

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 6

Условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$(P(A) > 0)$$

Пример

Чему равна вероятность выпадения двух шестерок на двух игральных костях, если сумма выпавших очков четна?

Решение

Введем события

- $B = \{\text{на обеих костях выпали шестерки}\}$
- $A = \{\text{сумма очков четна}\}$

Событию В благоприятствует всего один исход (6,6), поэтому

$$P(B) = 1/36$$

Событию А благоприятствует 18 исходов, поэтому

$$P(A) = 18/36 = 1/2$$

Так как пересечение $AB=B$, то
условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/2} = \frac{1}{18}$$

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$$

Теорема.

Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n ,

образующих полную группу, равна

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример

Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин — дальтоники. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек — дальтоник, если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин?

Решение

- Рассмотрим два события
 $A = \{\text{выбран мужчина}\}$
 $B = \{\text{выбрана женщина}\}$
- Так как в группе одинаковое число мужчин и женщин, то
 $P(A) = P(B) = 50\% = 0,5$

- Обозначим событие
 $C = \{\text{выбранный человек дальтоник}\}$
- Условные вероятности
 $P(C|A) = 0,05$
 $P(C|B) = 0,0025$
- По формуле полной вероятности
 $P(C) = 0,05 \cdot 0,5 + 0,0025 \cdot 0,5 = 0,02625$

Вероятность гипотез Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при
условии появления одного из
несовместных событий

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A .

Будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$$

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь $P(A)$, получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Полученные формулы называют **формулами Байеса** (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764г.).

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример

Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин — дальтоники. Выбор производится из группы с равным числом мужчин и женщин. Известно, что выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение

- $A = \{\text{выбран мужчина}\}$
 $V = \{\text{выбрана женщина}\}$
 $C = \{\text{выбранный человек дальтоник}\}$
- Условные вероятности
 $P(C|A) = 0,05$
 $P(C|V) = 0,0025$

Воспользовавшись формулой
Байеса, находим

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,02625} \approx 0,95$$

Задачи

Задача 1

Вероятности сбоя для различных элементов в компьютере относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в этих устройствах равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Решение

- $A = \{\text{сбой будет обнаружен}\}$
- $V1 = \{\text{сбой в устройстве 1}\}$
 $V2 = \{\text{сбой в устройстве 2}\}$
 $V3 = \{\text{сбой в устройстве 3}\}$
- Вероятности
 $P(V1) = 0,3; P(V2) = 0,2; P(V3) = 0,5$

- Условные вероятности

$$P(A|B1)=0,8; P(A|B2)=0,9; P(A|B3)=0,9$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,87$$

Задача 2

У рыбака есть три любимых места рыбалка. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что при однократном забросе удочки поймается рыбка в первом месте равна $1/3$; во втором – $1/2$; в третьем – $1/4$. Он забросил удочку и вытащил рыбку. Какова вероятность, что он рыбачил в первом месте?

Решение

- $A = \{\text{рыбак вытащил рыбку}\}$
- $V_1 = \{\text{рыбачил в первом месте}\}$
 $V_2 = \{\text{рыбачил во втором месте}\}$
 $V_3 = \{\text{рыбачил в третьем месте}\}$
- Вероятности
 $P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = 1/3$

- Условные вероятности

$$P(A|B_1)=1/3; P(A|B_2)=1/2; P(A|B_3)=1/4$$

- По формуле Байеса

$$P(A) = \frac{1/3 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/4} = 4/13$$

Задача 3

Путешественник может купить билет в одной из трех касс ж/д вокзала. Вероятность, что он направится в первую кассу равна $\frac{1}{2}$; во вторую – $\frac{1}{3}$; в третью – $\frac{1}{6}$.

Вероятности того, что билетов уже нет в кассах: в первой – $\frac{4}{5}$; во второй – $\frac{5}{6}$; в третьей – $\frac{7}{8}$. Путешественник обратился в одну из касс и купил билет. Какова вероятность, что он купил билет в первой кассе

Решение

- $A = \{\text{купил билет}\}$
- $B_1 = \{\text{обратился в кассу 1}\}$
 $B_2 = \{\text{обратился в кассу 2}\}$
 $B_3 = \{\text{обратился в кассу 3}\}$
- Вероятности
 $P(B_1) = 1/2; P(B_2) = 1/3; P(B_3) = 1/6$

- Так как в условии задачи даны вероятности, что билетов в кассах уже нет, а путешественник купил билет, значит в кассе билеты были.
- Условные вероятности
$$P(A|B_1)=1-4/5=1/5$$
$$P(A|B_2)=1-5/6=1/6$$
$$P(A|B_3)=1-7/8=1/8.$$

- Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1/2 \cdot 1/5}{1/2 \cdot 1/5 + 1/3 \cdot 1/6 + 1/6 \cdot 1/8} = 0,48$$

Задача 4

Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по 1-й дороге, вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,6; по 2-й – 0,3; по 3-й – 0,2; по 4-й – 0,1; по 5-й – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение

- $A = \{\text{турист вышел из леса}\}$
- $V1 = \{\text{выбрал дорогу 1}\}$
- $V2 = \{\text{выбрал дорогу 2}\}$
- $V3 = \{\text{выбрал дорогу 3}\}$
- $V4 = \{\text{выбрал дорогу 4}\}$
- $V5 = \{\text{выбрал дорогу 5}\}$

- Дорог всего 5. Вероятности пойти по любой из пяти дорог одинаковы, то есть $P(B1)=P(B2)=P(B3)=P(B4)=P(B5)=1/5$
- Условные вероятности даны
 $P(A|B1)=0,6$; $P(A|B2)=0,3$; $P(A|B3)=0,2$
 $P(A|B4)=0,1$; $P(A|B5)=0,1$

Имеем

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \\ + P(B_3) \cdot P(A|B_3) + P(B_4) \cdot P(A|B_4) + P(B_5) \cdot P(A|B_5)$$

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot 0,6 + \frac{1}{5} \cdot 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,2 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 = 0,26$$

$$P(B_1|A) = P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{1/5 \cdot 0,6}{0,26} = \frac{6}{13}$$

Задача 5

Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 счастливых. Студенты подходят за билетами один за другим по очереди. У кого больше вероятность вытащить счастливый билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

Решение

- Обозначим события

$A = \{\text{первый студент вытащил
счастливый билет}\}$

$B = \{\text{второй студент вытащил
счастливый билет}\}$

- $P(A) = 5/25 = 1/5$

- Вероятность события В зависит от того, произошло или не произошло событие А. Поэтому

$$P(B|A)=4/24$$

- Если событие А не произошло, то

$$P(B|\bar{A})=5/24$$

- События А и \bar{A} противоположные,
 $P(A)=5/25$ и $P(\bar{A})=20/25$

- Следовательно, вероятность

$$P(B) = 4/24 \cdot 1/5 + 5/24 \cdot 4/5 = 1/5,$$

То есть совпадает с вероятностью события А.

Задача 6

Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна $0,3$; для второго — $0,5$; для третьего — $0,8$. Мишень **не поражена**. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение

- Обозначим события

$A_1 = \{\text{на линию огня вызван 1-й стрелок}\}$

$A_2 = \{\text{на линию огня вызван 2-й стрелок}\}$

$A_3 = \{\text{на линию огня вызван 3-й стрелок}\}$

- $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

- Событие $V = \{\text{мишень не поражена}\}$
- Условные вероятности этого события
$$P(V|A1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$$
$$P(V|A2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$
$$P(V|A3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

- По формуле Байеса находим

$$P(B | A_1) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = 0,628$$

Задача 7

В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% с первого предприятия; 30% со второго; 50% с третьего. Известно, что 10% продукции с первого предприятия высшего сорта; на втором предприятии 5%; на третьем 20%. Найти вероятность того, что случайно купленная продукция окажется высшего сорта.

Решение

- Обозначим события

$V = \{\text{куплена продукция высшего сорта}\}$

$A_1 = \{\text{продукция принадлежит 1-му предприятию}\}$

$A_2 = \{\text{продукция принадлежит 2-му предприятию}\}$

$A_3 = \{\text{продукция принадлежит 3-му предприятию}\}$

- По условию задачи

$$P(A1)=0,2 \quad P(A2)=0,3 \quad P(A3)=0,5$$

- Условные вероятности

$$P(B|A1)=0,1 \quad P(B|A2)=0,05 \quad P(B|A3)=0,2$$

- По формуле полной вероятности

$$P(B)=0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135$$

Задача 8

Для сигнализации о том, что режим автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания равны соответственно 1; 0,75; 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежал индикатор?

Решение

- Обозначим события

$A = \{\text{от индикатора получен сигнал}\}$

$B_1 = \{\text{индикатор 1-го типа}\}$

$B_2 = \{\text{индикатор 2-го типа}\}$

$B_3 = \{\text{индикатор 3-го типа}\}$

- $P(B_1) = 0,2$ $P(B_2) = 0,3$ $P(B_3) = 0,5$

- Условные вероятности

$$P(A|B1)=1 \quad P(A|B2)=0,75 \quad P(A|B3)=0,4$$

- Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти вероятности $P(B1|A)$, $P(B2|A)$, $P(B3|A)$ и сравнить их.

- По формуле полной вероятности найдем $P(A)=0,2 \cdot 1+0,3 \cdot 0,75+0,5 \cdot 0,4=0,625$

- Вероятность того, что сигнал будет получен от индикатора, принадлежащего 1-му типу, по формуле Байеса

$$P(B1 | A) = \frac{P(B1) \cdot P(A | B1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 1}{0,625} \approx 0,32$$

- Вероятность, что сигнал будет получен от индикатора 2-го типа

$$P(B2 | A) = \frac{P(B2) \cdot P(A | B2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,75}{0,625} \approx 0,36$$

- Вероятность, что сигнал будет получен от индикатора 3-го типа

$$P(B3 | A) = \frac{P(B3) \cdot P(A | B3)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,625} \approx 0,32$$

- Сравнив найденные вероятности, получаем ответ — вероятнее всего второму

Вопросы к лекции 6

- Условная вероятность. Примеры
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса

Конец лекции 6