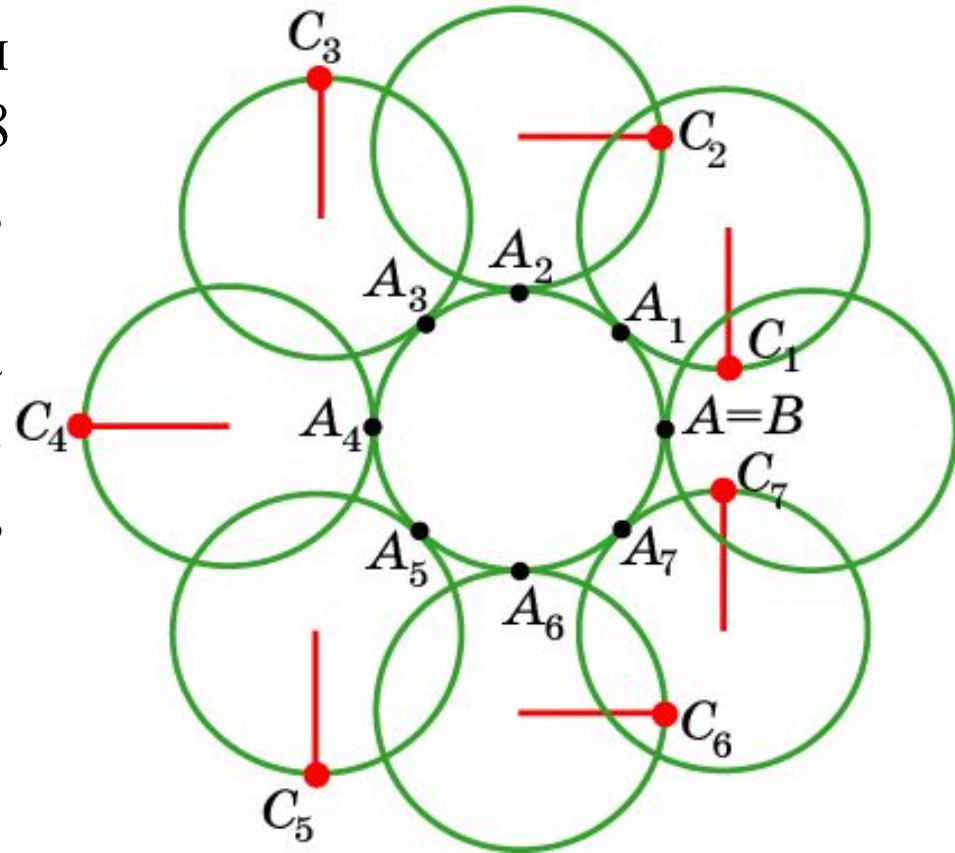
The main workspace, labeled "Полотно", shows a coordinate grid. A red dashed trajectory starts at point $A(0,0)$, moves right along the x-axis, then curves upwards and right, passing through a shaded hexagon, and finally curves downwards and right to end at point $F(1.64, 2.53)$. A green horizontal line segment is drawn above the x-axis, with a green dot at its left end and the label $\alpha = 77^\circ$ next to it. The bottom of the window features an input field labeled "Ввод:" and a help icon.

Кардиоида

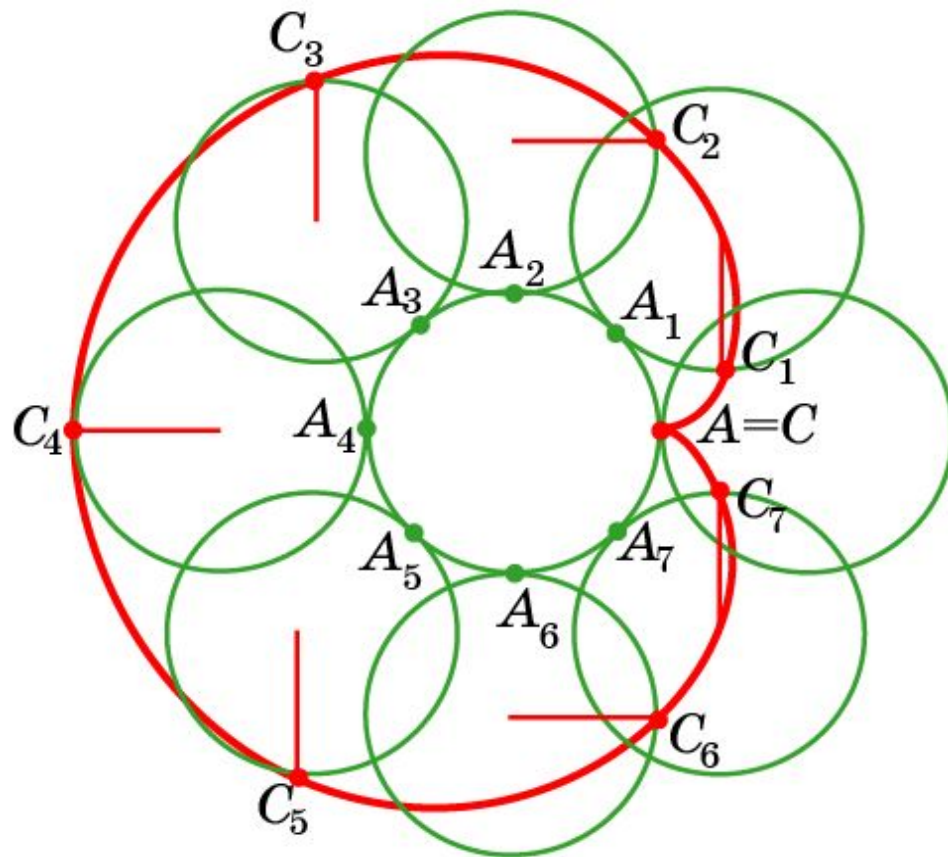
Траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется **кардиоидой**.

Для изображения кардиоиды разделим окружность на 8 равных частей точками A_1, \dots, A_7 . Выясните, где будет находиться отмеченная точка A , когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 .

Ответ: а) запад; б) восток;
в) восток; г) юг; д) север;
е) юг; ж) север.

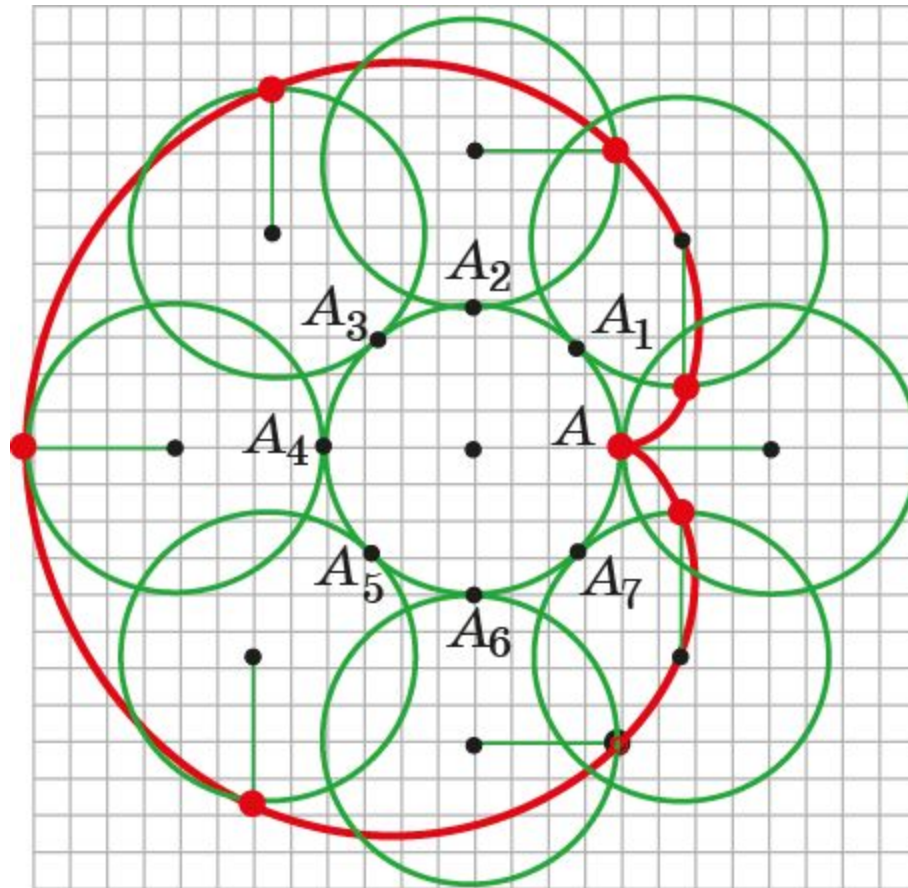


Соединяя плавной кривой построенные точки, получим **кардиоиду**.



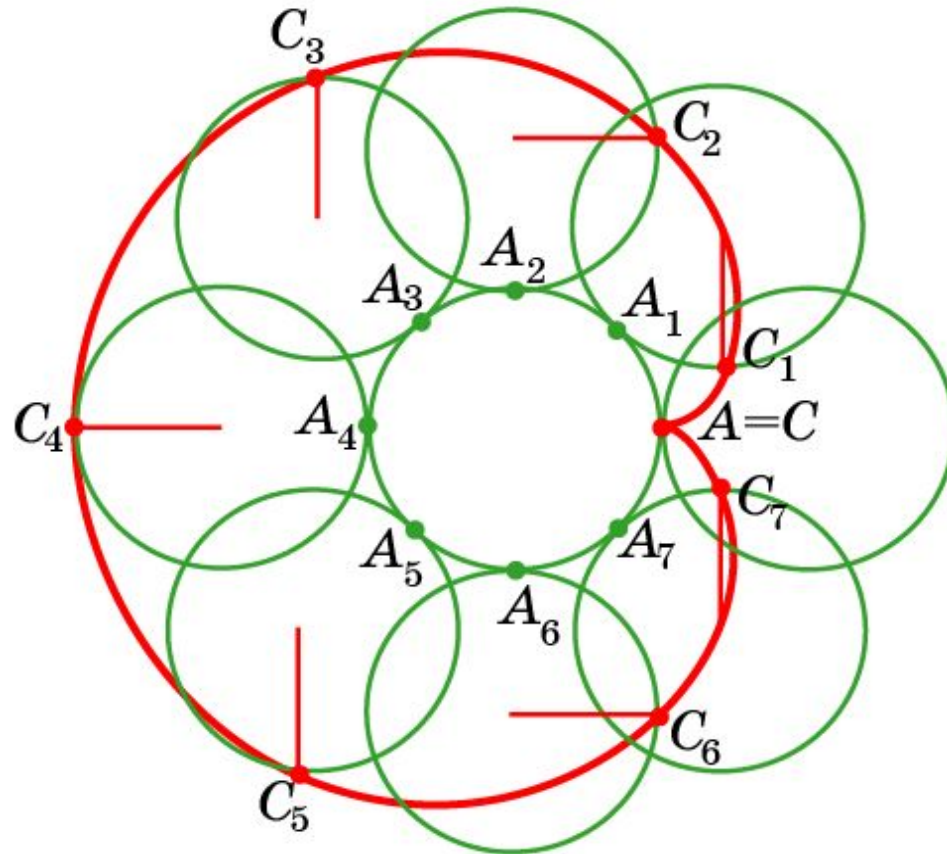
Упражнение

На клетчатой бумаге нарисуйте две окружности радиуса 4 клетки. Разделите одну окружность на 8 равных частей. Отметьте точку на другой окружности. Проведите построение кардиоиды.



Упражнение

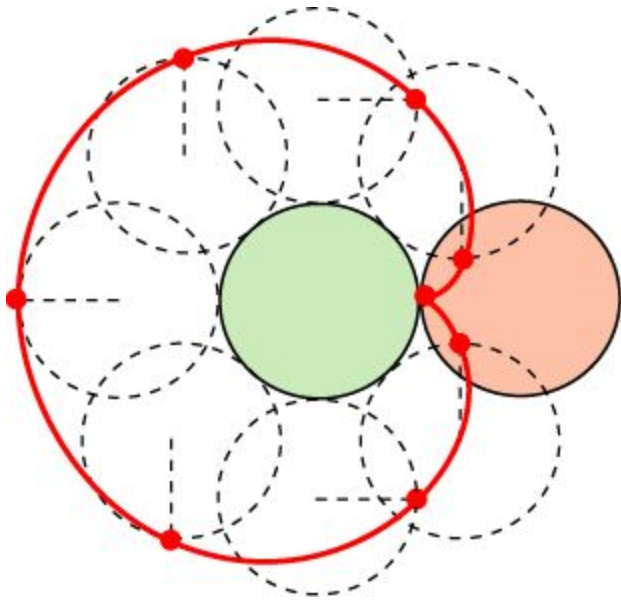
Имеет ли кардиоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?



Ответ: а) да; б) нет.

Лабораторная работа 1

Для проведения лабораторной работы потребуются два круга одинаковых радиусов примерно по 3 см, вырезанные из плотного картона, на краю одного из которых вырезан небольшой уголок.



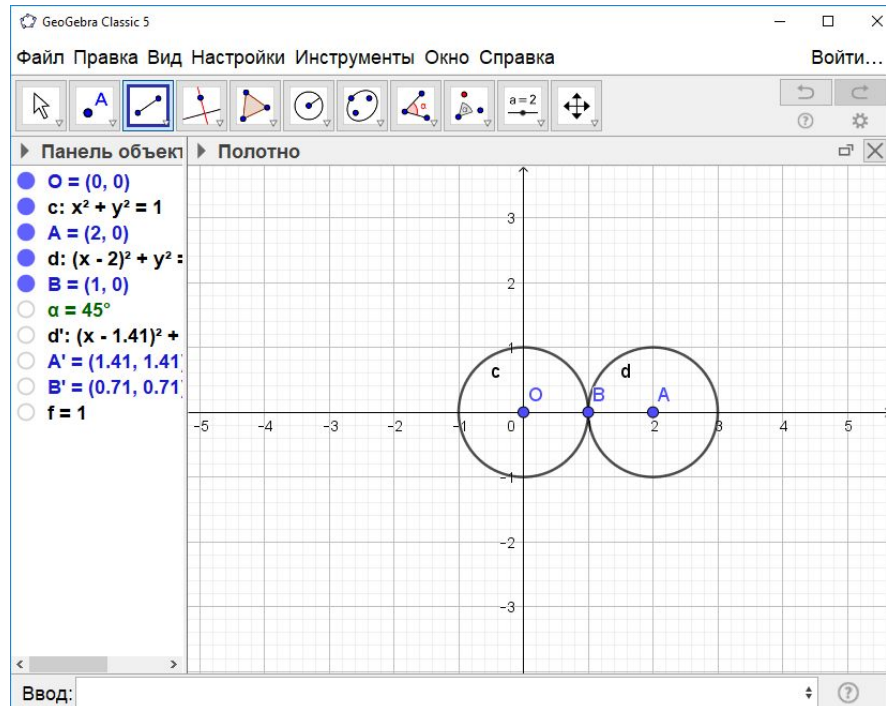
Приклеиваем целый круг к листу бумаги. Устанавливаем круг с вырезанным уголком так, чтобы вырезанный уголок касался закрепленного круга. Катим круг с вырезанным уголком по закрепленному кругу и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя отмеченные точки плавной кривой, получаем искомую траекторию.

Лабораторная работа 2

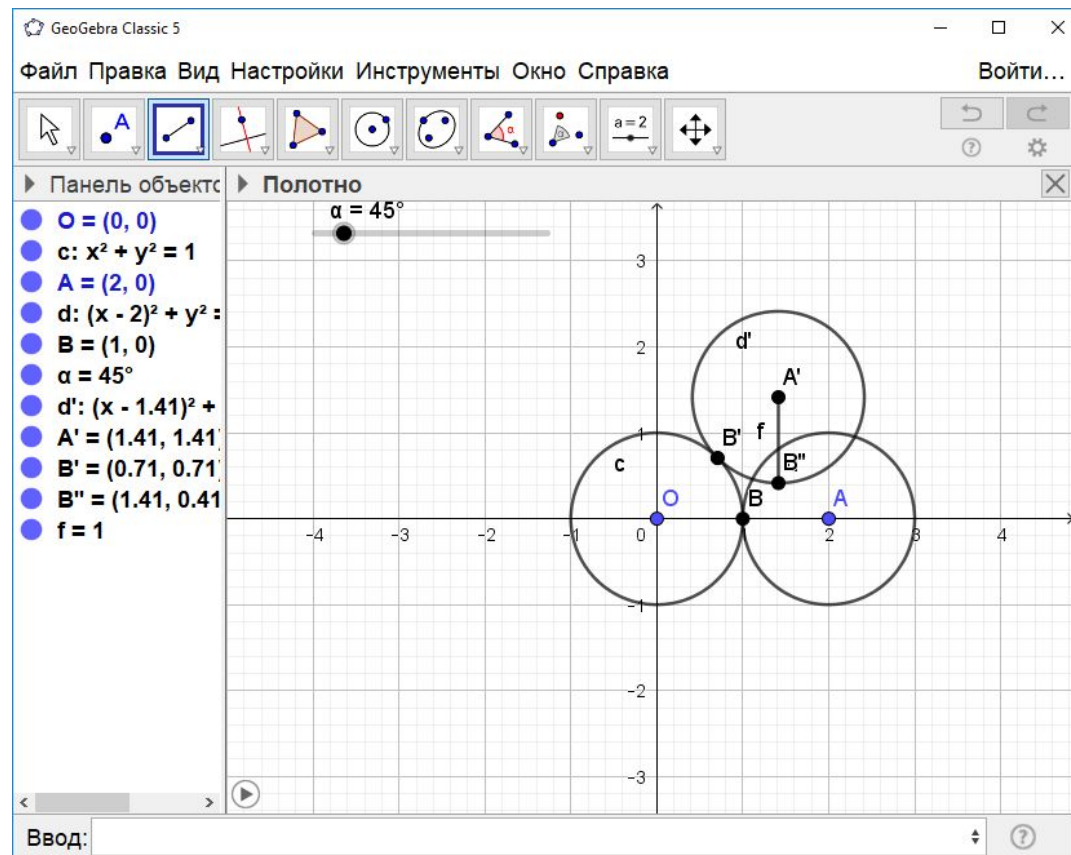
Для получения кардиоиды можно воспользоваться программой GeoGebra. Для этого в строке «Ввод» наберём: $O = (0,0)$ и нажмём “Enter”. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» создадим окружность с центром O и радиусом 1.

В строке «Ввод» наберём: $A = (2,0)$ и нажмём “Enter”. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» создадим окружность с центром A и радиусом 1.

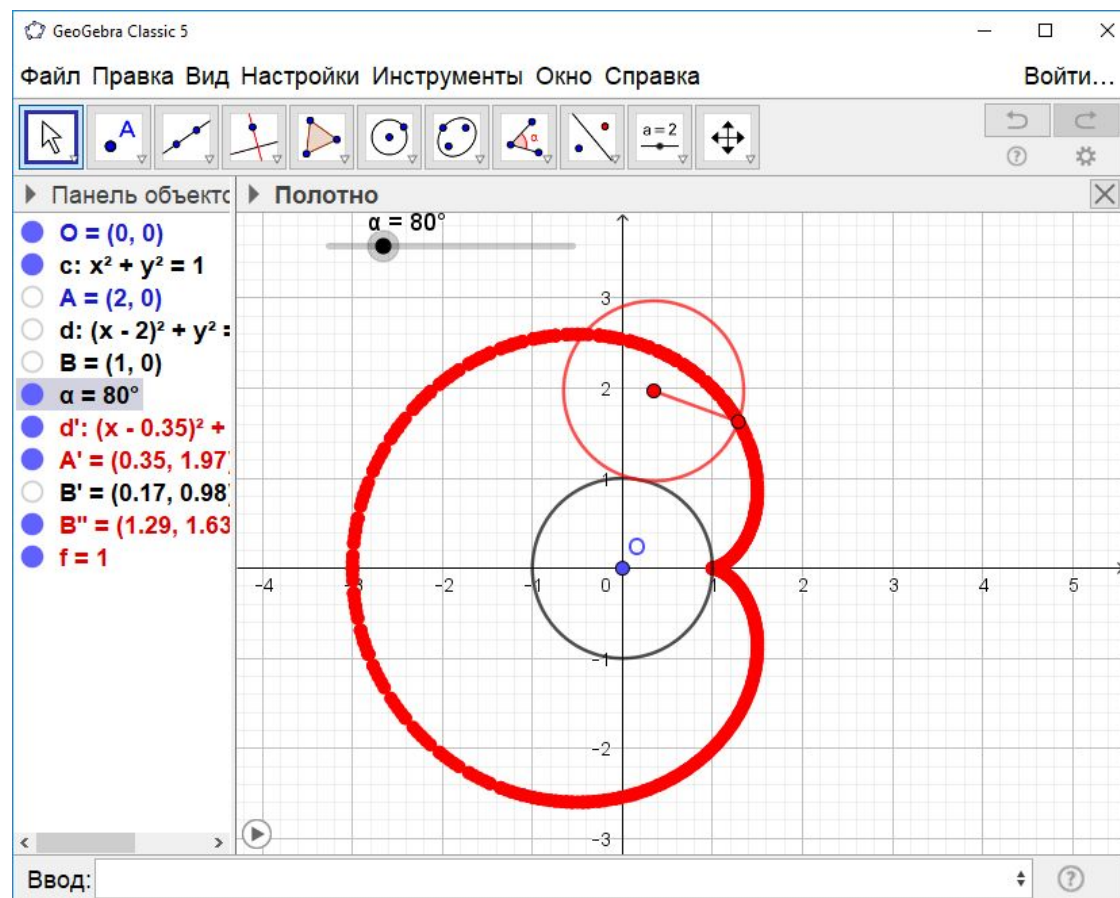
В строке «Ввод» наберём: $B = (1,0)$ и нажмём “Enter”.



Создадим ползунок α , изменяющийся от 0° до 360° . С помощью инструмента «Поворот вокруг точки» повернём окружность с центром A вокруг точки O на угол α против часовой стрелки. То же самое сделаем с точками A и B . Повернём точку B' вокруг точки A' на угол α против часовой стрелки. Соединим отрезком полученные точки A' и B' .



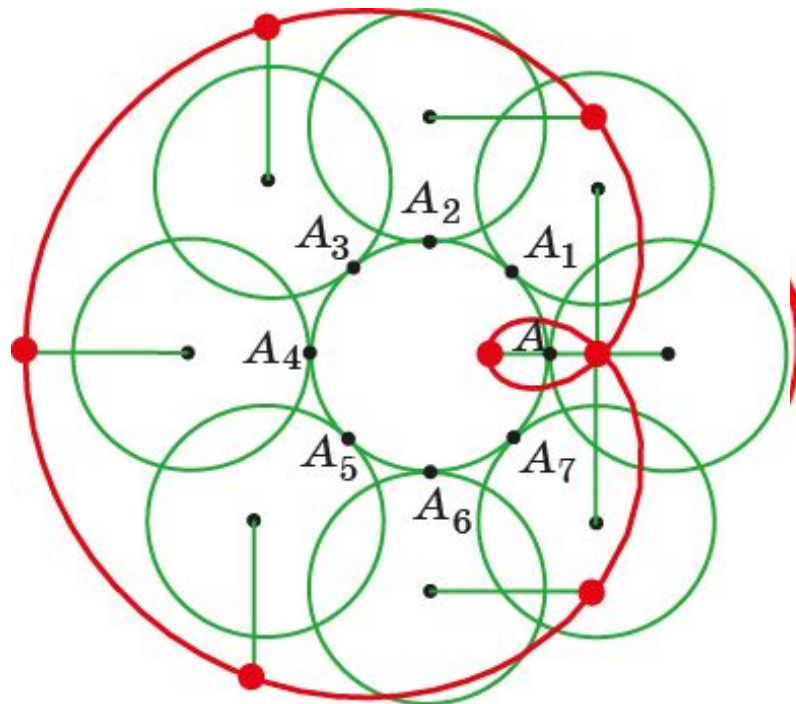
Уберём лишние фигуры, изменим цвет. Кликнем правой кнопкой «мыши» по точке В'', и выберем строку «Оставлять след». Кликнем правой кнопкой «мыши» по ползунку и выберем строку «Анимировать». В результате окружность будет катиться по окружности, а закреплённая точка будет описывать кардиоиду.



Удлинённая кардиоида

Траектория движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса, называется **удлинённой кардиоидой**.

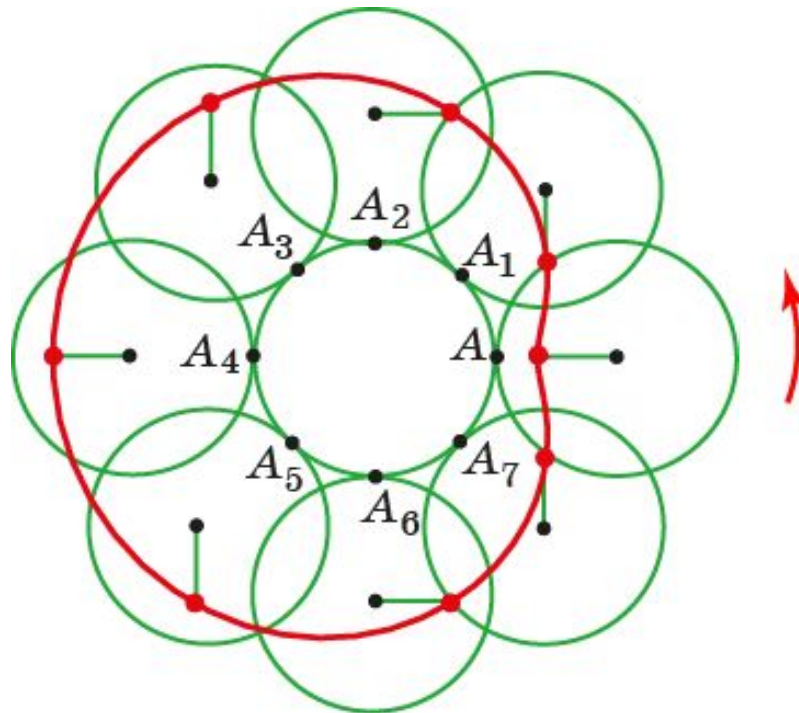
Пусть точка закреплена на продолжении радиуса окружности, находящейся в положении A . Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 . Соедините полученные точки плавной кривой.



Укороченная кардиоида

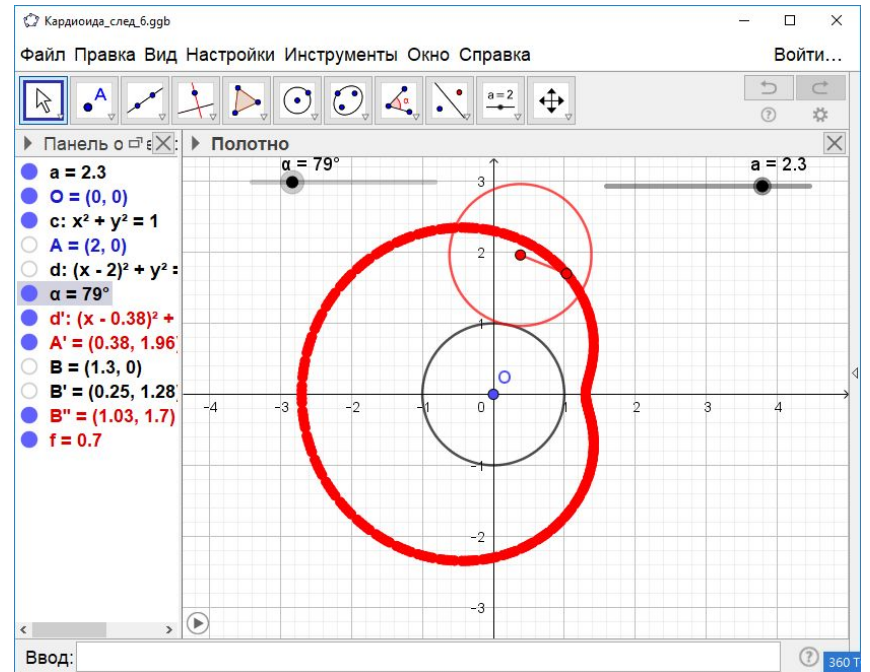
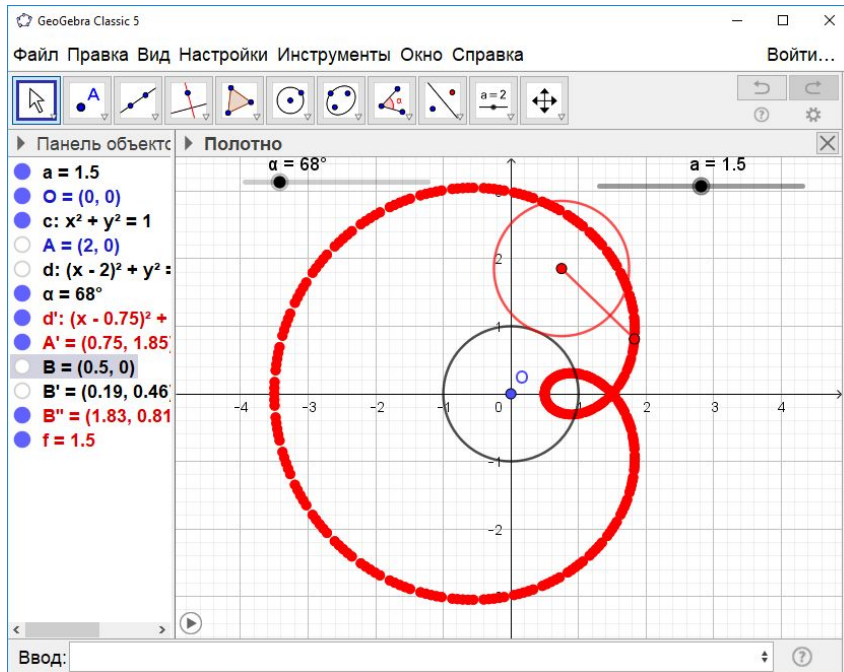
Траектория движения точки, закреплённой на радиусе внутри окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса, называется **укороченной кардиоидой**.

Пусть точка закреплена на радиусе окружности, находящейся в положении A . Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 . Соедините полученные точки плавной кривой.



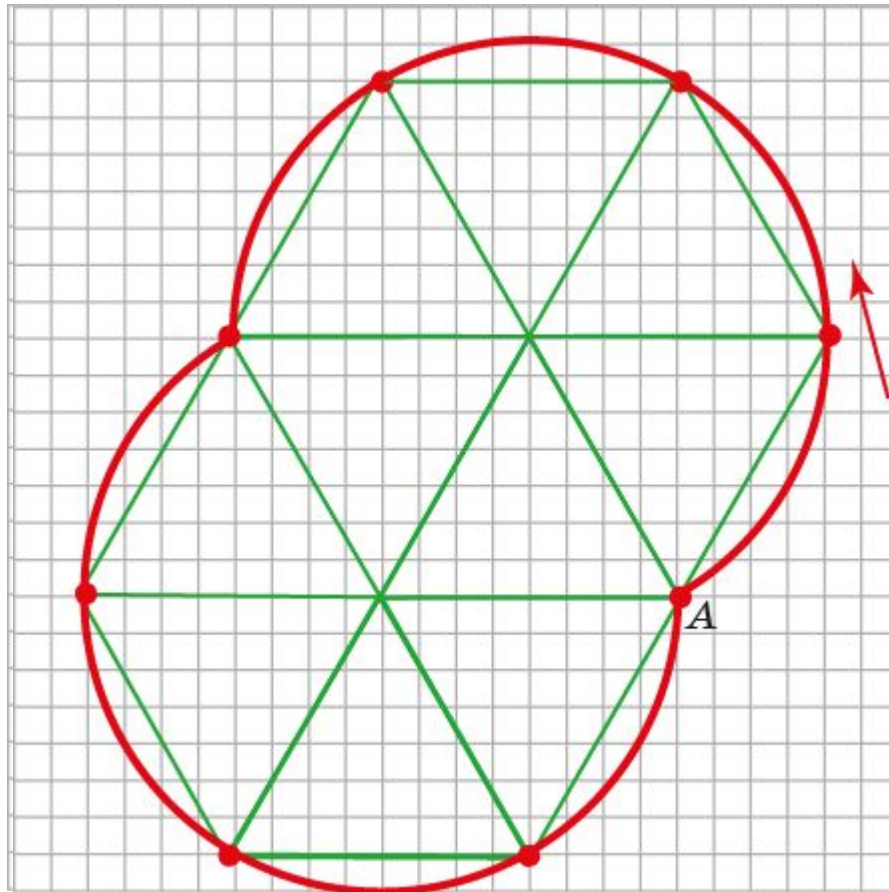
Лабораторная работа

Для получения удлинённой и укороченной кардиоиды можно воспользоваться ранее полученной кардиодой в программе GeoGebra. Для этого создадим ещё один ползунок a , изменяющийся, например, от 1 до 3. Изменим координаты точки B , поставив $(|a-1|, 0)$. В случае $1 < a < 2$ получим удлинённую кардиоиду. В случае $2 < a < 3$ получим укороченную кардиоиду.



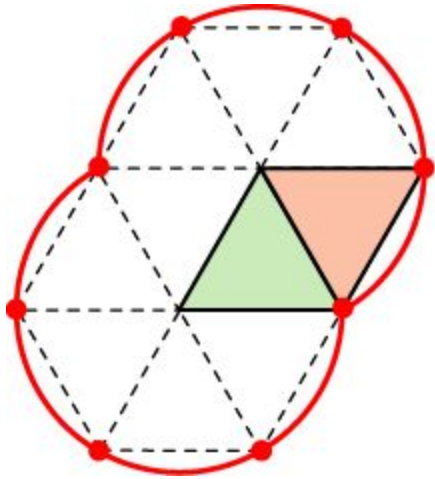
Упражнение

На клетчатой бумаге нарисуйте два «правильных» треугольника с общей стороной 8 клеток. Отметьте точку в вершине одного из них. Нарисуйте траекторию движения точки, когда один треугольник катится по другому.



Лабораторная работа 1

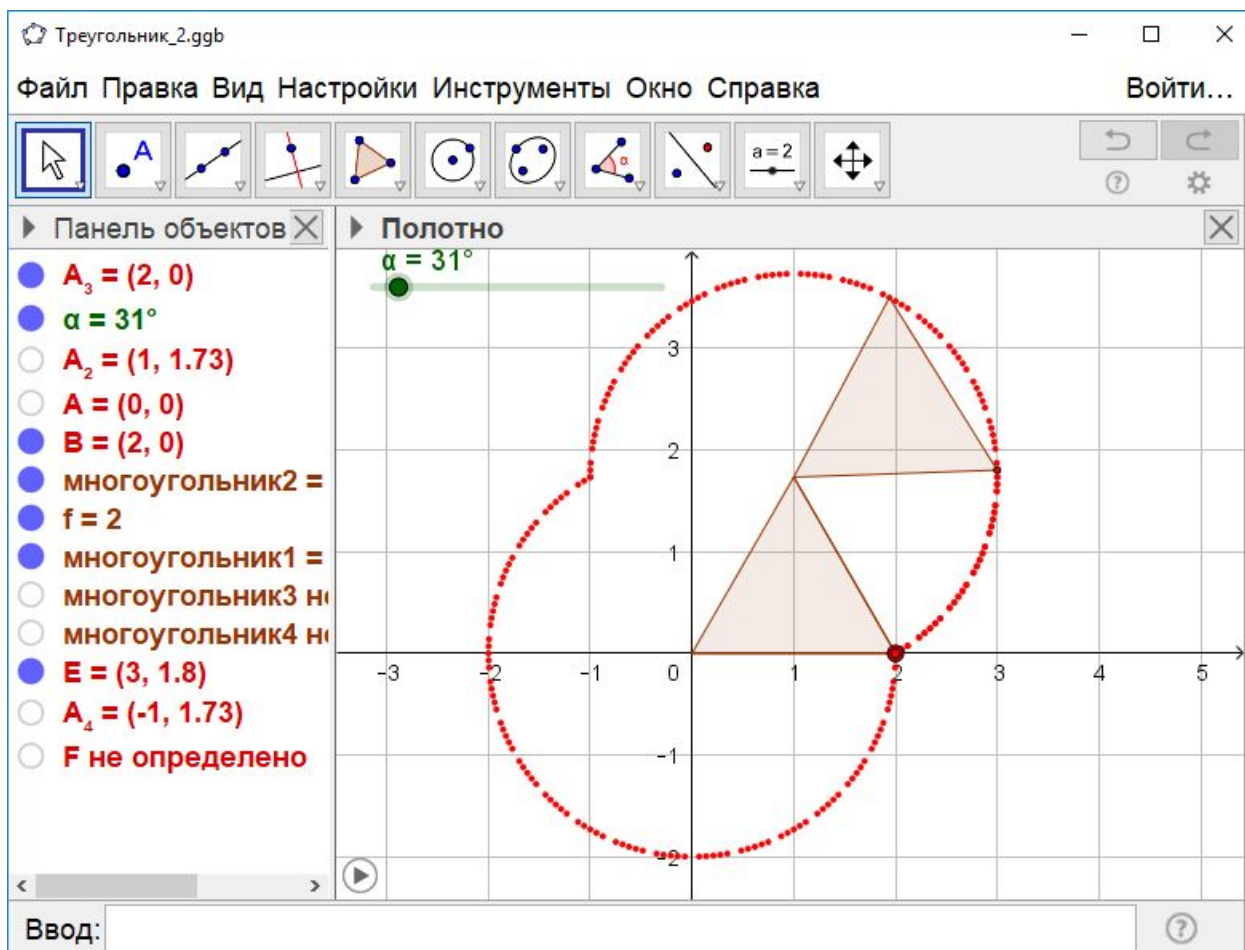
Для проведения лабораторной работы потребуется два правильных треугольника со стороной примерно 4 см, вырезанные из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем целый треугольник к листу бумаги. Устанавливаем треугольник с вырезанным уголком так, чтобы сторона с вырезанным уголком треугольника касалась стороны закреплённого треугольника. Поворачиваем треугольник с вырезанным уголком вокруг закреплённого треугольника и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

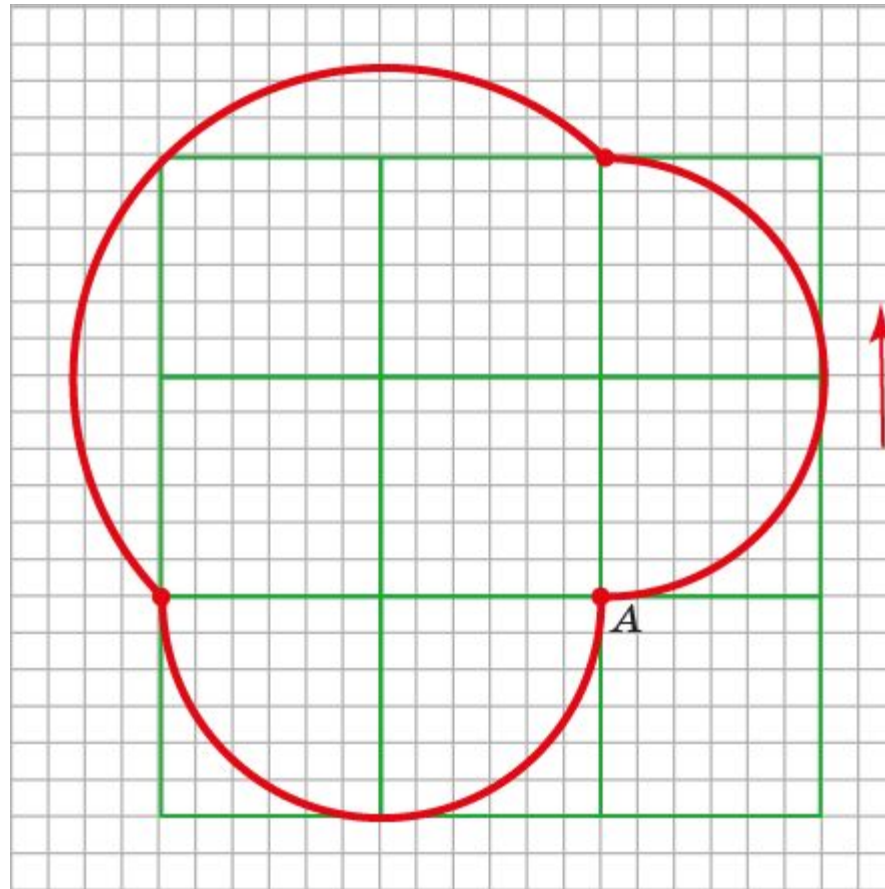
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.



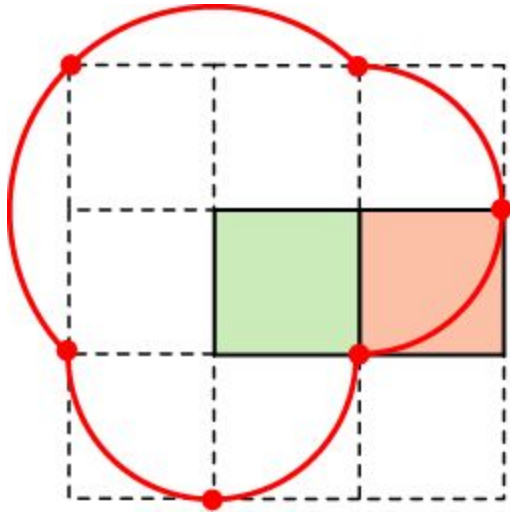
Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата, катящегося с внешней стороны по другому квадрату.



Лабораторная работа 1

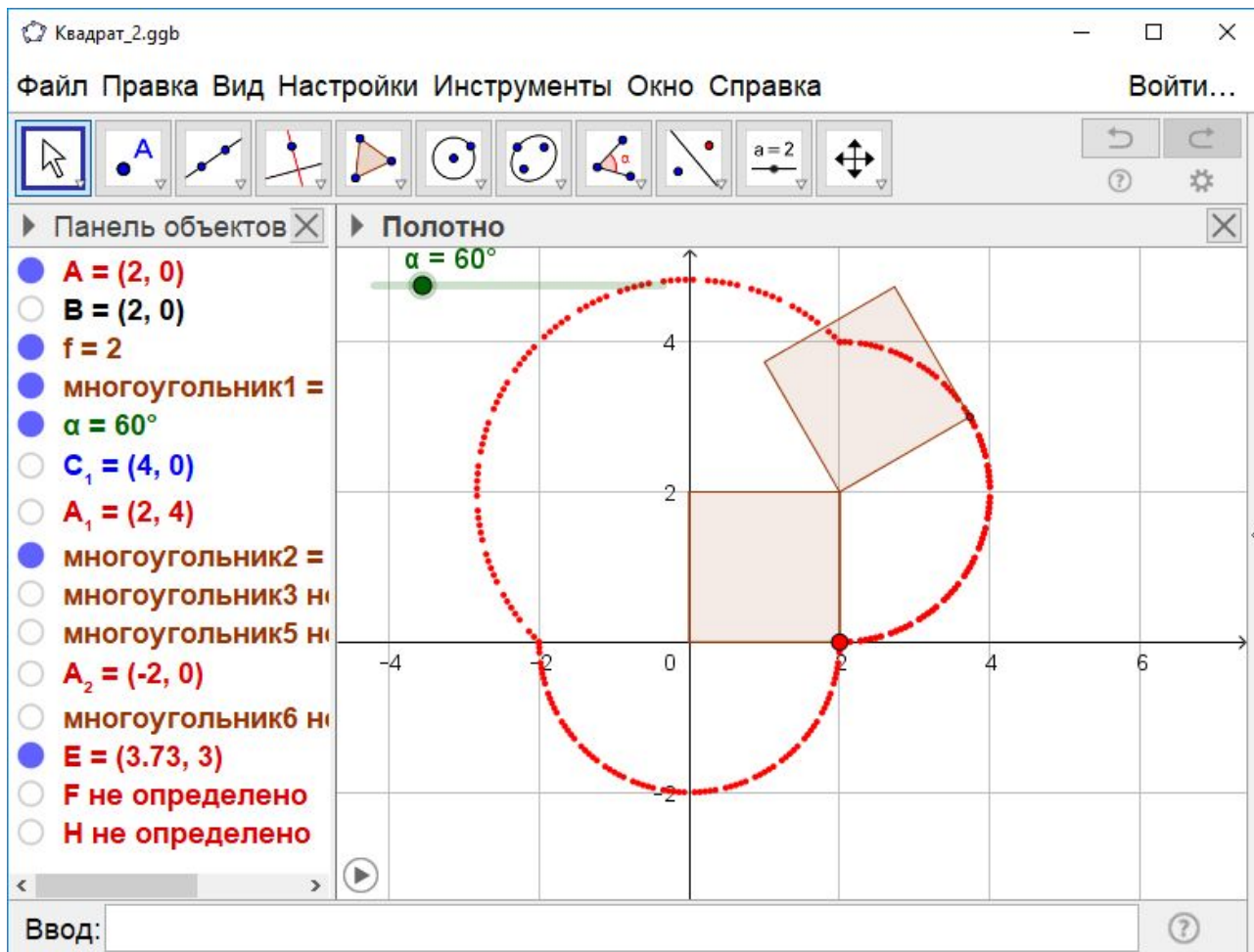
Для проведения лабораторной работы потребуется два квадрата со стороной примерно 4 см, вырезанные из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем целый квадрат к листу бумаги. Устанавливаем квадрат с вырезанным уголком так, чтобы сторона с вырезанным уголком касалась стороны закреплённого квадрата. Поворачиваем квадрат с вырезанным уголком вокруг закреплённого квадрата и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

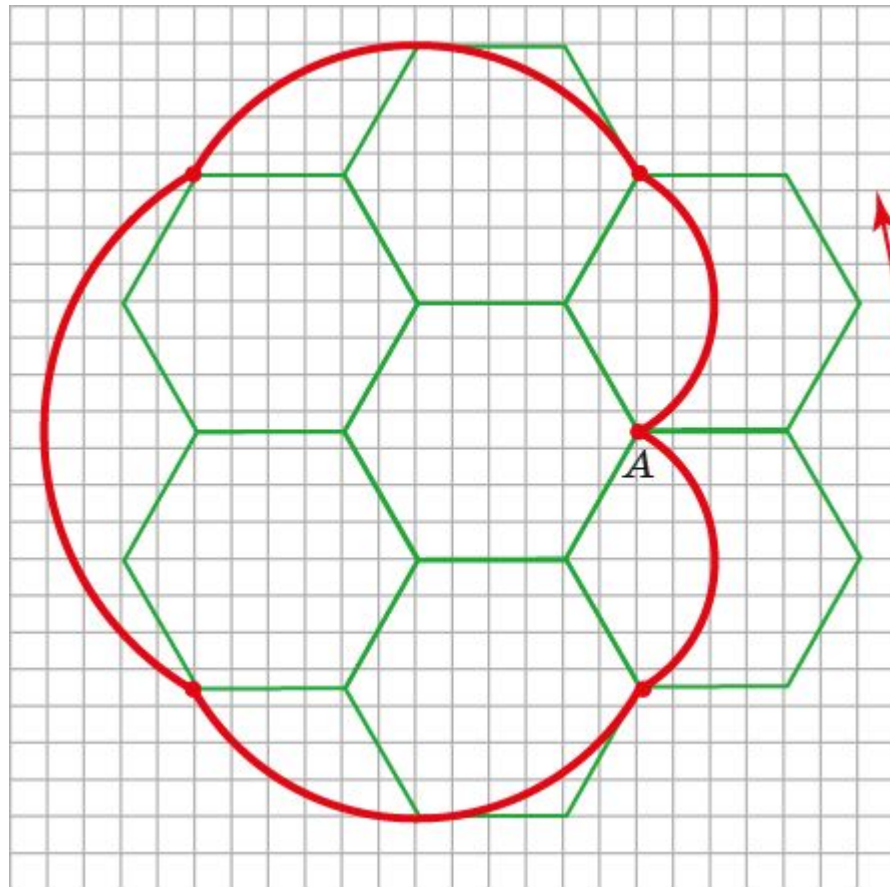
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.



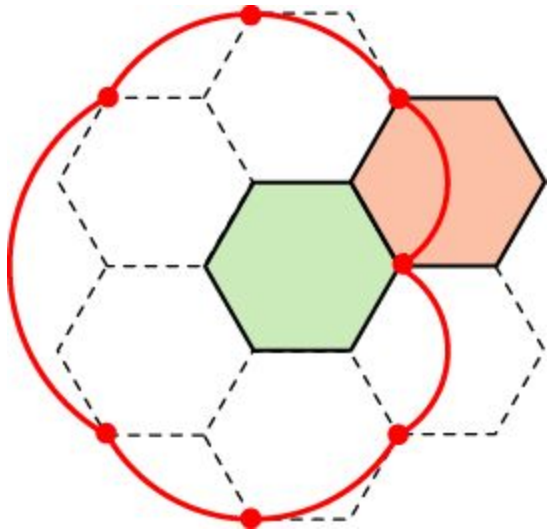
Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины «правильного» шестиугольника, катящегося с внешней стороны по другому «правильному» шестиугольнику.



Лабораторная работа 1

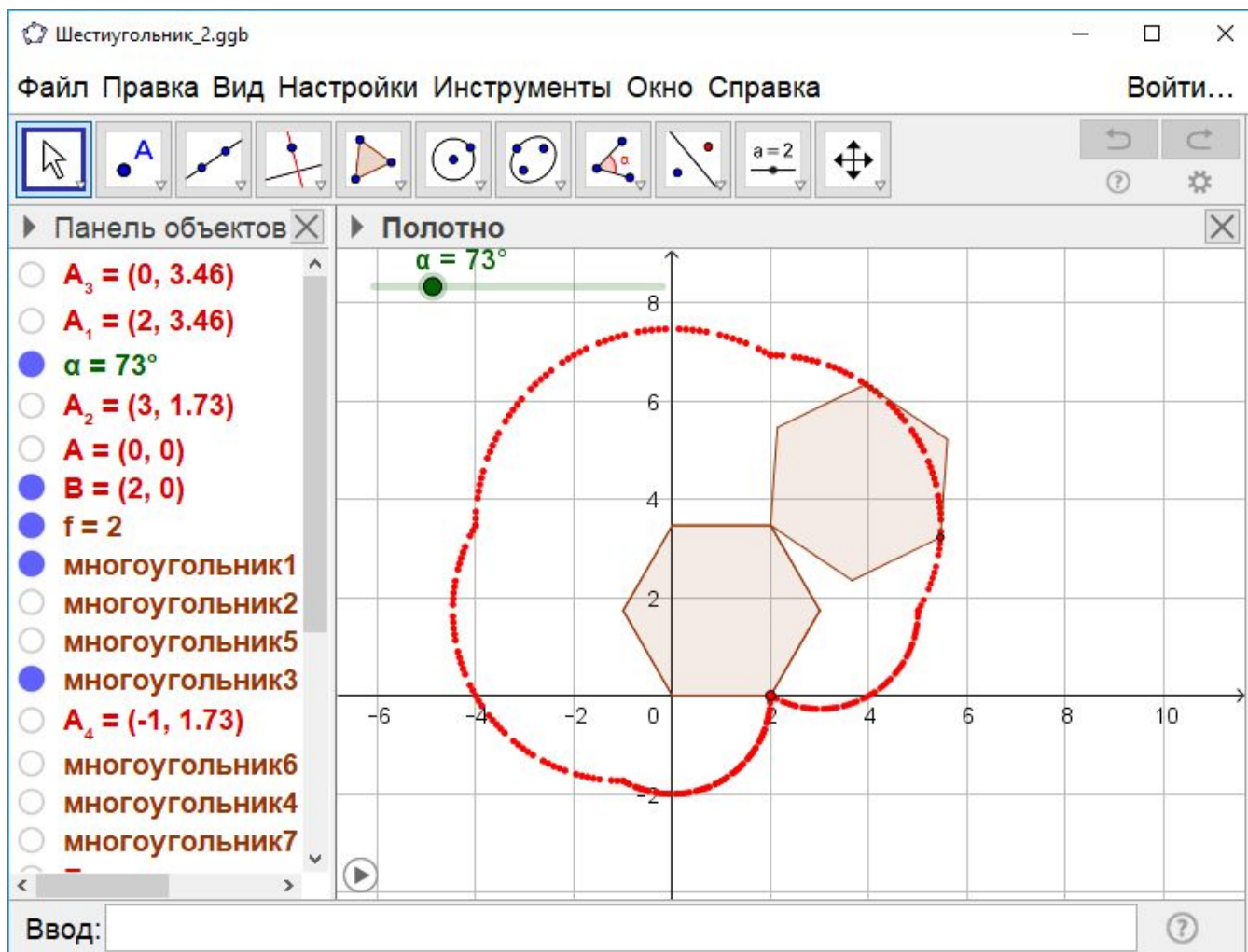
Для проведения лабораторной работы потребуется два правильных шестиугольника со стороной примерно 2 см, вырезанные из плотного картона, на одном углу которого вырезан небольшой уголок.



Приклеиваем целый шестиугольник к листу бумаги. Устанавливаем шестиугольник с вырезанным уголком так, чтобы сторона с вырезанным уголком касалась стороны закреплённого шестиугольника. Поворачиваем шестиугольник с вырезанным уголком вокруг закреплённого шестиугольника и отмечаем карандашом положения вырезанного уголка. Соединяя дугами окружностей отмеченные точки, получаем искомую траекторию.

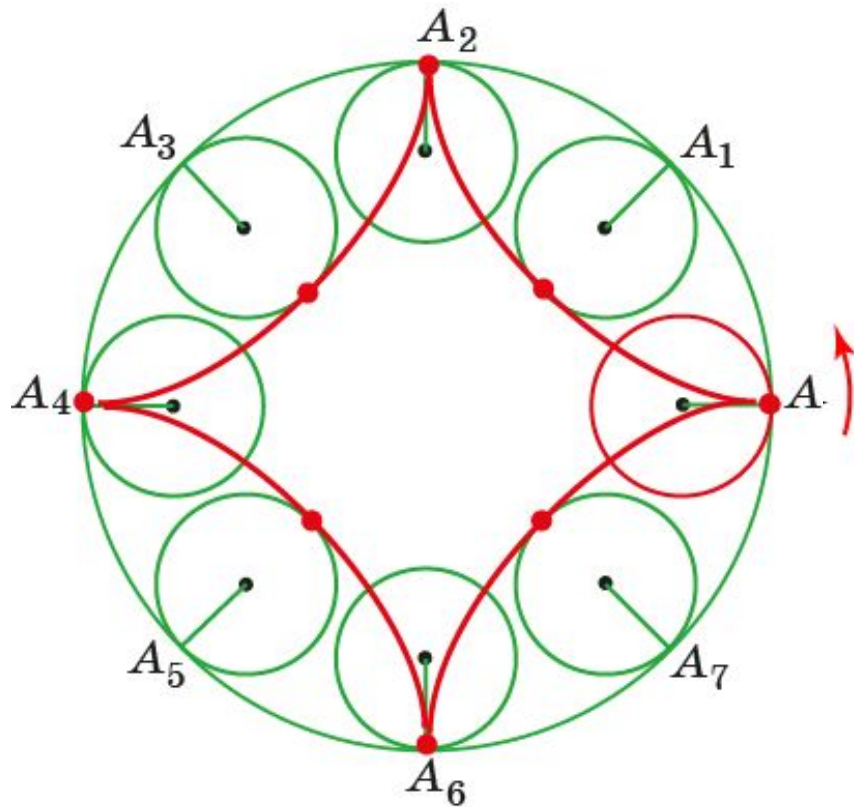
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra.



Астроида

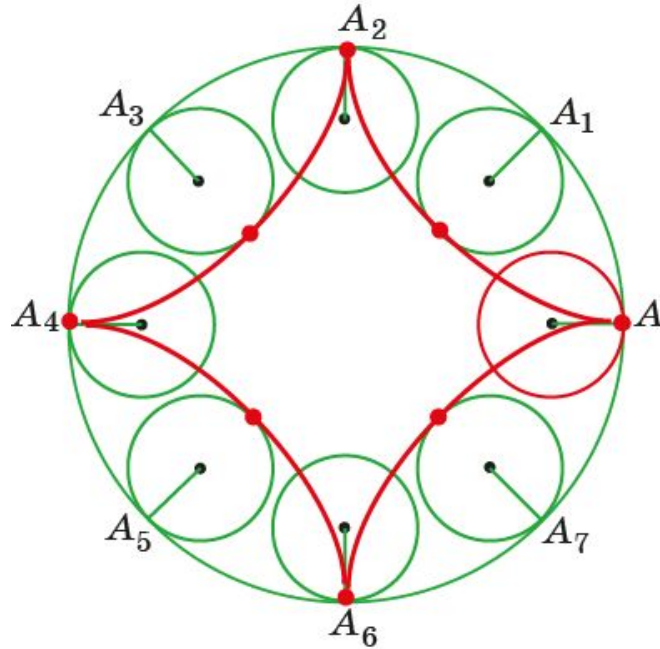
Траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся внутри другой окружности в 4 раза большего радиуса, называется **астроидой**.



Для изображения астроиды разделим окружность на 8 равных частей точками A_1, \dots, A_7 . Отметим положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 . (Для указания положения точки используйте направления: восток, запад, север, юг, северо-восток, северо-запад, юго-восток, юго-запад. Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 4 раза меньше длины большой окружности.)

Упражнение

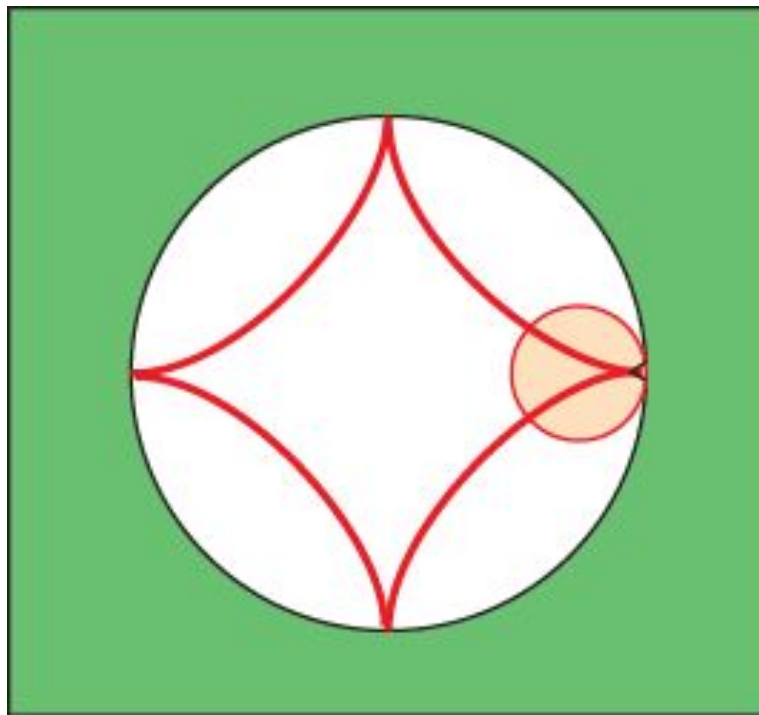
Имеет ли астроида: а) оси симметрии;
б) центр симметрии?



Ответ: а) да; б) да.

Лабораторная работа 1

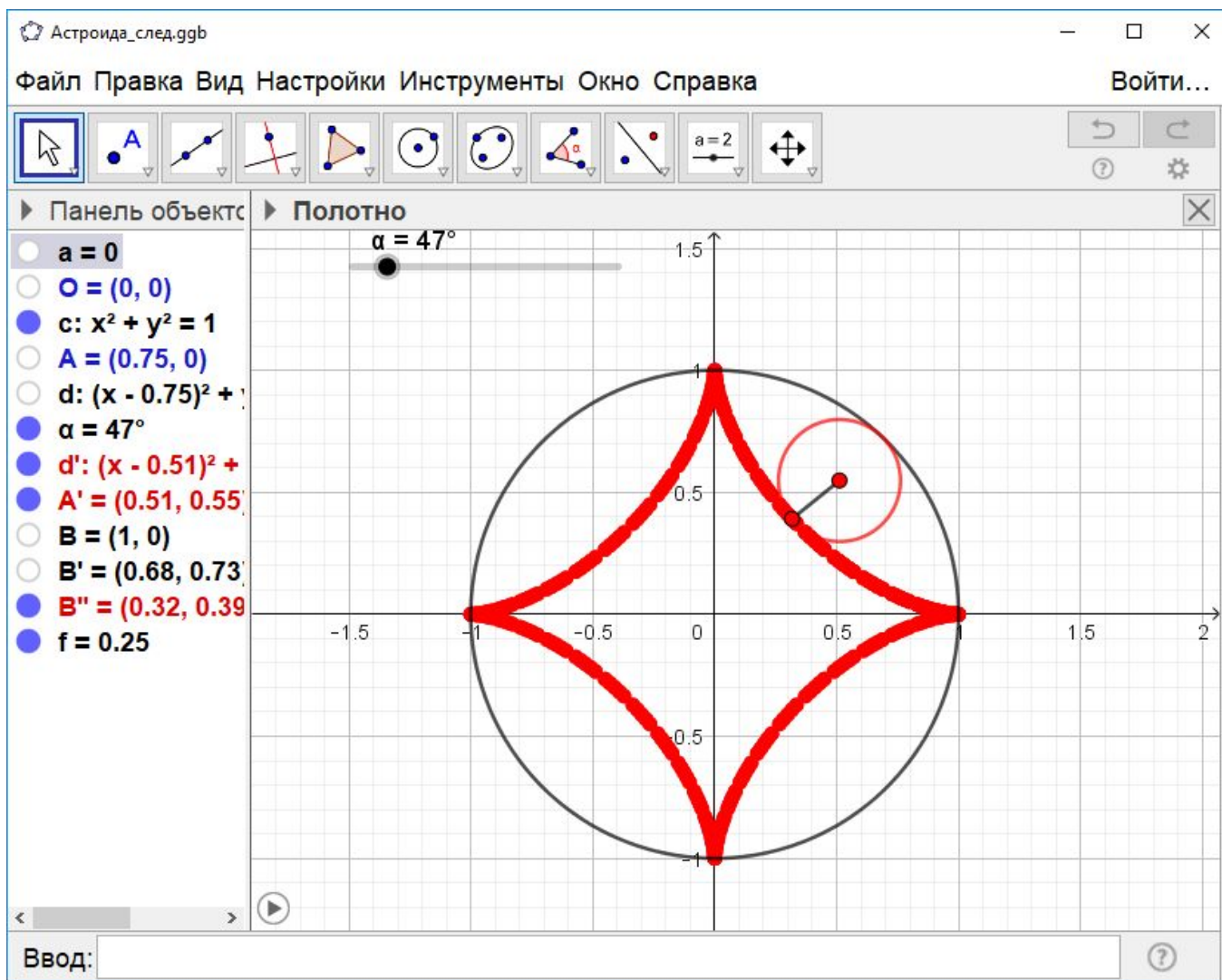
Для проведения лабораторной работы потребуется прямоугольник из плотного картона с вырезанным кругом и маленький круг с вырезанным уголком, в который можно поставить острие карандаша.



Катим маленький круг по краю вырезанного большого круга, и удерживаем карандаш в вырезанном уголке. В результате получим кардиоиду.

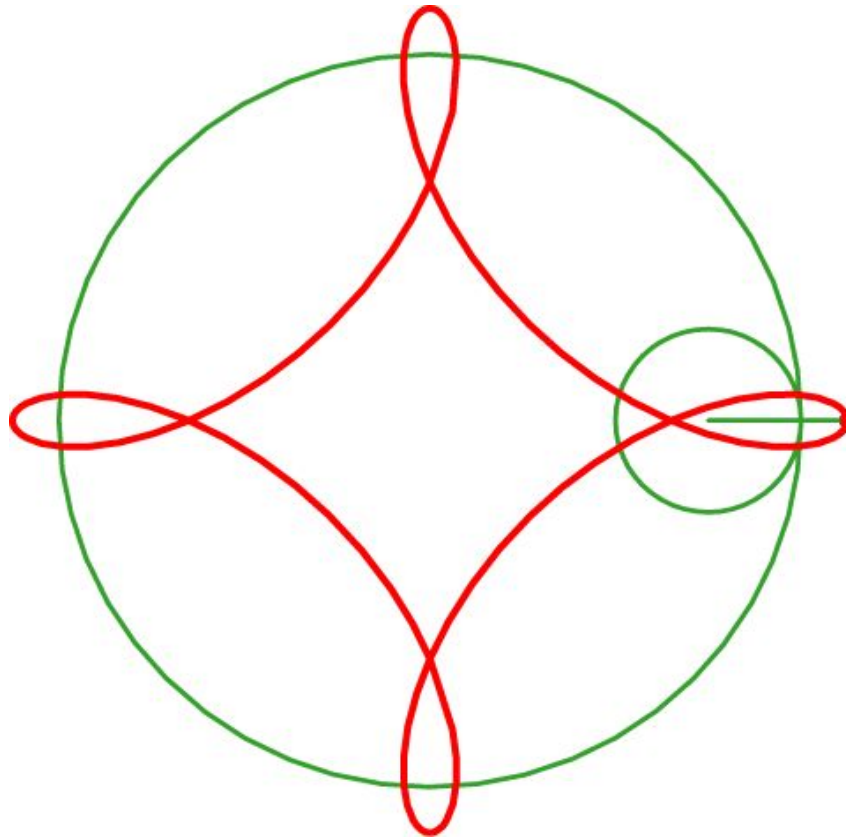
Лабораторная работа 2

Для получения траектории можно воспользоваться программой GeoGebra, аналогично тому, как была получена кардиоида.

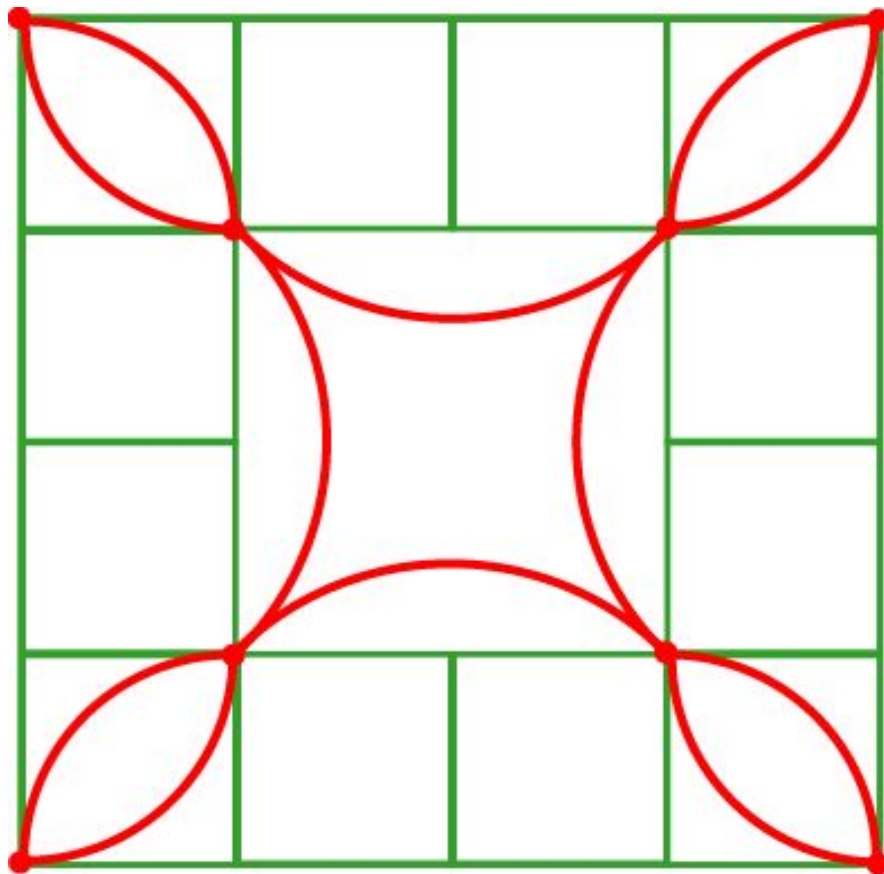


Упражнения

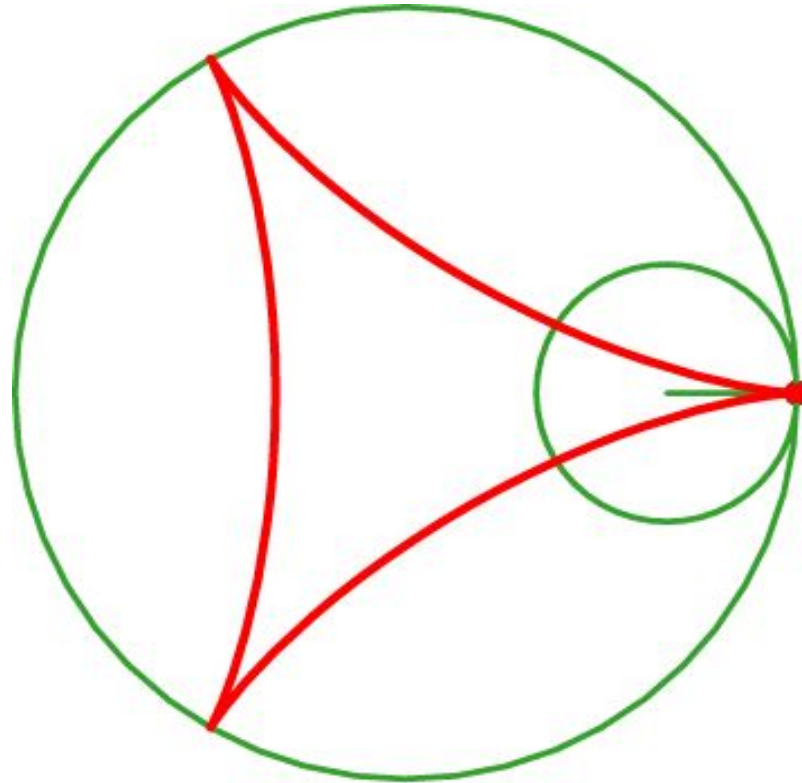
1. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся внутри другой окружности в 4 раза большего радиуса. Она называется **удлинённой астроидой**.



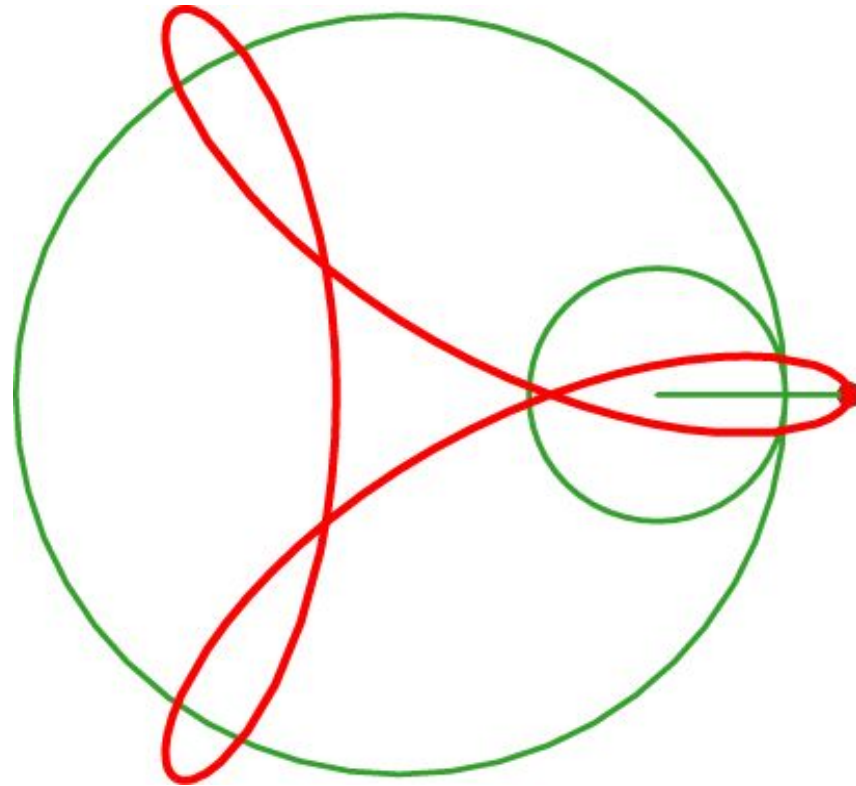
2. Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата со стороной 1, катящегося с внутренней стороны по другому квадрату со стороной 4.



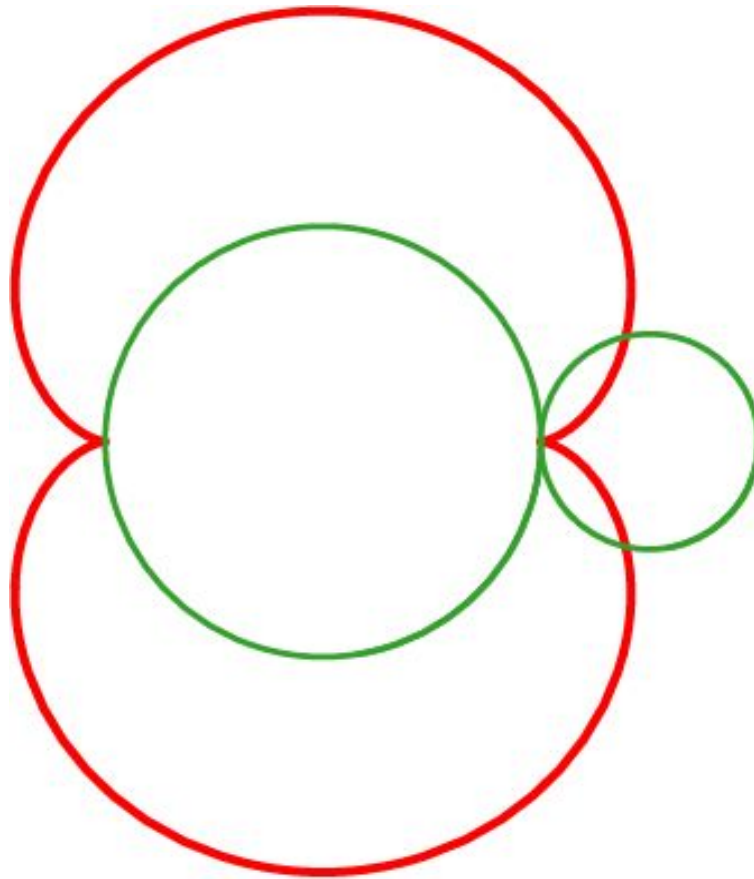
3. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на окружности, катящейся внутри другой окружности в 3 раза большего радиуса. Она называется **кривой Штейнера**.



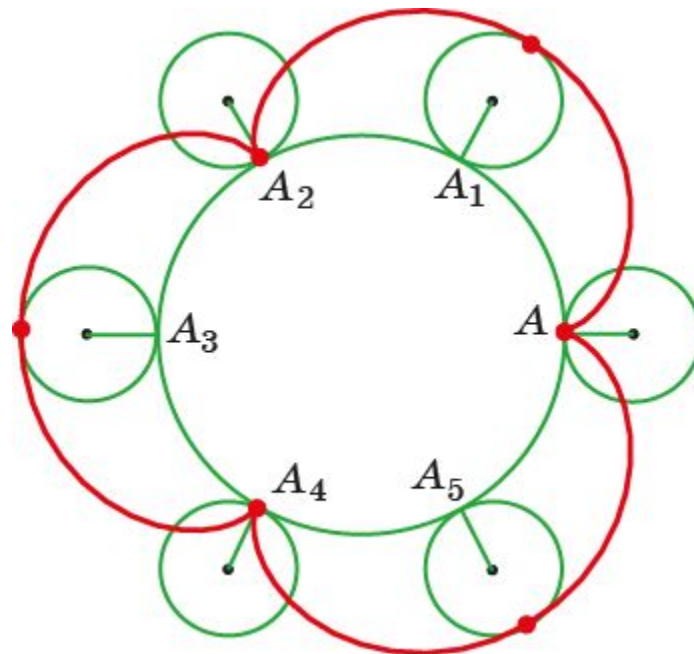
4. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся внутри другой окружности в 3 раза большего радиуса. Она называется **удлинённой кривой Штейнера**.



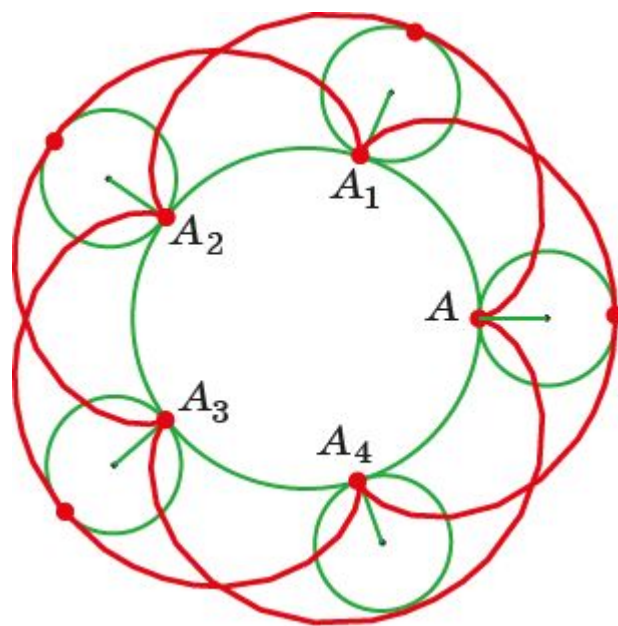
5. Нарисуйте траекторию движения точки, закреплённой на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности, если отношение радиусов равно 1:2.



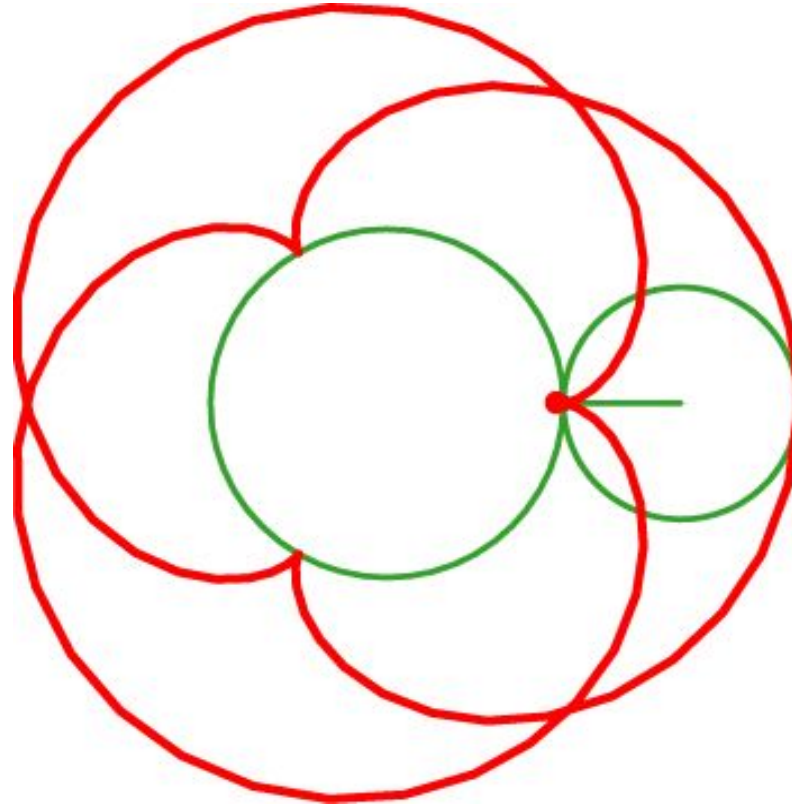
6. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности, в 3 раза большего радиуса. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 3 раза меньше длины большой окружности.)



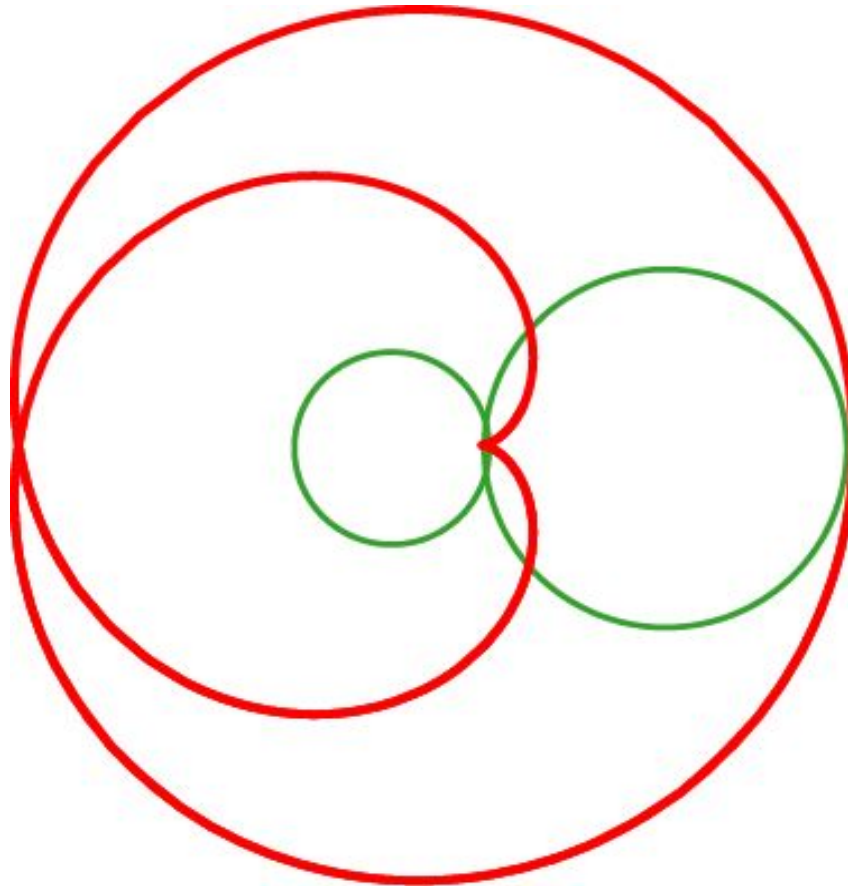
7. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности, в 2,5 раза большего радиуса. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 2,5 раза меньше длины большой окружности.)



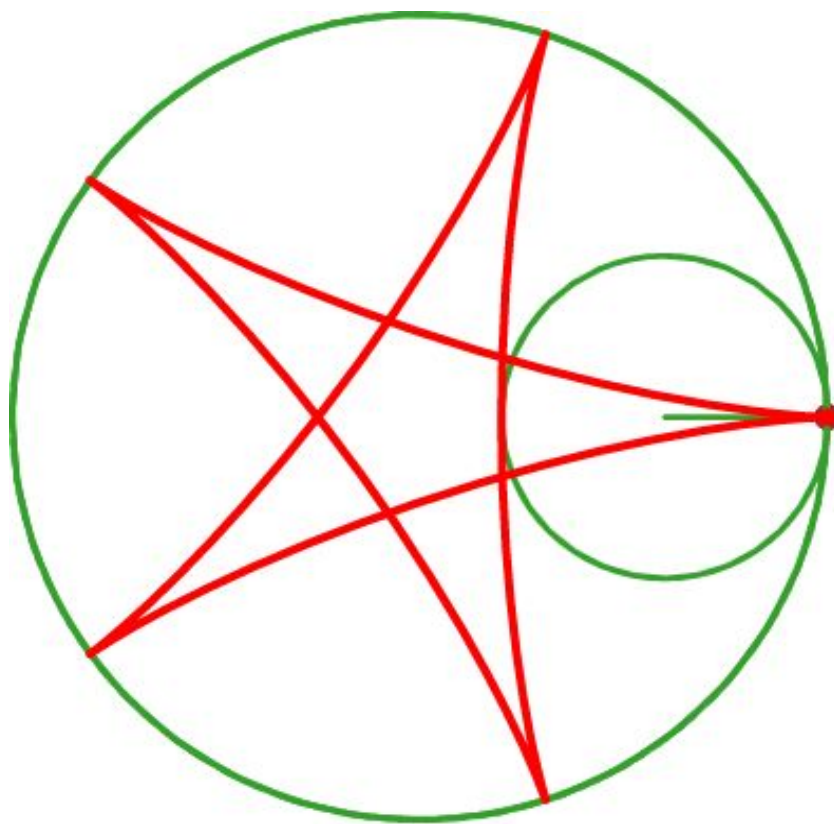
8. Нарисуйте кривую, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности, в 1,5 раза большего радиуса.



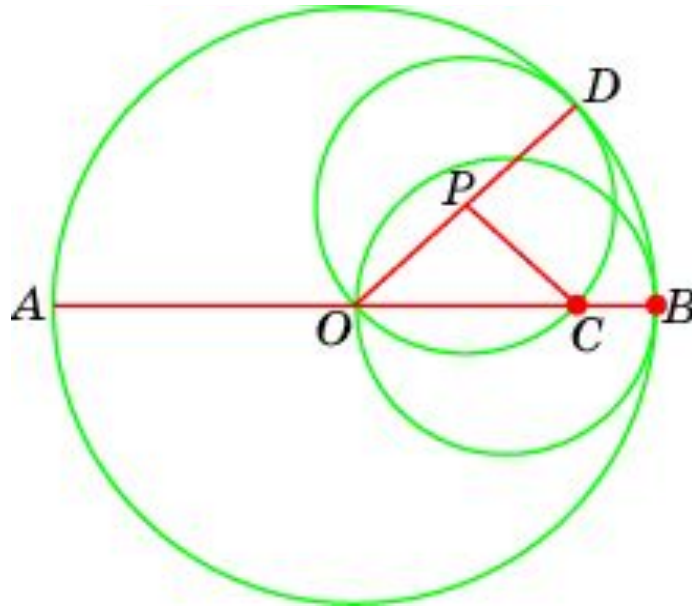
9. Нарисуйте траекторию движения точки, закреплённой на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности, если отношение радиусов равно 2:1.



10. Нарисуйте кривую, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса.

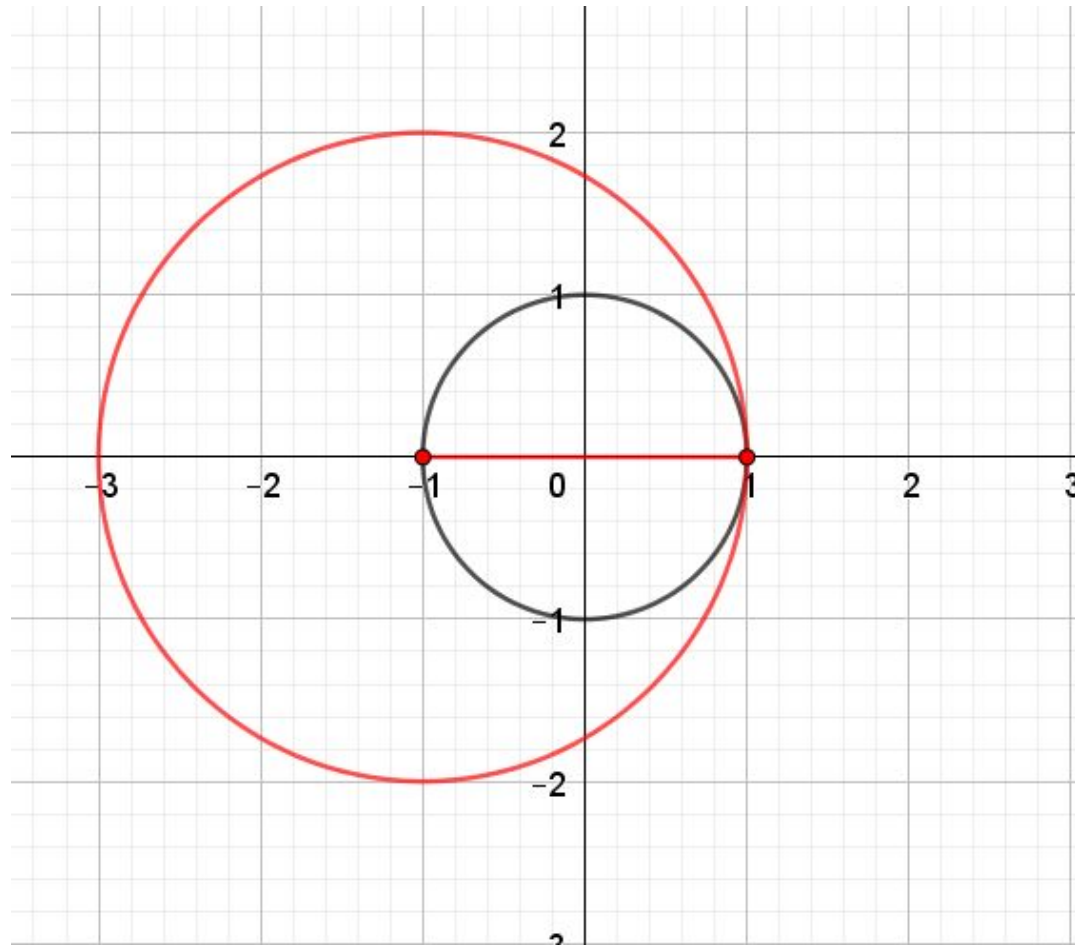


11. Докажите, что траекторией движения точки, закреплённой на окружности, катящейся внутри другой окружности в два раза большего радиуса, является диаметр.

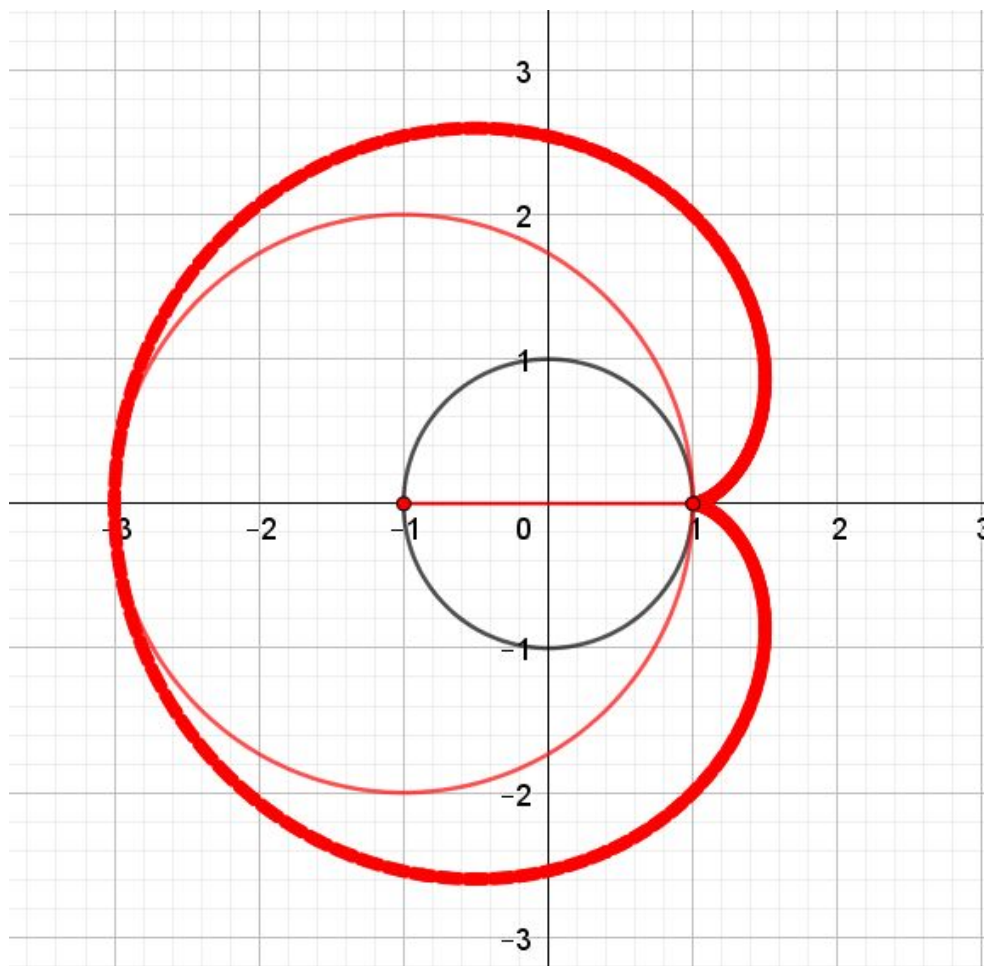


Решение: Пусть катящаяся окружность переместилась из точки B в точку D , P – её центр. Обозначим C точку пересечения диаметра AB с этой окружностью. Тогда угол CPD в два раза больше угла BOD . Следовательно, дуги BD и CD равны, т.е. C – точка, закреплённая на катящейся окружности.

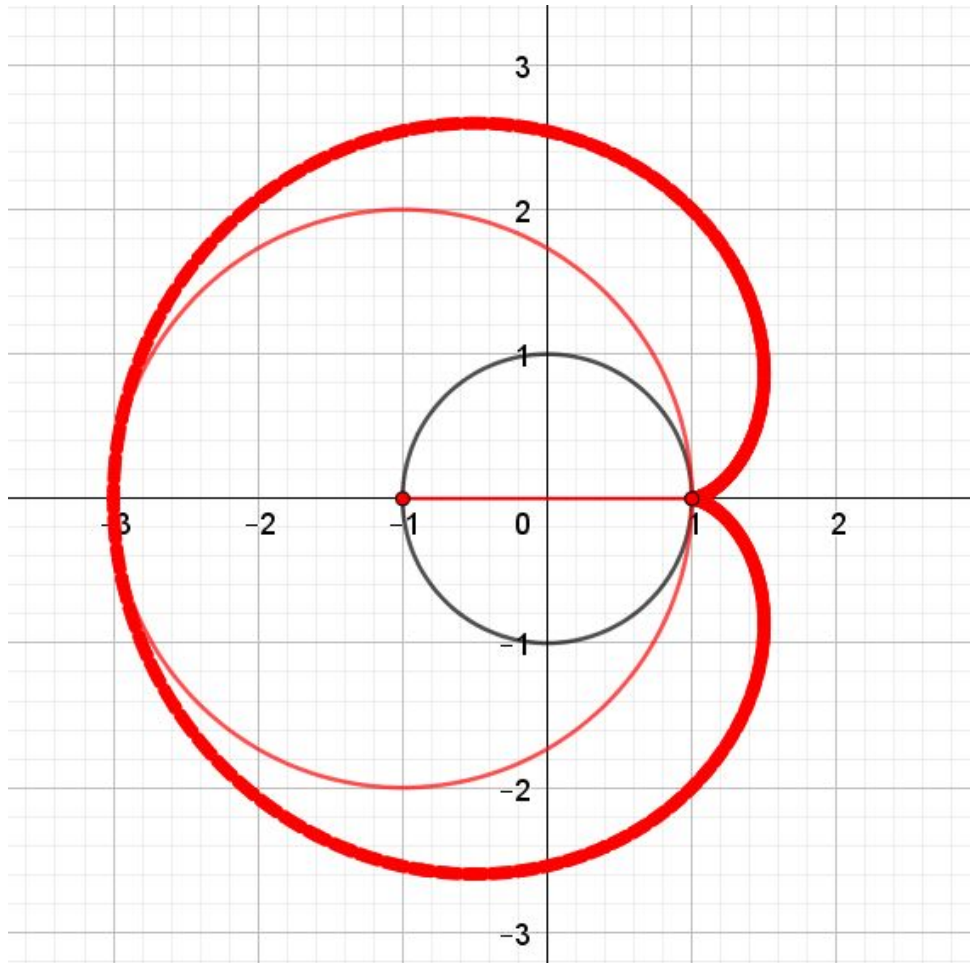
12. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на большой окружности, катящейся внутренним образом по окружности в два раза меньшего радиуса, изображённой на рисунке.



Ответ.

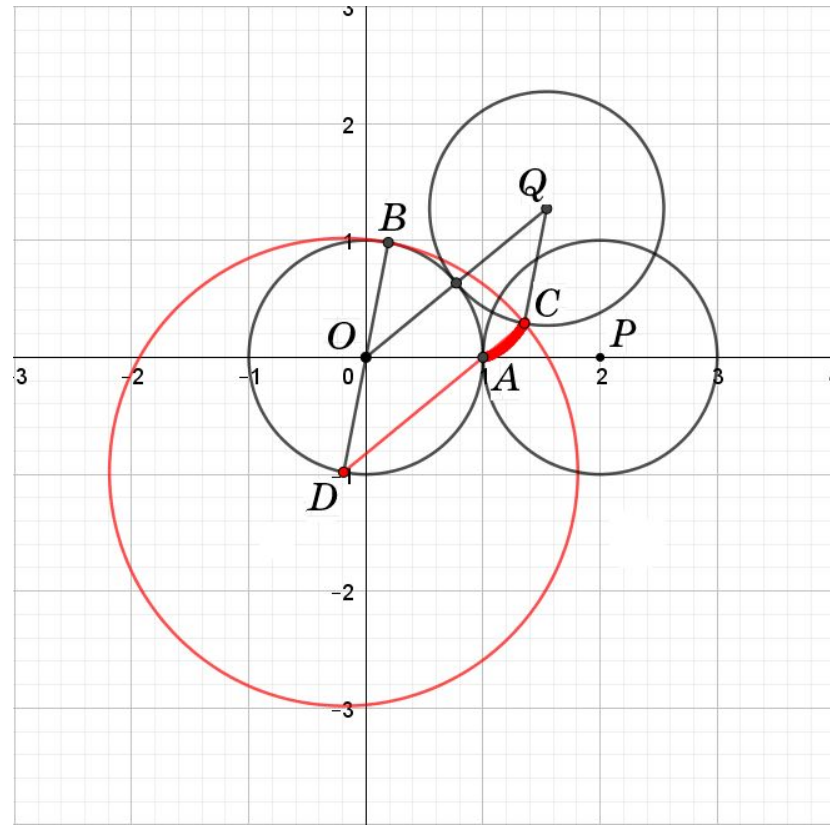


13. Докажите, что траектория из предыдущей задачи является кардиоидой.



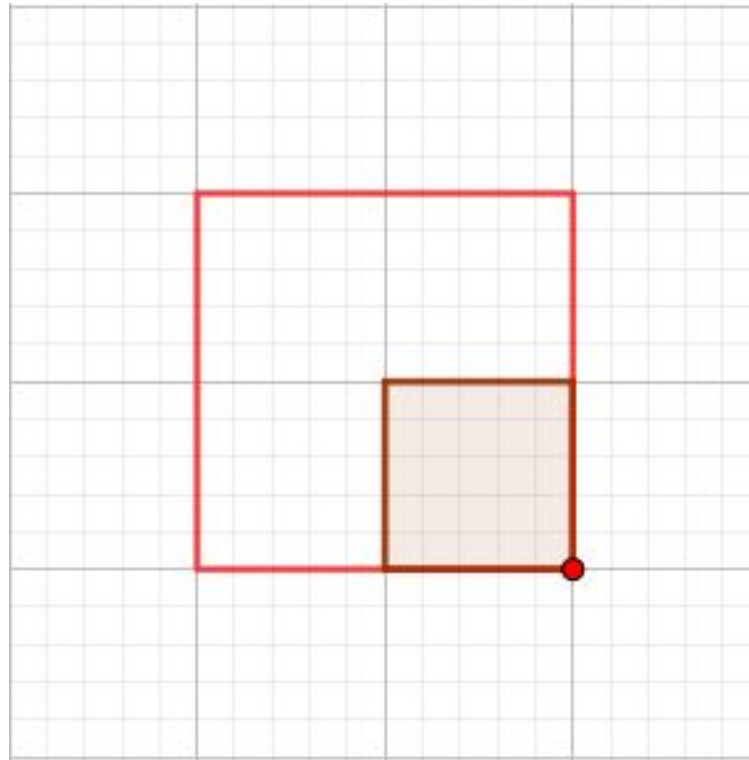
Решение. Предположим, что большая окружность повернулась вокруг центра O маленькой окружности на угол α .

Пусть D – центр полученной большой окружности, B – её точка касания с маленькой окружностью, C – точка, в которую перешла точка $A(1, 0)$. Рассмотрим единичную окружность с центром Q , полученную поворотом единичной окружности с центром $P(2, 0)$ на угол $\alpha/2$. Тогда в четырёхугольнике $OQCD$ стороны OQ и DC равны и параллельны.

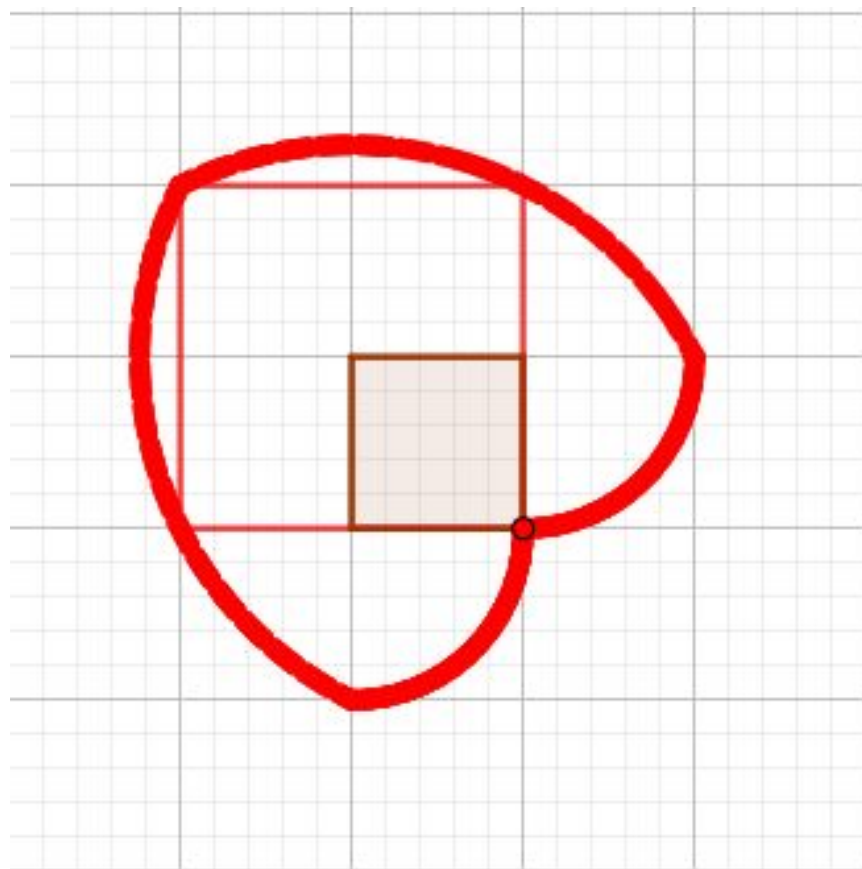


Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм. Значит, стороны OD и QC равны, а угол OQC равен $\alpha/2$. Следовательно, точка C принадлежит кардиоиде.

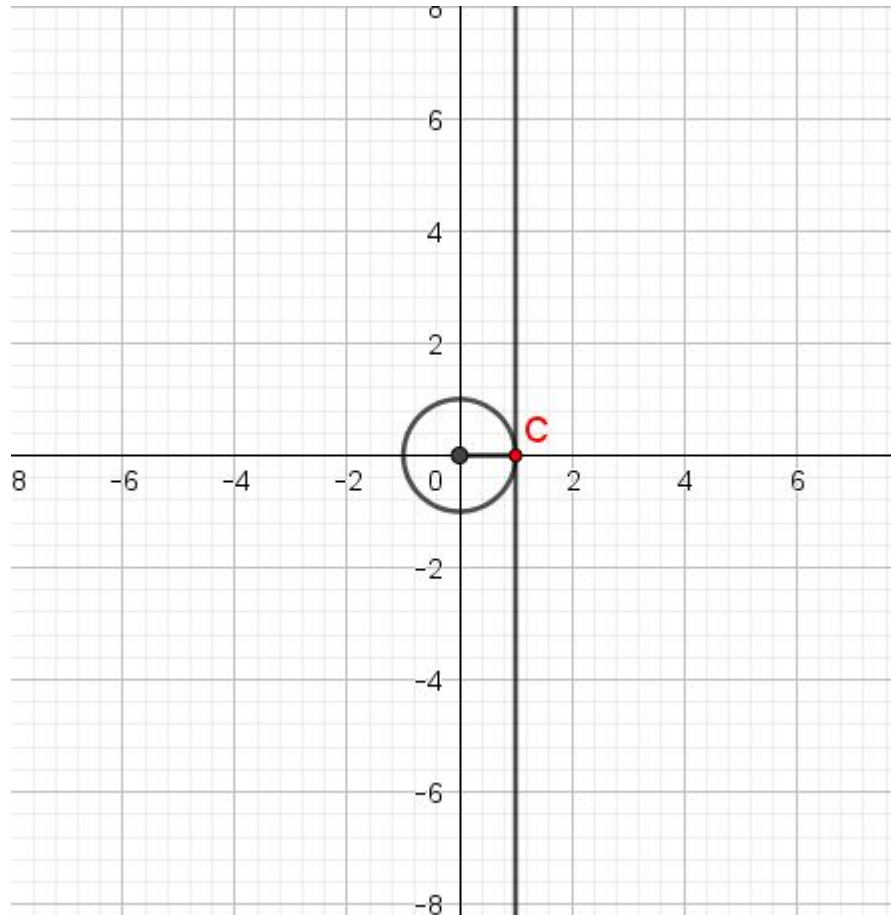
14. Изобразите траекторию движения точки, закреплённой на большом квадрате, катящемся внутренним образом по квадрату в два раза меньшей стороной, изображённому на рисунке.



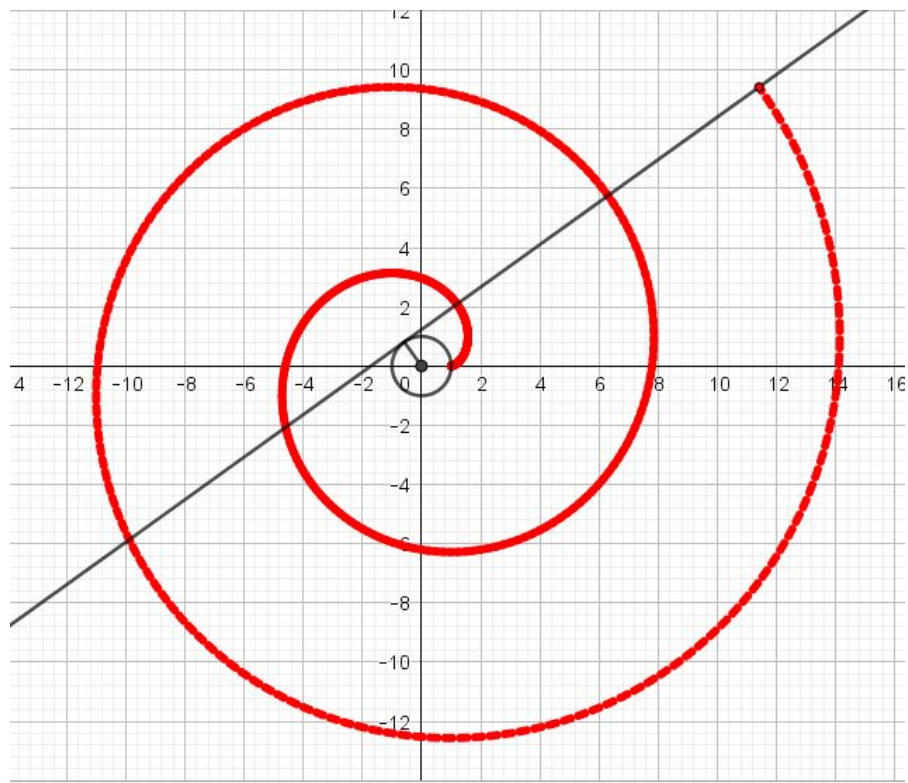
Ответ.



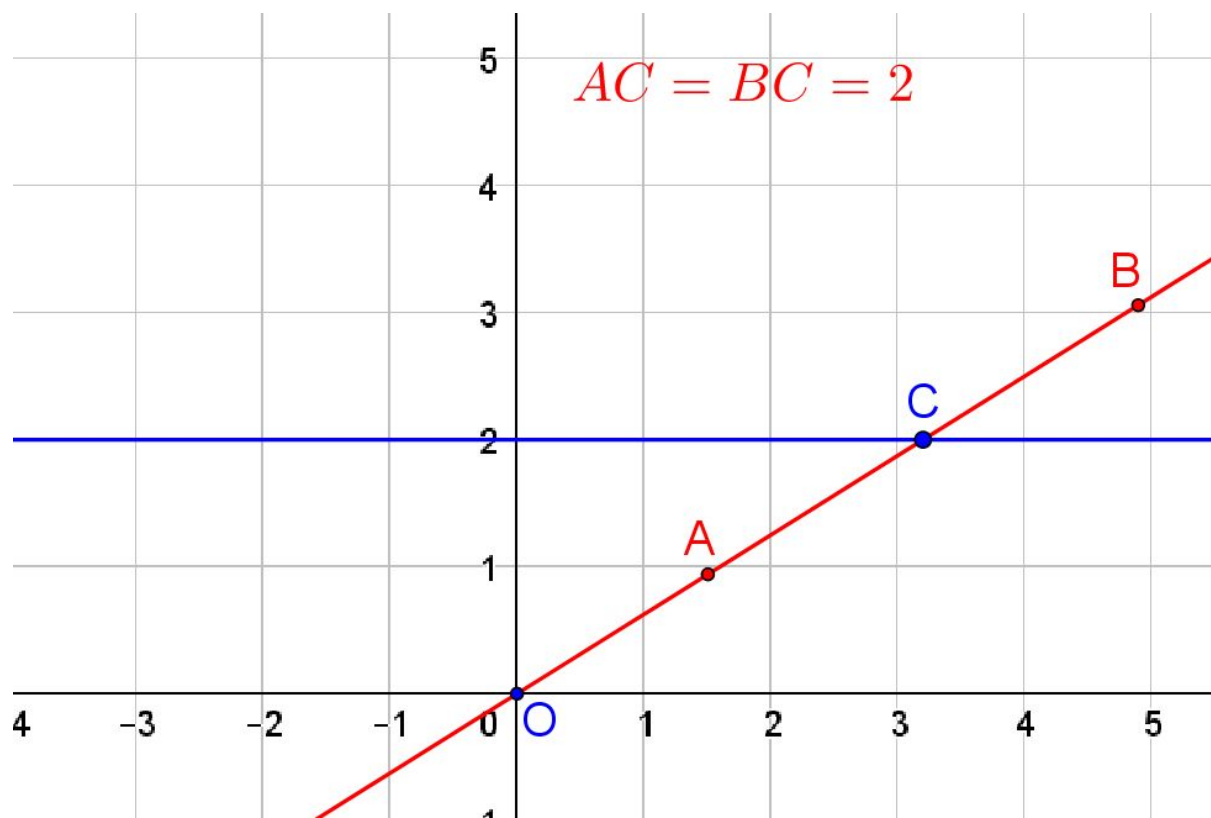
12. Изобразите траекторию движения точки C , закреплённой на прямой, катящейся по единичной окружности.



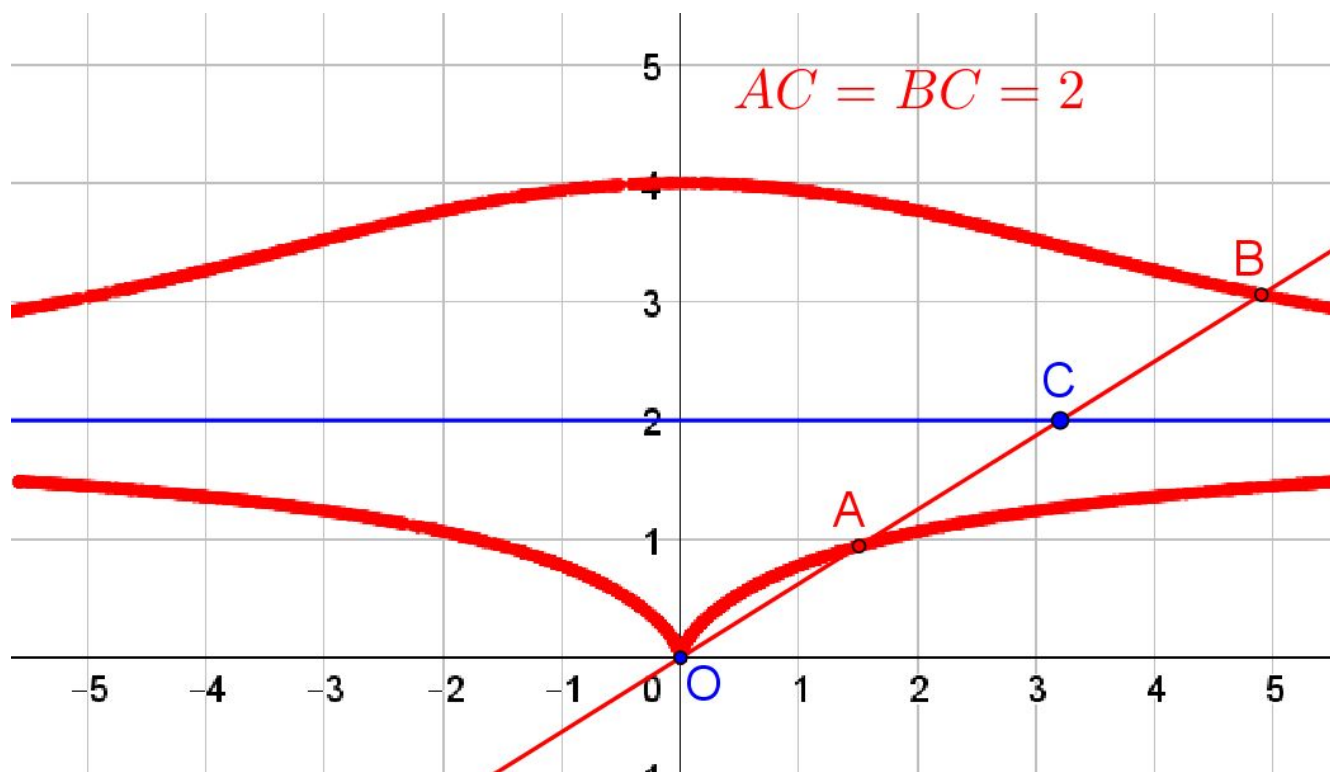
Ответ.



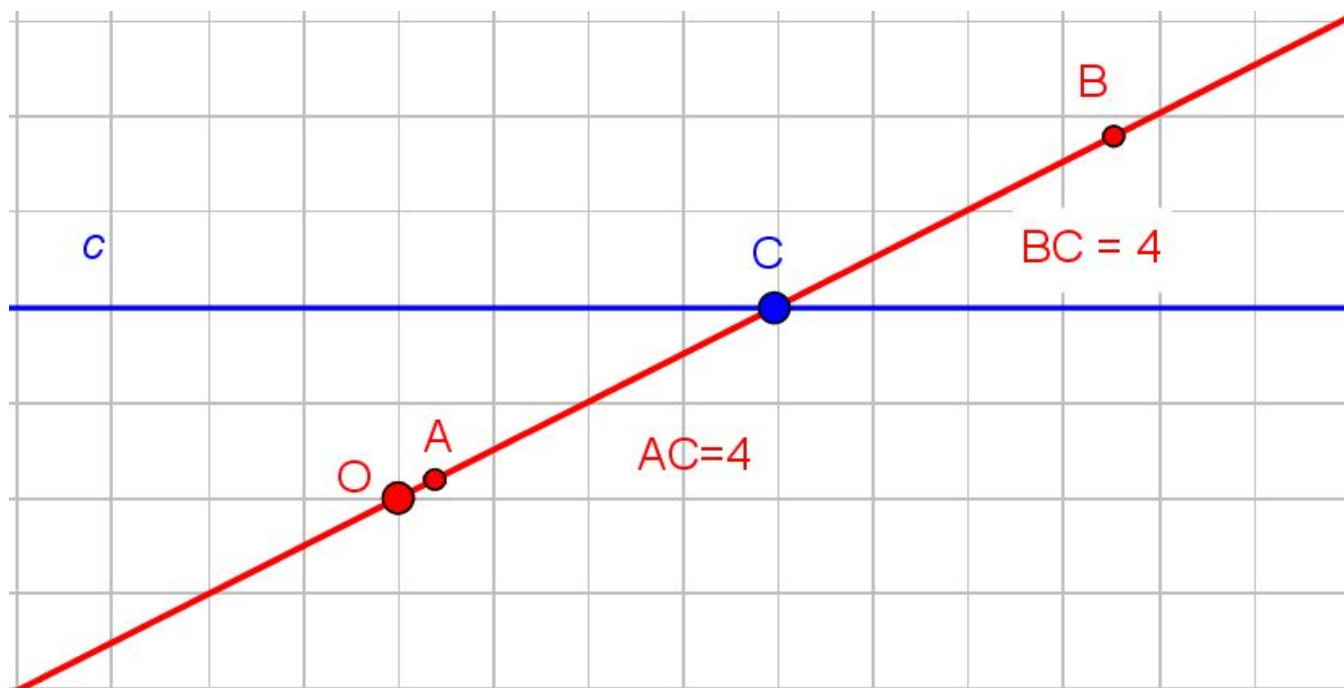
13. Дана прямая c и точка O на расстоянии 2 от этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие прямую c в точках C . От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = 2$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B . Она называется **конхойдой**.



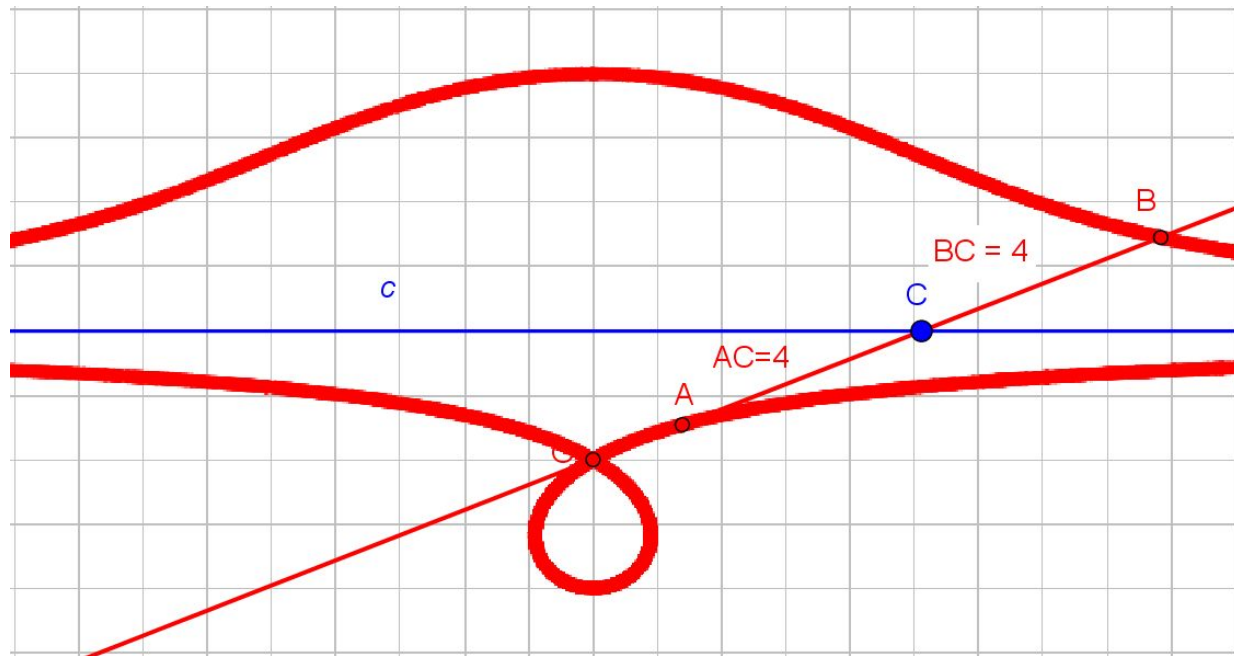
Ответ.



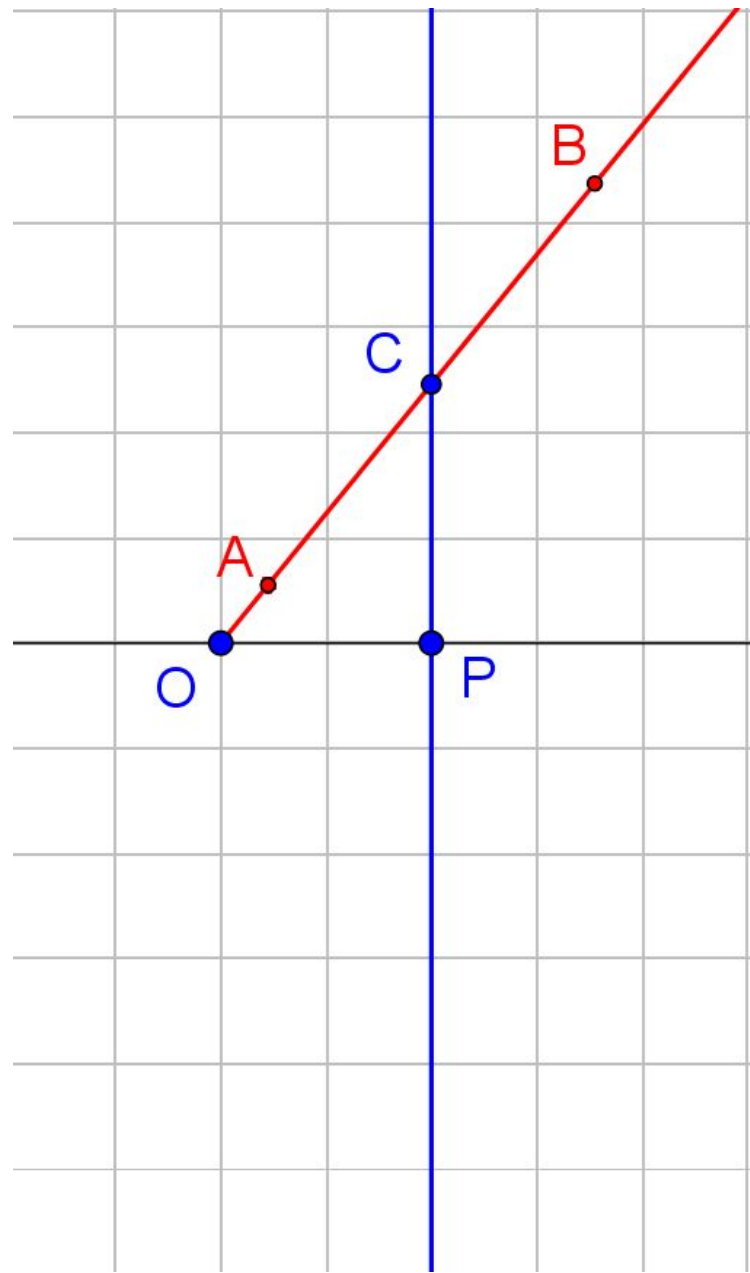
14. Изобразите конхоиду для случая, когда точка O удалена от прямой c на расстояние 2 и $CA = CB = 4$.



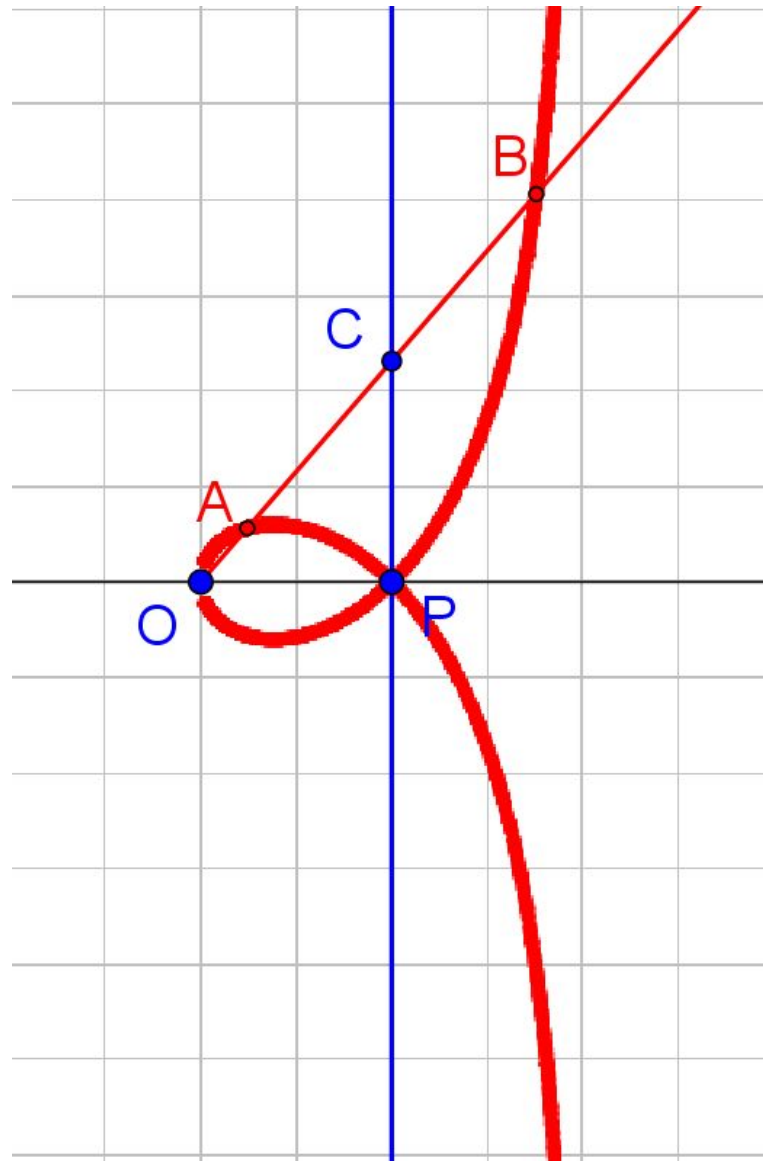
Ответ.



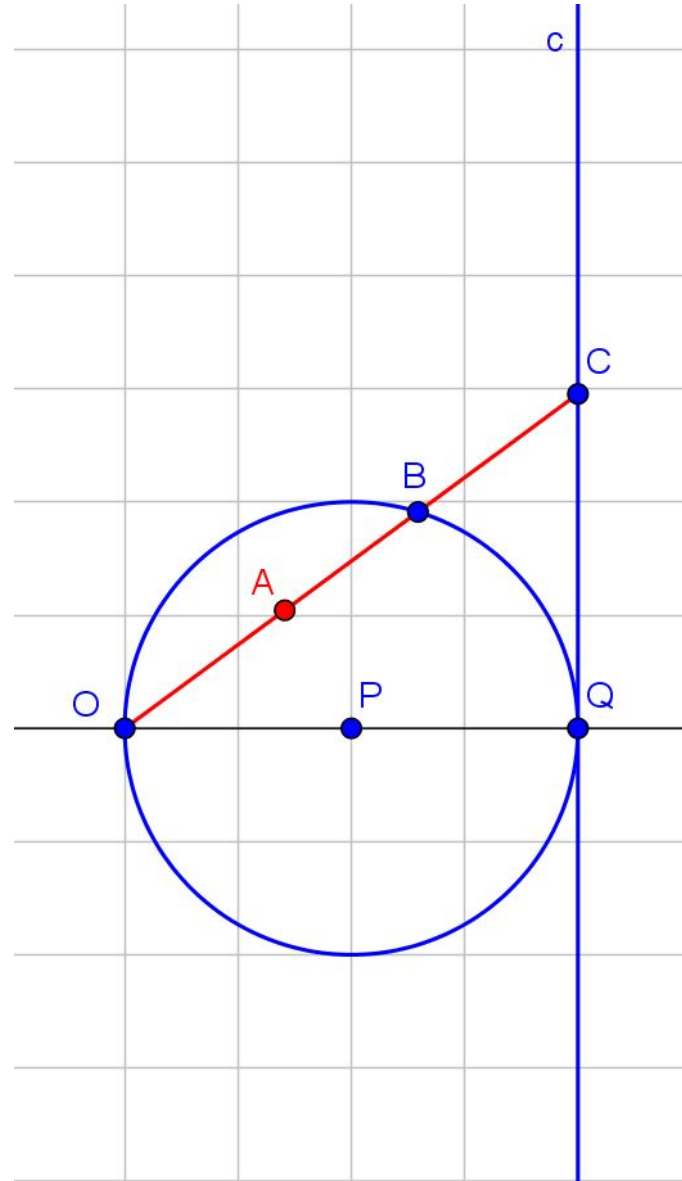
15. Дана прямая и точка O на расстоянии $OP = 2$ от этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие прямую c в точках C . От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = CP$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B . Она называется **строфоидой**.



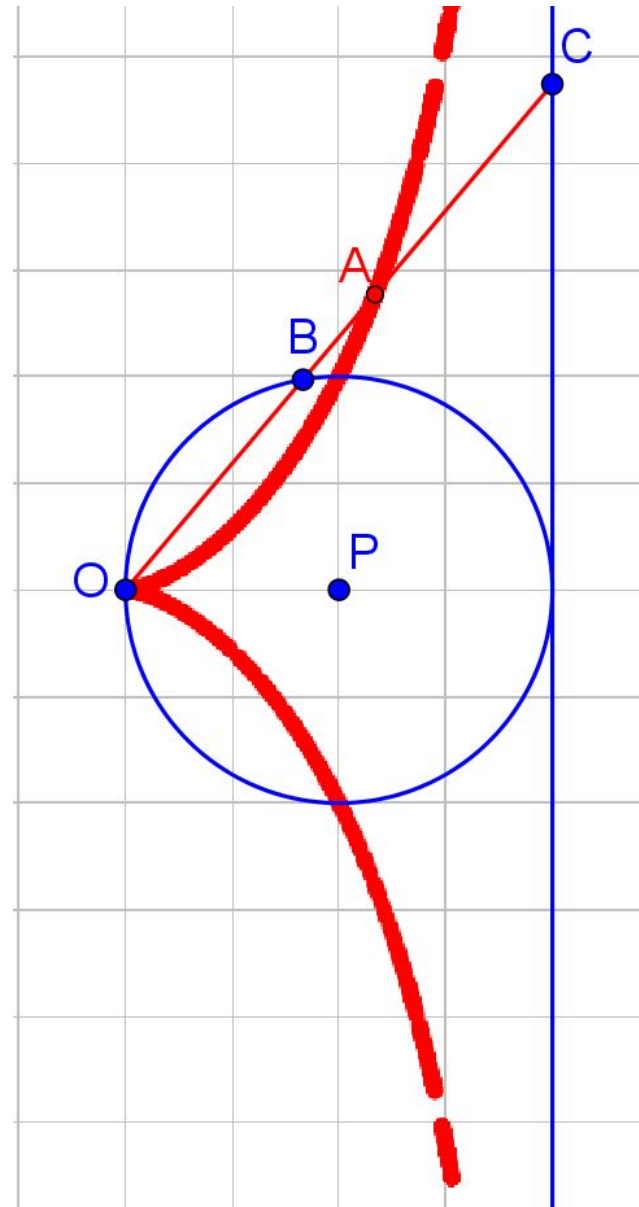
Ответ.



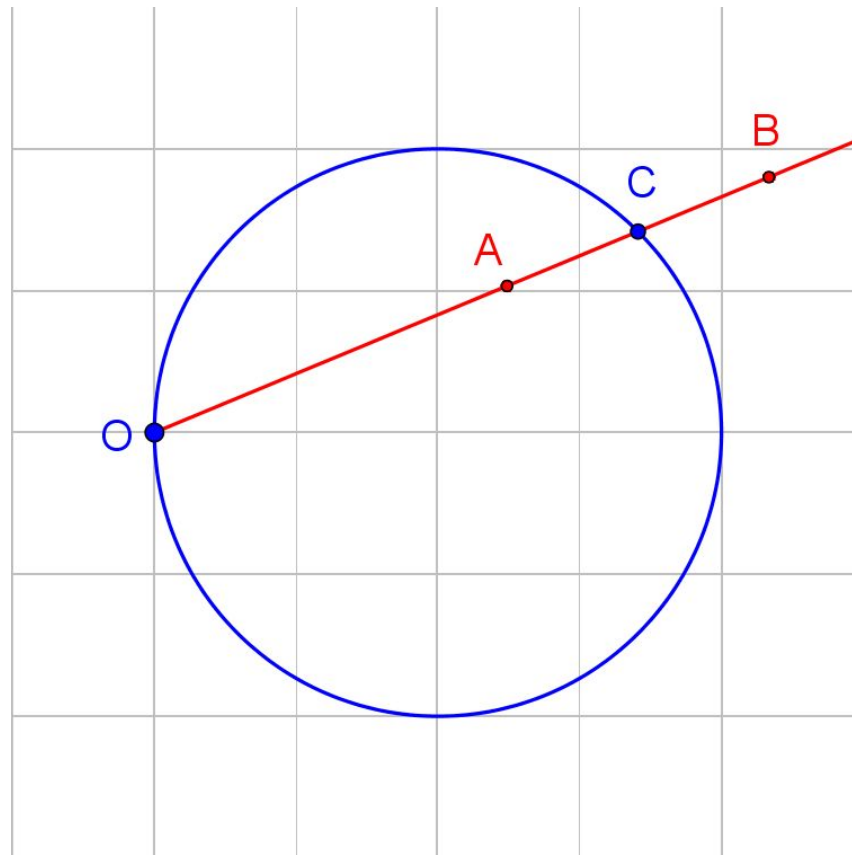
16. Дана прямая и точка O на расстоянии $OQ = 4$ от этой прямой. С диаметром OQ проведена окружность. Через точку O проводятся прямые, пересекающие окружность в точках B и прямую c в точках C . От точек O на этих прямых откладываются отрезки $OA = BC$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B . Она называется **циссоидой**.



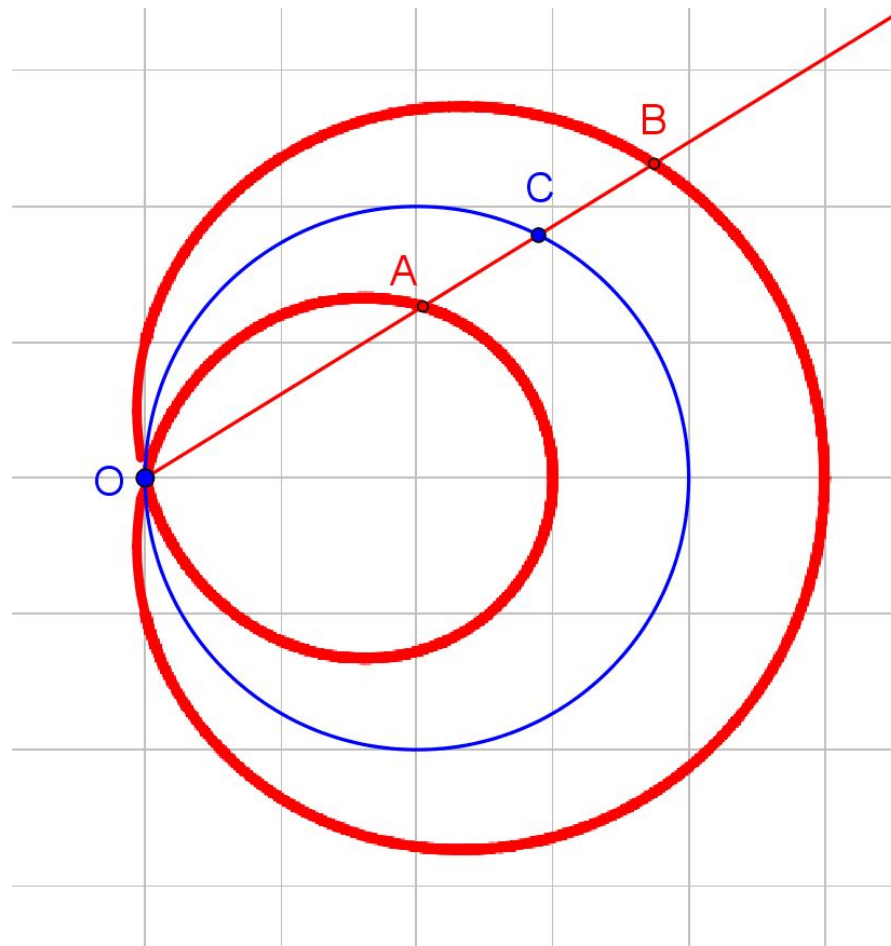
Ответ.



17. Дана окружность радиусом 2 и точка O , ей принадлежащая. Через точку O проводятся прямые, пересекающие окружность в точках C . От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = 1$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B . Она называется **улиткой Паскаля**.



Ответ.





Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б

Тел.: 8 (499) 367–67–81

Е-mail: ioc@mnemozina.ru

Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:

Е-mail: td@mnemozina.ru

Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте

«Школа в кармане»:

<http://pocketschool.ru>