ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 6

Условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$(P(A) > 0)$$

Пример

Чему равна вероятность выпадения двух шестерок на двух игральных костях, если сумма выпавших очков четна?

Решение

Введем события

- B={на обеих костях выпали шестерки}
- A={сумма очков четна}

Событию В благоприятствует всего один исход (6,6), поэтому

$$P(B)=1/36$$

Событию А благоприятствует 18 исходов, поэтому

$$P(A)=18/36=1/2$$

Так как пересечение AB=B, то условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/2} = \frac{1}{18}$$

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Формула полной вероятности

Пусть событие ***А*** может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$$

Теорема.

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$,

образующих полную группу, равна

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$

$$+ P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример

Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин — дальтоники. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек — дальтоник, если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин?

Решение

- Рассмотрим два события

  A={выбран мужчина}

  B={выбрана женщина}

- Так как в группе одинаковое число мужчин и женщин, то

  P(A)=P(B)=50%=0,5

- Обозначим событие
  C={выбранный человек дальтоник}

- Условные вероятности
  $P(C|A)=0{,}05$
  $P(C|B)=0{,}0025$

- По формуле полной вероятности
  $P(C)=0{,}05\cdot 0{,}5+0{,}0025\cdot 0{,}5=0{,}02625$

Вероятность гипотез Формула Байеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий

$$B_1, B_2, ..., B_n.$$

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots$$

$$+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A.

Будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ldots,P_A(B_n)$$

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь Р(А) , получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Полученные формулы называют **формулами Байеса** (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764г.).

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример

Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин — дальтоники. Выбор производится из группы с равным числом мужчин и женщин. Известно, что выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение

- A={выбран мужчина}
  B={выбрана женщина}
  C={выбранный человек дальтоник}

- Условные вероятности
  $P(C|A)=0{,}05$
  $P(C|B)=0{,}0025$

Воспользовавшись формулой Байеса, находим

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(C)}=\frac{0,05\cdot 0,5}{0,02625}\approx 0,95$$

Задачи

Задача 1

Вероятности сбоя для различных элементов в компьютере относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в этих устройствах равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Решение

- A={сбой будет обнаружен}
- B1={сбой в устройстве 1}

  B2={сбой в устройстве 2}

  B3={сбой в устройстве 3}
- Вероятности

  P(B1)=0,3; P(B2)=0,2; P(B3)=0,5

- Условные вероятности

  $P(A|B1)=0,8$; $P(A|B2)=0,9$; $P(A|B3)=0,9$

- По формуле полной вероятности

$P(A)=0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,9=0,87$

Задача 2

У рыбака есть три любимых места рыбалка. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что при однократном забросе удочки поймается рыбка в первом месте равна 1/3; во втором – ½; в третьем – ¼. Он забросил удочку и вытащил рыбку. Какова вероятность, что он рыбачил в первом месте?

Решение

- A={рыбак вытащил рыбку}
- B1={рыбачил в первом месте}

  B2={рыбачил во втором месте}

  B3={рыбачил в третьем месте}
- Вероятности

  P(B1)=P(B2)=P(B3)=1/3

- Условные вероятности P(A|B1)=1/3; P(A|B2)=1/2; P(A|B3)=1/4
- По формуле Байеса

$$P(A)=\frac{1/3\cdot 1/3}{1/3\cdot 1/3+1/3\cdot 1/2+1/3\cdot 1/4}=4/13$$

Задача 3

Путешественник может купить билет в одной из трех касс ж/д вокзала. Вероятность, что он направится в первую кассу равна ½; во вторую – 1/3; в третью – 1/6.

Вероятности того, что билетов уже нет в кассах: в первой – 4/5; во второй – 5/6; в третьей – 7/8. Путешественник обратился в одну из касс и купил билет. Какова вероятность, что он купил билет в первой кассе

Решение

- A={купил билет}
- B1={обратился в кассу 1}

  B2={обратился в кассу 2}

  B3={обратился в кассу 3}
- Вероятности

  P(B1)=1/2; P(B2)=1/3; P(B3)=1/6

- Так как в условии задачи даны вероятности, что билетов в кассах уже нет, а путешественник купил билет, значит в кассе билеты были.

- Условные вероятности

  $P(A|B1)=1-4/5=1/5$

  $P(A|B2)=1-5/6=1/6$

  $P(A|B3)=1-7/8=1/8.$

- Искомая вероятность

$$P(A)=\frac{1/2\cdot 1/5}{1/2\cdot 1/5+1/3\cdot 1/6+1/6\cdot 1/8}=0,48$$

Задача 4

Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по 1-й дороге, вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,6; по 2-й – 0,3; по 3-й – 0,2; по 4-й – 0,1; по 5-й – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение

- A={турист вышел из леса}
- B1={выбрал дорогу 1}

  B2={выбрал дорогу 2}

  B3={выбрал дорогу 3}

  B4={выбрал дорогу 4}

  B5={выбрал дорогу 5}

- Дорог всего 5. Вероятности пойти по любой из пяти дорог одинаковы, то есть $P(B1)=P(B2)=P(B3)=P(B4)=P(B5)=1/5$

- Условные вероятности даны $P(A|B1)=0,6$; $P(A|B2)=0,3$; $P(A|B3)=0,2$ $P(A|B4)=0,1$; $P(A|B5)=0,1$

Имеем

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)+$$
$$+P(B_3)\cdot P(A\mid B_3)+P(B_4)\cdot P(A\mid B_4)+P(B_5)\cdot P(A\mid B_5)$$

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot 0,6+\frac{1}{5}\cdot 0,3+\frac{1}{5}\cdot 0,2+\frac{1}{5}\cdot 0,1+\frac{1}{5}\cdot 0,1=0,26$$

$$P(B_1\mid A)=P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)}{P(A)}$$

$$P(B_1\mid A)=\frac{1/5\cdot 0,6}{0,26}=\frac{6}{13}$$

Задача 5

Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 счастливых. Студенты подходят за билетами один за другим по очереди. У кого больше вероятность вытащить счастливый билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

Решение

- Обозначим события

  A={первый студент вытащил счастливый билет}

  B={второй студент вытащил счастливый билет}

- P(A)=5/25=1/5

- Вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. Поэтому

$$P(B|A)=4/24$$

- Если событие A не произошло, то

$$P(B|\bar{A})=5/24$$

- События A и $\bar{A}$ противоположные,

$P(A)=5/25$ и $P(\bar{A})=20/25$

- Следовательно, вероятность

$$P(B)=4/24 \cdot 1/5+5/24 \cdot 4/5=1/5,$$

То есть совпадает с вероятностью события А.

Задача 6

Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3; для второго — 0,5; для третьего — 0,8. Мишень **не поражена**. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение

- Обозначим события

  A1={на линию огня вызван 1-й стрелок}

  A2={на линию огня вызван 2-й стрелок}

  A3={на линию огня вызван 3-й стрелок}

- P(A1)=P(A2)=P(A3)=1/3

- Событие B={мишень не поражена}

- Условные вероятности этого события

  $P(B|A1)=0{,}7 \cdot 0{,}7=0{,}49$

  $P(B|A2)=0{,}5 \cdot 0{,}5=0{,}25$

  $P(B|A3)=0{,}2 \cdot 0{,}2==0{,}04$

- По формуле Байеса находим

$$P(B \mid A_1) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = 0,628$$

Задача 7

В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% с первого предприятия; 30% со второго; 50% с третьего. Известно, что 10% продукции с первого предприятия высшего сорта; на втором предприятии 5%; на третьем 20%. Найти вероятность того, что случайно купленная продукция окажется высшего сорта.

Решение

- Обозначим события

B={куплена продукция высшего сорта}

A1={продукция принадлежит 1-му предприятию}

A2={продукция принадлежит 2-му предприятию}

A3={продукция принадлежит 3-му предприятию}

- По условию задачи

$P(A1)=0,2 \qquad P(A2)=0,3 \qquad P(A3)=0,5$

- Условные вероятности

$P(B|A1)=0,1 \quad P(B|A2)=0,05 \quad P(B|A3)=0,2$

- По формуле полной вероятности

$P(B)=0,2 \cdot 0,1+0,3 \cdot 0,05+0,5 \cdot 0,2=0,135$

Задача 8

Для сигнализации о том, что режим автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания равны соответственно 1; 0,75; 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежал индикатор?

Решение

- Обозначим события

A={от индикатора получен сигнал}

B1={индикатор 1-го типа}
B2={индикатор 2-го типа}
B3={индикатор 3-го типа}

- P(B1)=0,2 P(B2)=0,3 P(B3)=0,5

- Условные вероятности

$P(A|B1)=1$ $P(A|B2)=0,75$ $P(A|B3)=0,4$

- Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти вероятности

  $P(B1|A)$, $P(B2|A)$, $P(B3|A)$ и сравнить их.

- По формуле полной вероятности найдем

$P(A)=0{,}2 \cdot 1+0{,}3 \cdot 0{,}75+0{,}5 \cdot 0{,}4=0{,}625$

- Вероятность того, что сигнал будет получен от индикатора, принадлежащего 1-му типу, по формуле Байеса

$$P(B1 \mid A)=\frac{P(B1)\cdot P(A \mid B1)}{P(A)}=\frac{0,2\cdot 1}{0,625}\approx 0,32$$

- Вероятность, что сигнал будет поучен от индикатора 2-го типа

$$P(B2\,|\,A)=\frac{P(B2)\cdot P(A\,|\,B2)}{P(A)}=\frac{0,3\cdot 0,75}{0,625}\approx 0,36$$

- Вероятность, что сигнал будет поучен от индикатора 3-го типа

$$P(B3\,|\,A)=\frac{P(B3)\cdot P(A\,|\,B3)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,4}{0,625}\approx 0,32$$

- Сравнив найденные вероятности, получаем ответ — вероятнее всего второму

Вопросы к лекции 6

- Условная вероятность. Примеры
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса

Конец лекции 6