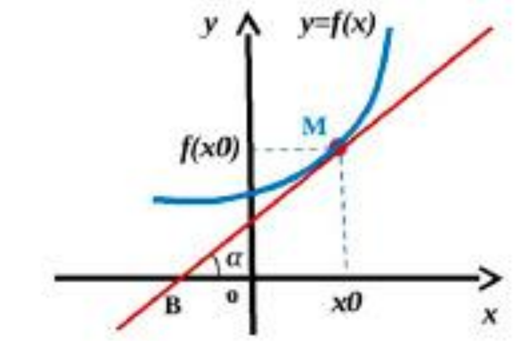
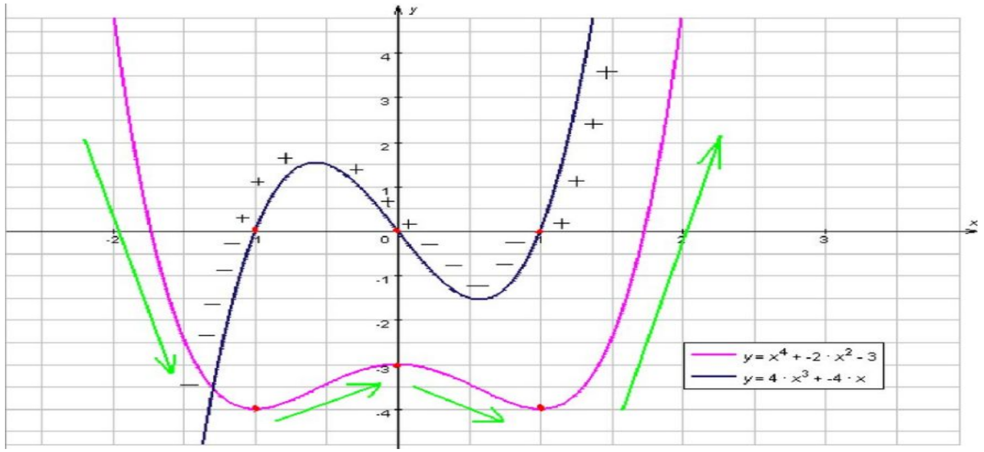
Вопросы к зачету по теме : Применение производной дл исследования функции на монотонность и экстремумы

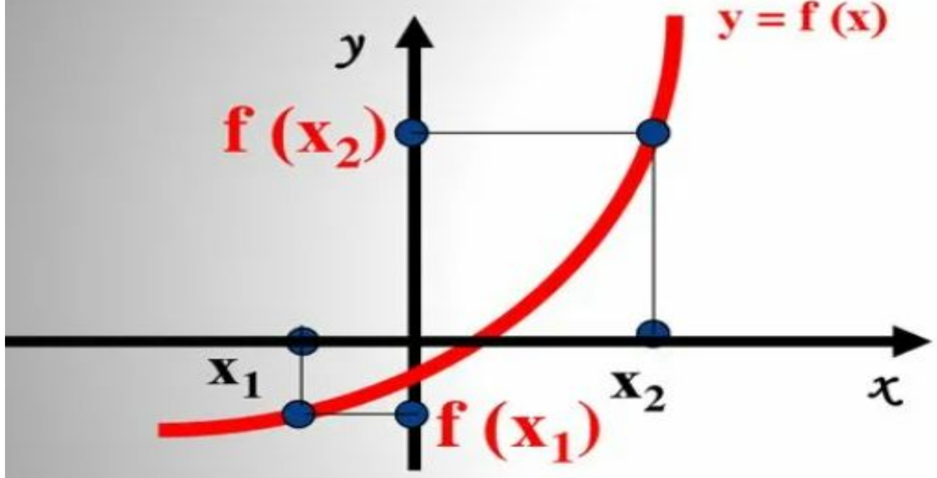


1) Какая функция называется возрастающей (определение + свойство производной, график) . Примеры.
2) Какая функция называется убывающей.
(определение + свойство производной, график). Примеры.
3) Какие функции называются монотонными. Монотонно возрастающие, монотонно убывающие функции. Примеры.
4) Способы исследования функции на монотонность. Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции с помощью производной. Решение примера.
5) Теорема Лагранжа. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.
6) Теорема о достаточном условии возрастания и убывания функции.
7) Необходимые и достаточные условия постоянства функции.
8) Точки экстремума . Точки минимума и точки максимума.
9) Стационарные точки и критические точки.
10) Теорема Ферма. Геометрический смысл теоремы Ферма.
11) Необходимое и достаточное условие Теоремы Ферма



1

Возрастающая функция



Функция f(x) называется *возрастающей*

на некотором интервале,

если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, таких, что

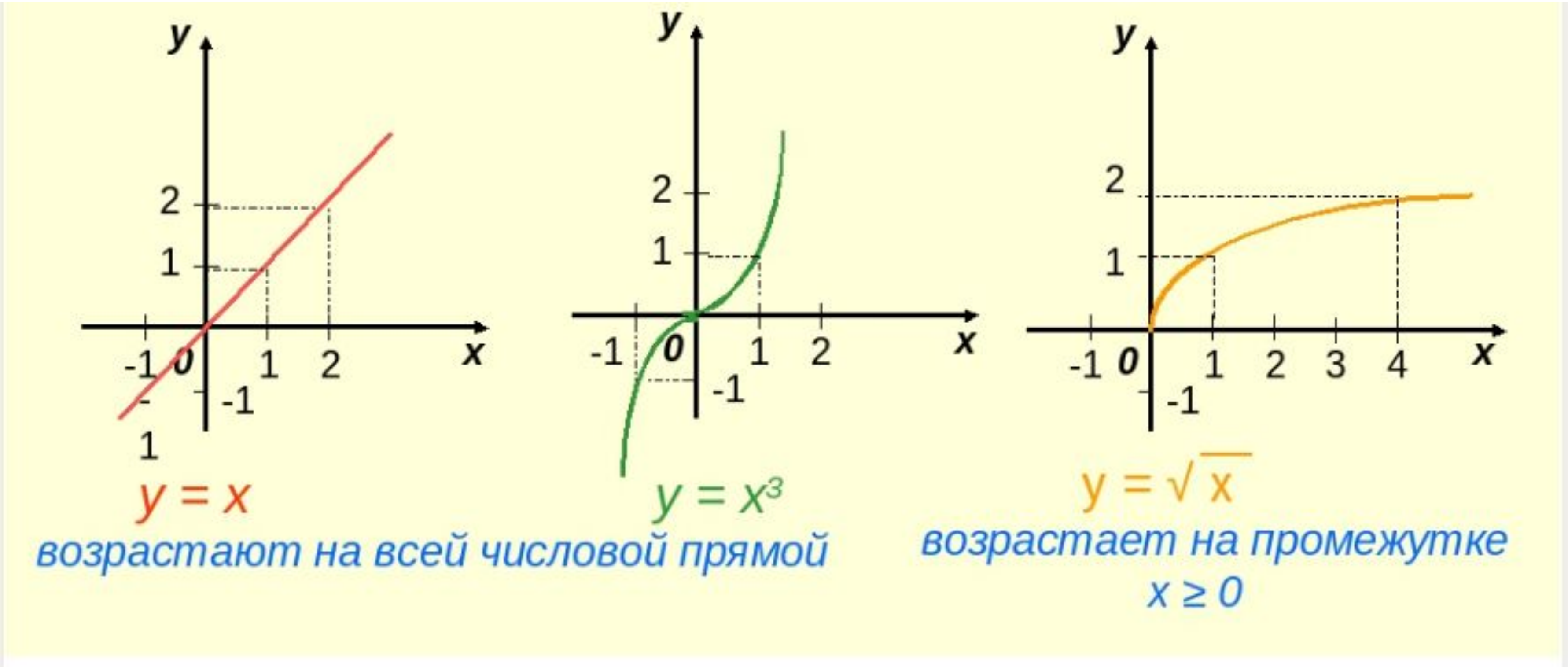
$x_2 > x_1$

следует неравенство

$f(x_2) > f(x_1)$.

1

Примеры возрастающей функции.

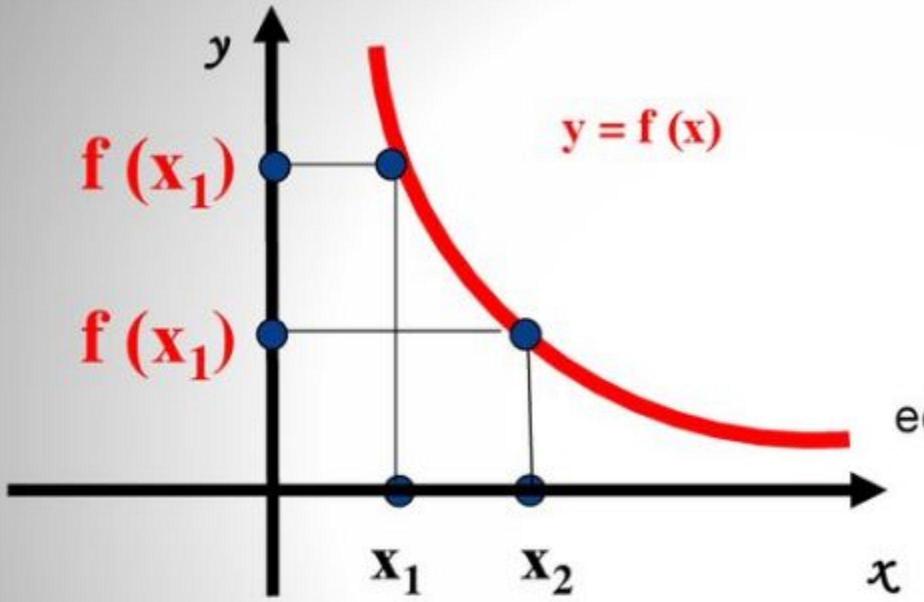


1

- Если **$f'(x)$** > 0 на некотором интервале, то функция возрастает на этом интервале.

2

Убывающая функция



Функция f(x) называется

убывающей

на некотором интервале,

если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, таких, что

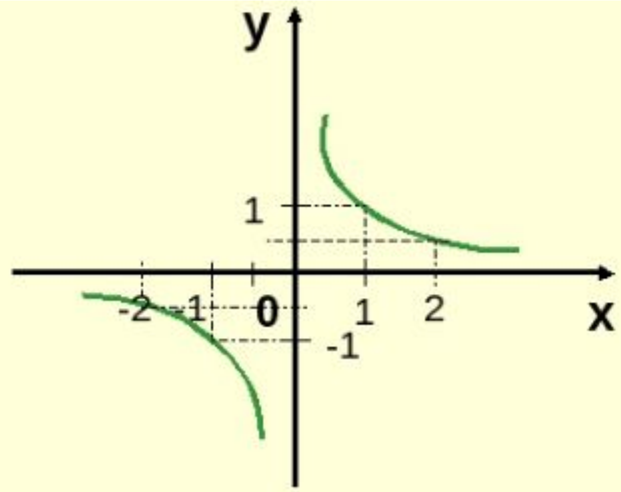
$x_2 > x_1$

следует неравенство

$f(x_2) < f(x_1)$.

2

Примеры возрастающей функции.



y = 1/ x - убывает на всей области определения

2

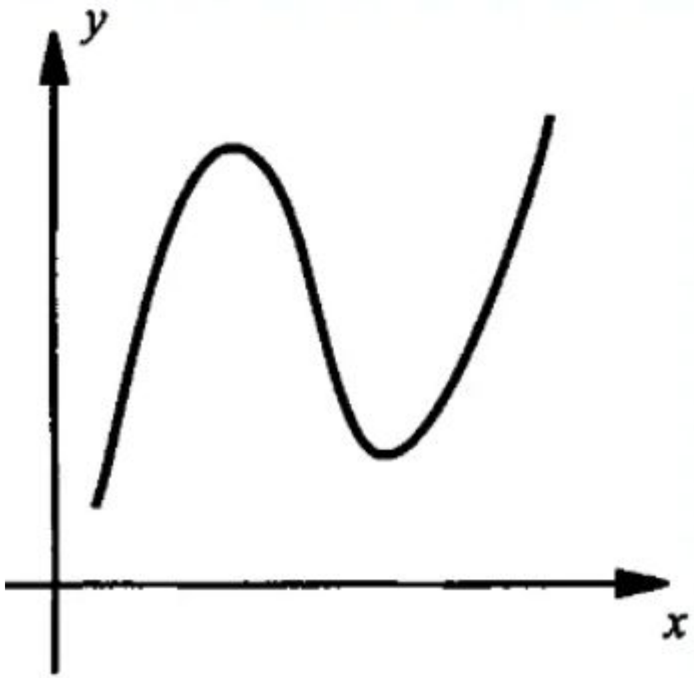
- Если $\mathbf{f'(x)} < 0$ на некотором интервале, то функция убывает на этом интервале.

3

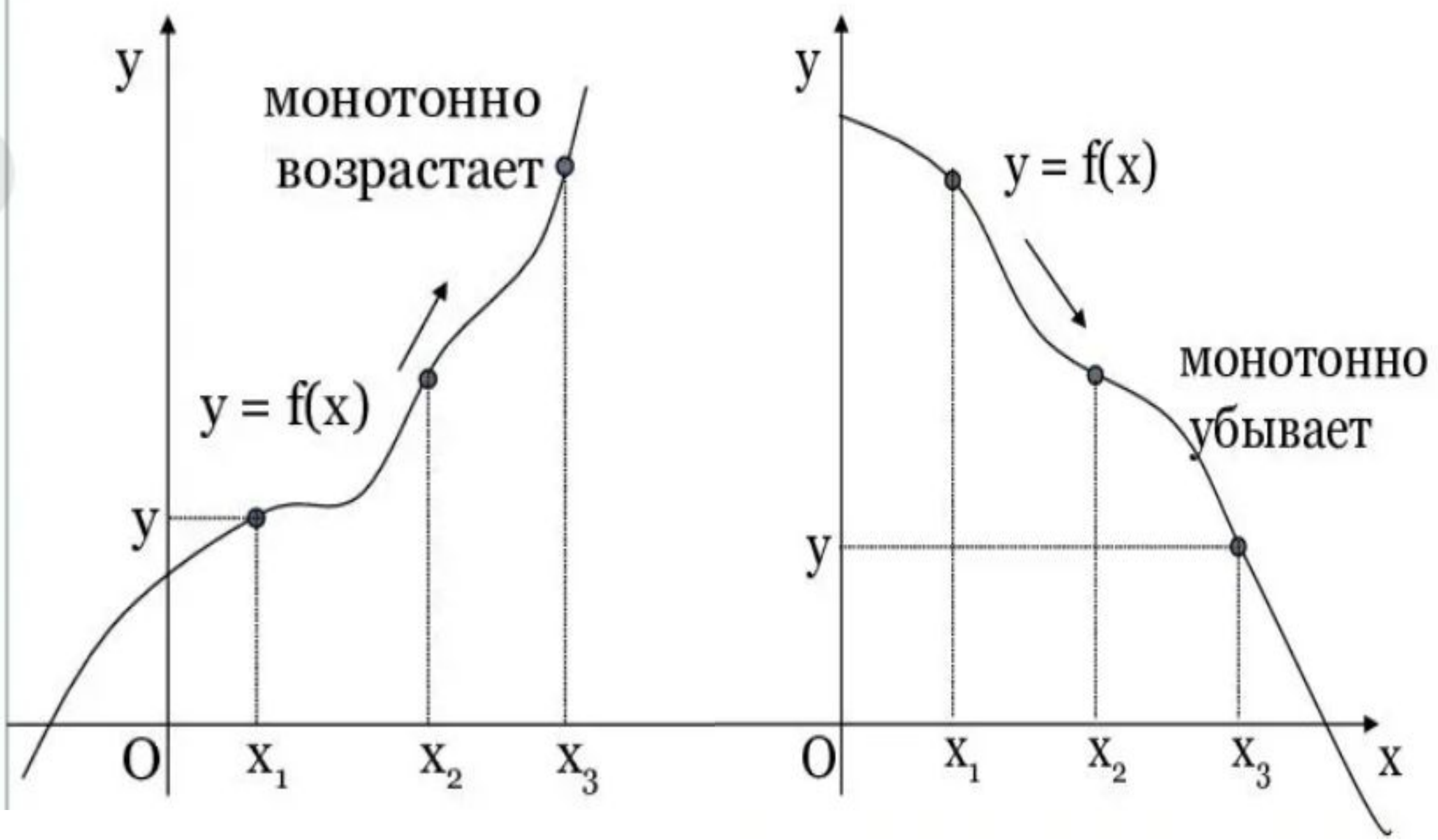
Монотонная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функция называется **монотонной** на промежутке, если она на этом промежутке или возрастает, или убывает.

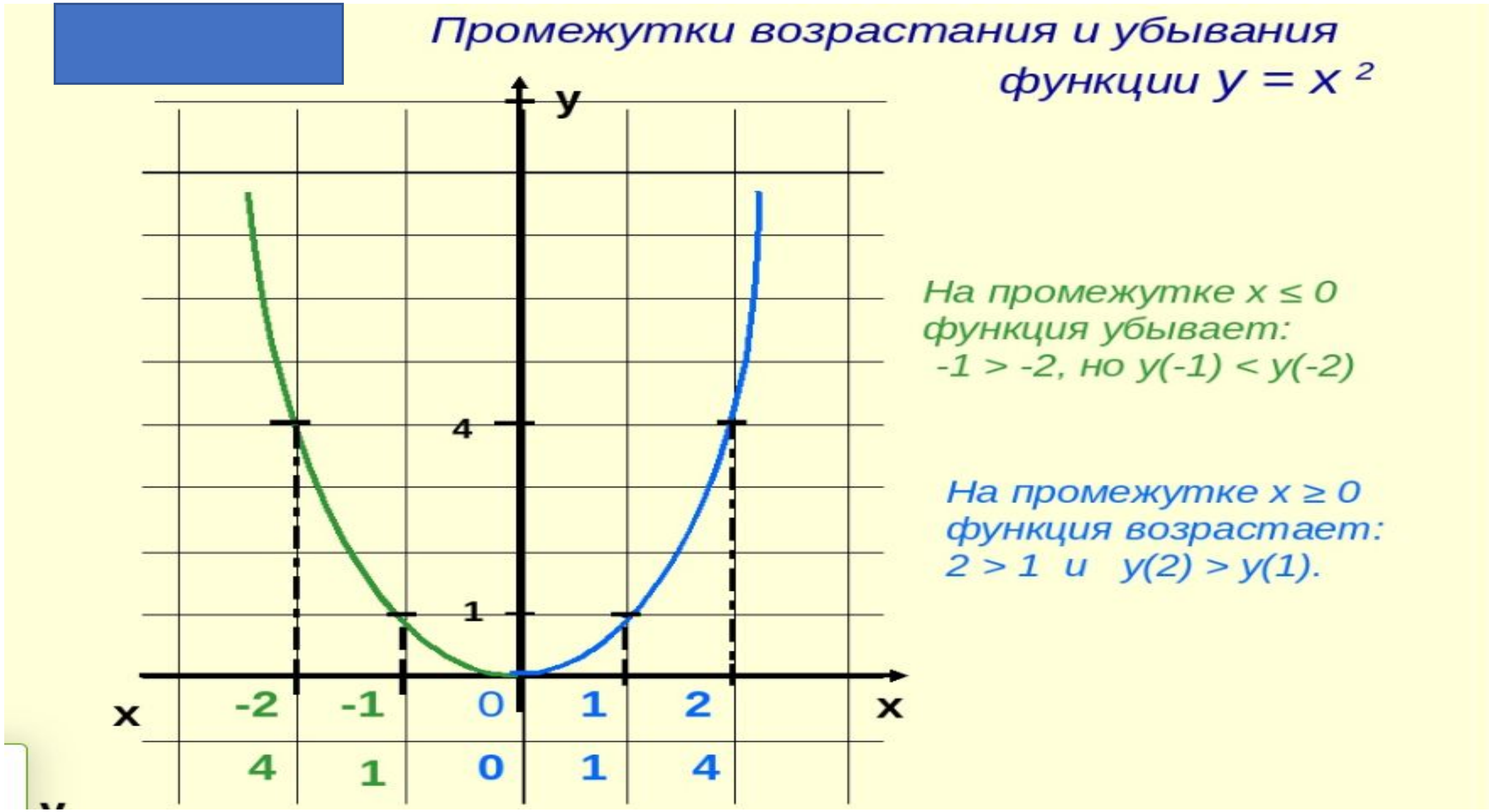


Немонотонная функция



3

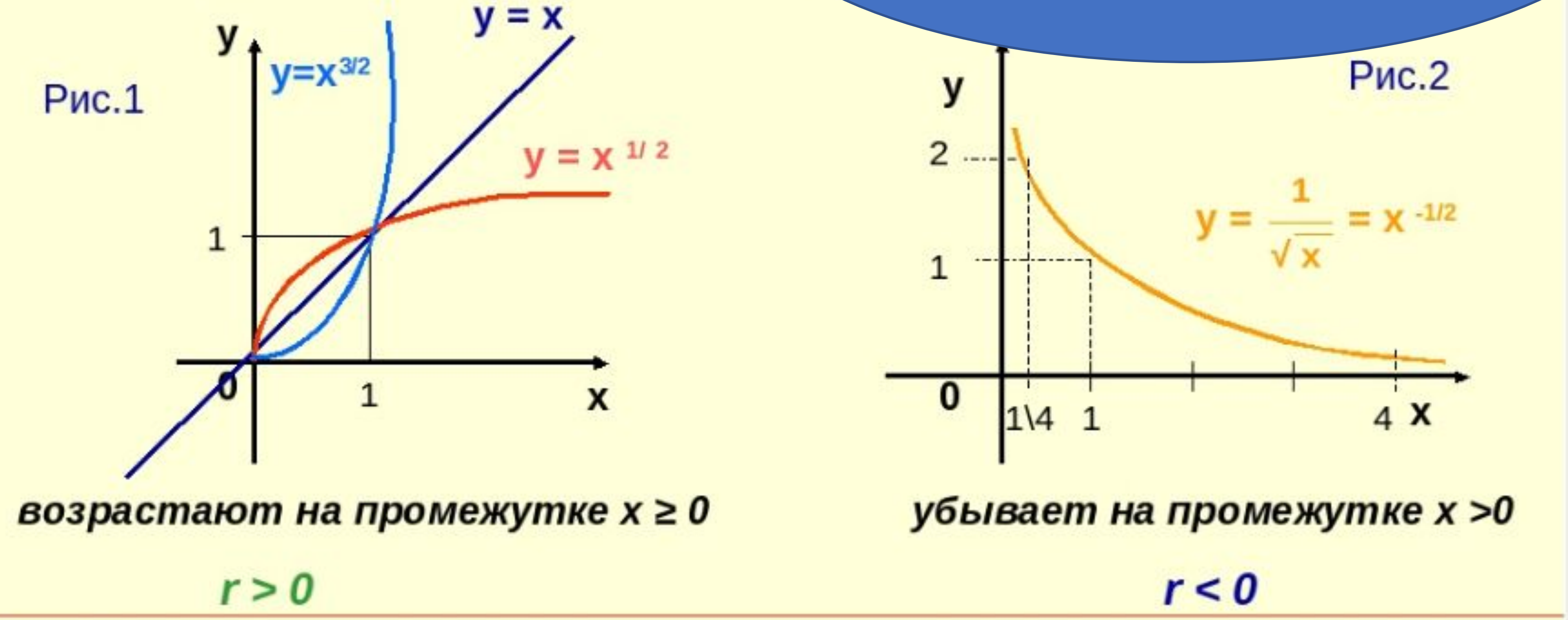
Функция монотонно возрастает на промежутке [0; +∞) и монотонно убывает на промежутке (- ∞; 0]



3

Монотонно возрастающие степенные функции

Монотонно убывающая степенная функция



Вывод:

если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geq 0$;

если $r < 0$, то степенная функция $y = x^r$ убывает на промежутке $x > 0$.

Повторение

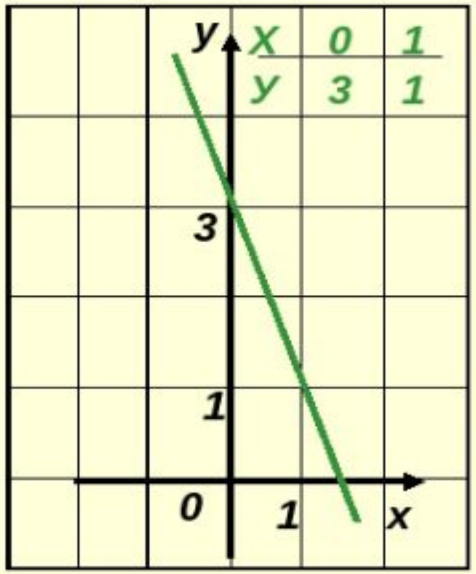
Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 3 - 2x$; **2)** $y = 2 - x^2$; **3)** $y = (x - 2)^2$.

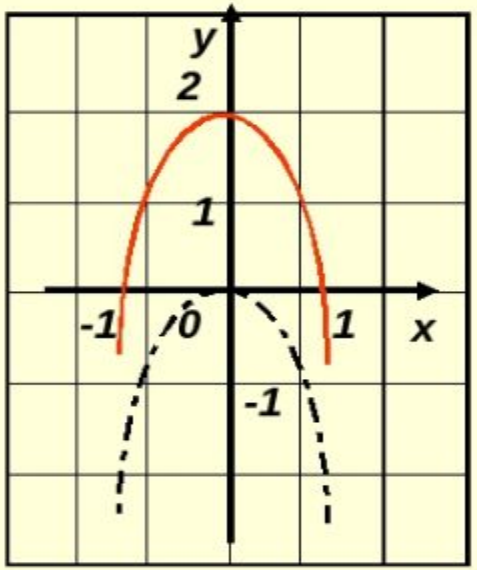
Повторение

Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

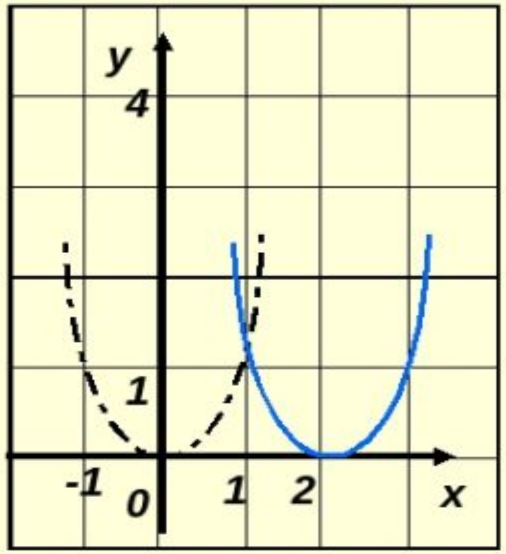
1) $y = 3 - 2x$;



2) $y = 2 - x^2$;



3) $y = (x - 2)^2$.



Убывает на всей числовой оси

На промежутке $x \le 0$ возрастает, на промежутке $x \ge 0$ убывает

На промежутке $x \ge 2$ возрастает, на промежутке $x \le 2$ убывает

4

Способы исследования функций на монотонность

Способ 1. По определению возрастающей (убывающей) функции.

Способ 2. По графику функции.

Пример №1. Исследуйте функцию f(x)= 1/x на монотонность.

Решение.

$D(f) : x \neq 0$

Пусть x_2 и x_1 - произвольные точки из $D(f)$ такие, что $x_2 > x_1$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = 1/x_2 - 1/x_1 = (x_1 - x_2)/x_2 x_1 < 0$, значит данная функция убывает на каждом из двух промежутков своей области определения.

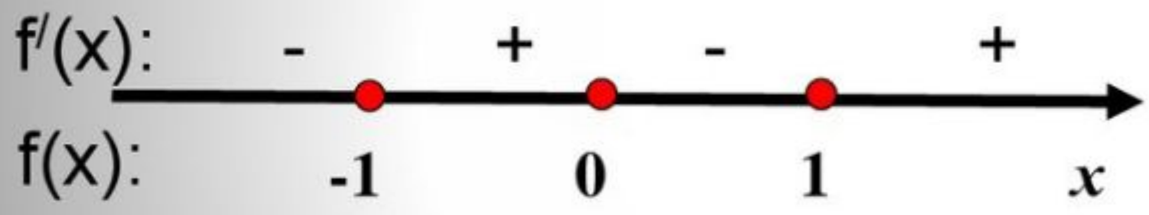
Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Определить промежутки, в которых $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
4. Сделать выводы о монотонности функции.

Образец решения по алгоритму

$f(x) = x^4 - 2x^2$,

1. $D(f) = R$
2. $f'(x) = 4x^3 - 4x$,
3. $f'(x)>0$, если $4x^3 - 4x >0$, $x^3 - x >0$, $x(x-1)(x+1)>0$



4. Функция убывает на промежутках (-∞;-1)] и [(0; 1)] .

Функция возрастает на промежутках [(-1; 0)] и [(1; + ∞)]

Повторение

Дифференцируемая функция

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Повторение

Таблица производных

$1.\ c' = 0,$

$2.\ (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$

$3.\ (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$

$4.\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$

$5.\ (a^u)' = a^u \ln a \ u',$

$6.\ (e^u)' = e^u \cdot u',$

$7.\ (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$

$8.\ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$

$9.\ (\sin u)' = \cos u \cdot u',$

$10.\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$

$11.\ (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$

$12.\ (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$

5

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях)

Пусть функция $y = f(x)$

а) определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$

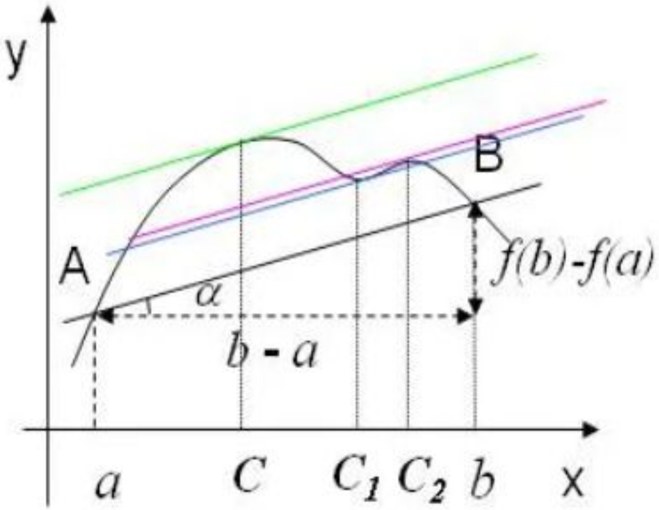
б) дифференцируема на интервале (a, b).

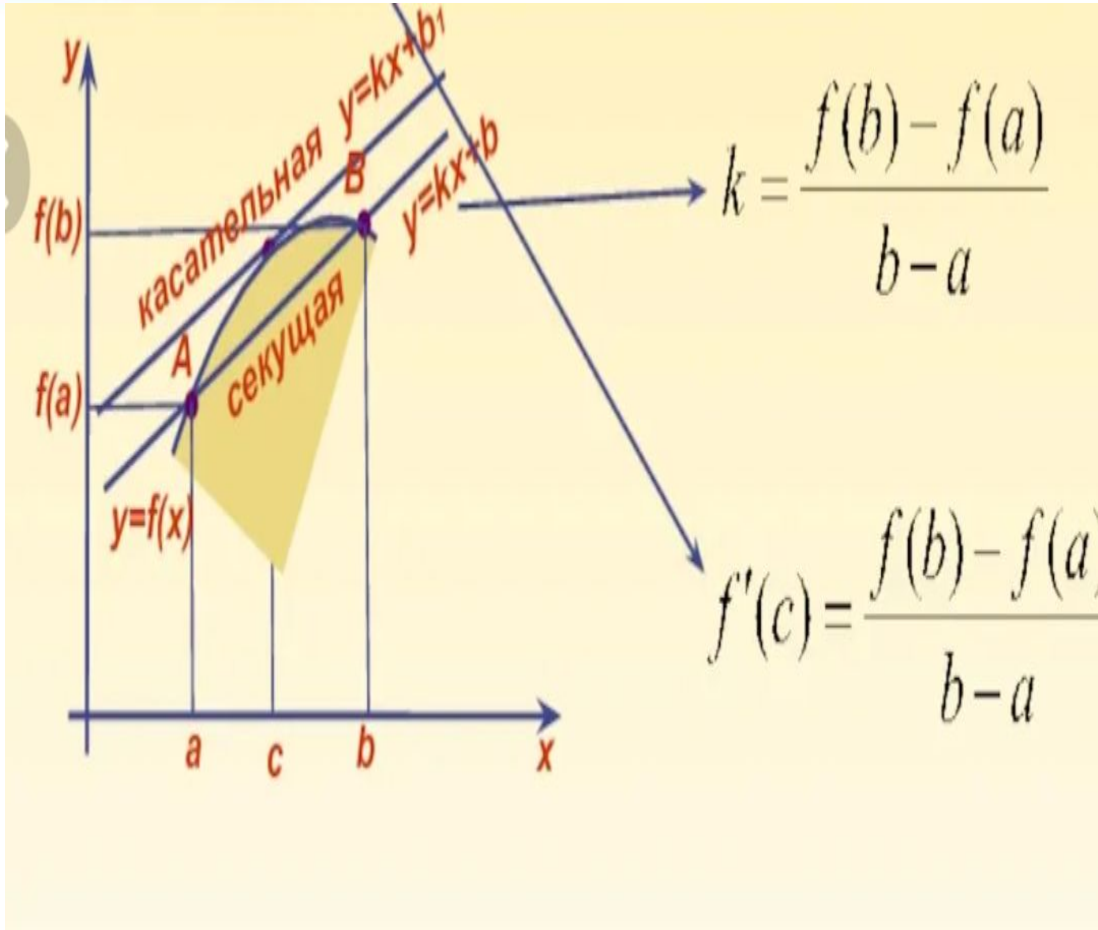
Тогда найдется хотя бы одна точка $C \in (a, b)$, такая, что

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Геометрически

$tg\alpha = f'(C)$





$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

5

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

На графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная к которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и b (рис. 1).

Угловой коэффициент касательной к графику функции y=f(x) в точке C с абсциссой с *равен* угловому коэффициенту секущей l , т.е. на интервале (a, b) найдется такая точка c , что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции y=f(x) параллельна секущей.

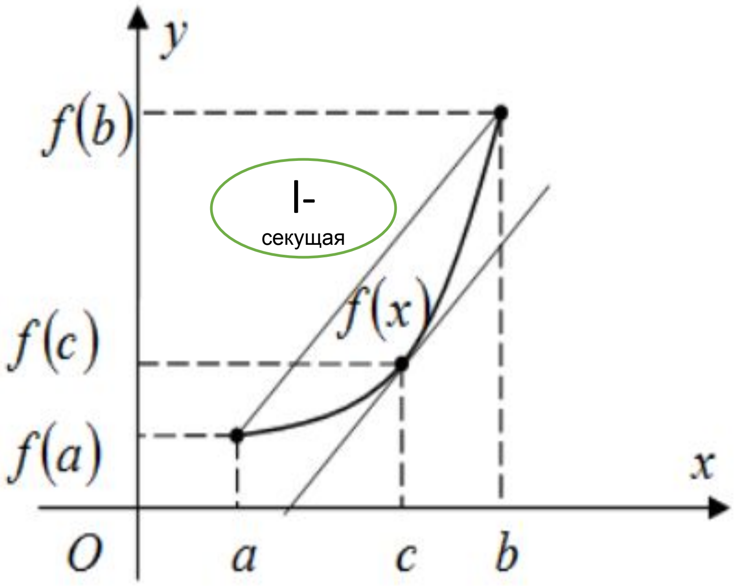


Рис. 1

ПРИМЕР 1

Задание Учитывая, что функция $f(x)=-x^2+2x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке $[1,3]$, найти точку $c \in (1,3)$, в которой

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{2}$$

Решение Вычислим значение заданной функции на концах отрезка $[1,3]$. Получим

$$f(1)=-1^2+2\cdot 1=1\ ;\ f(3)=-3^2+2\cdot 3=-3$$

Тогда

$$\frac{f(3)-f(1)}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2$$

Таким образом $f'(c)=-2$. Найдем производную заданной функции $f'(x)=-2x+2$. В точке x производная равна

$$f'(c)=-2c+2=-2$$

Получили уравнение относительно c. Решая его, получим, что $c=2$. Эта точка принадлежит заданному интервалу $(1,3)$.

Ответ $c=2$

ПРИМЕР 2

Задание На дуге кривой $f(x) = x^3 - x$ между точками $A(-2, -6)$ и $B(1, 0)$ найти точку $C(c, f(c))$, касательная в которой параллельна хорде AB.

Решение Согласно геометрическому смыслу теоремы Лагранжа, абсцисса точки C удовлетворяет условию:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Найдем значение правой части этого равенства:

$$\frac{0 - (-6)}{1 - (-2)} = 2$$

Тогда $f'(c) = 2$. Вычислим производную заданной функции $f'(x) = 3x^2 - 1$. В точке $C(c, f(c))$ она будет иметь значение

$$f'(c) = 3c^2 - 1 = 2$$

Решая полученное уравнение относительно c, имеем

$$3c^2 = 3 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

По условию теоремы Лагранжа $c \in (-2, 1)$, таким образом, подходит значение $c = -1$. Найдем ординату точки C

$$f(c) = (-1)^3 - (-1) = 0$$

Ответ $C(2, 0)$

6

Достаточный признак возрастания(убывания) функции

Теорема1.

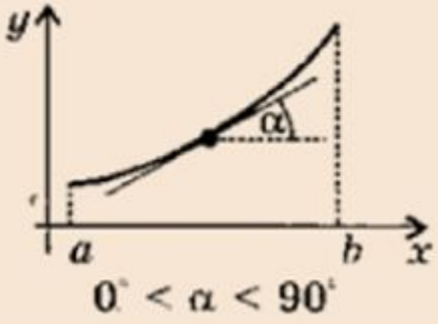
Если функция f(x) дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция возрастает на интервале (a;b)

Теорема 2.

Если функция f(x) дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция убывает на интервале (a;b)

6

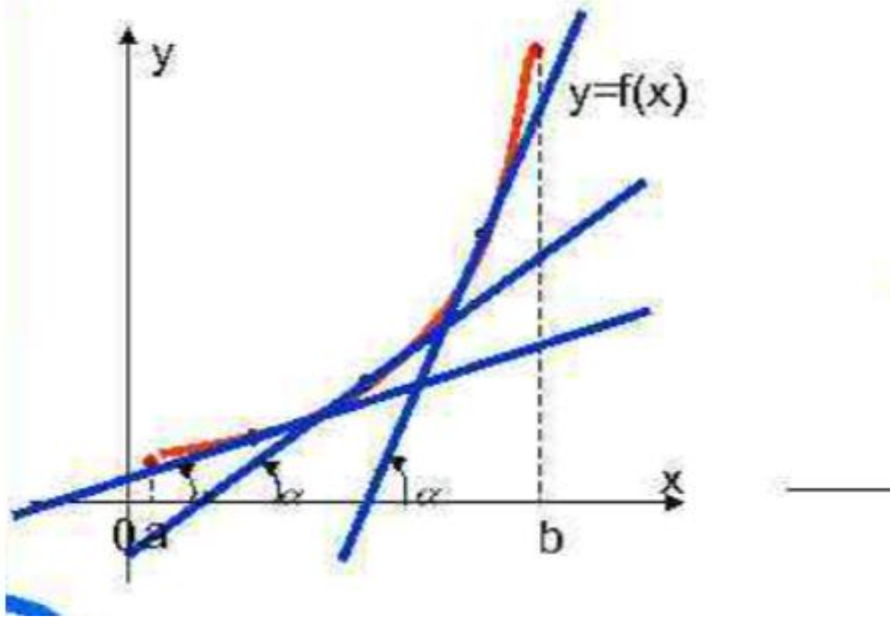
Монотонность функции



Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.

$$f(x) - \underset{\text{возрастает}}{\text{монотонно}} \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

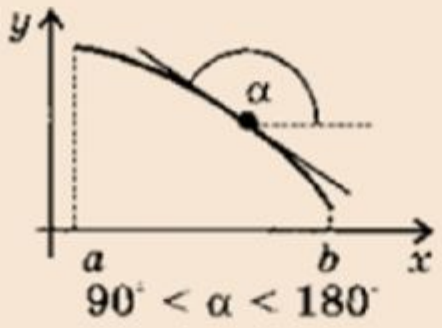


Касательная образует острый угол с осью абсцисс Ох и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т.е. функция возрастает.

$<\alpha$- острый, tg $\alpha > 0$,

$f'(x) > 0$

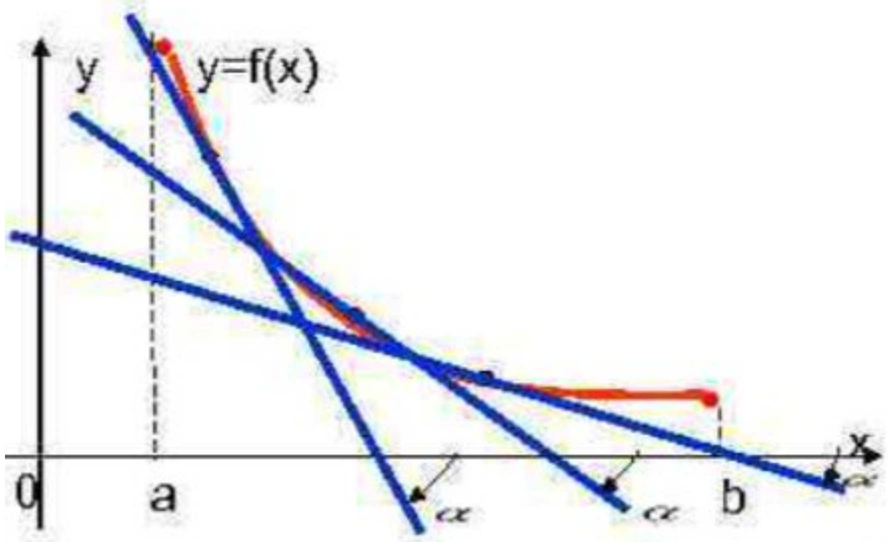
6



Достаточное условие убывания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

$$f(x) - \underset{\text{убывает}}{\text{монотонно}} \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

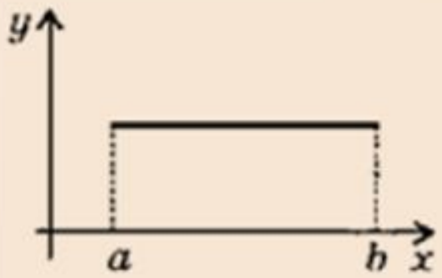


Касательная образует тупой угол с осью абсцисс Ох и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т.е. функция ***убывает.***

< α- тупой, tg α < 0,

$$f'(x) < 0$$

7

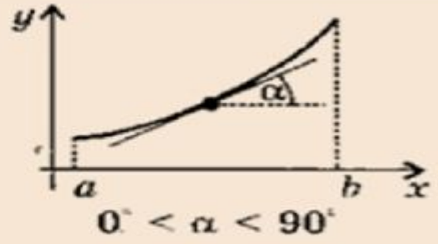


Необходимое и достаточное условие постоянства функции

Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

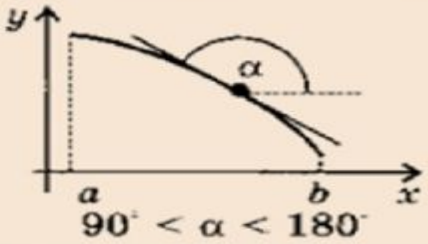
Обобщение

Монотонность функции



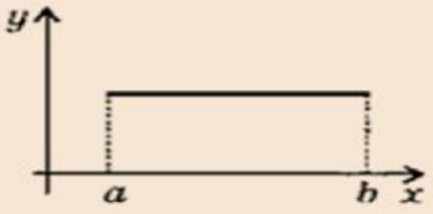
Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.



Достаточное условие убывания функции

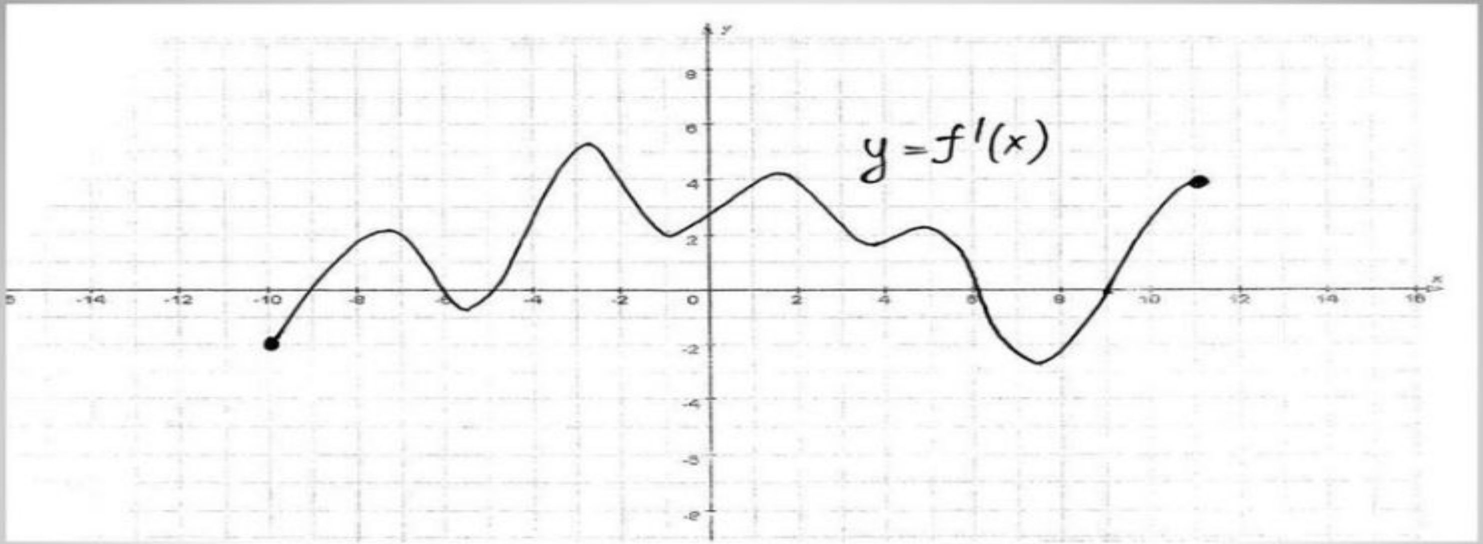
Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.



Необходимое и достаточное условие постоянства функции

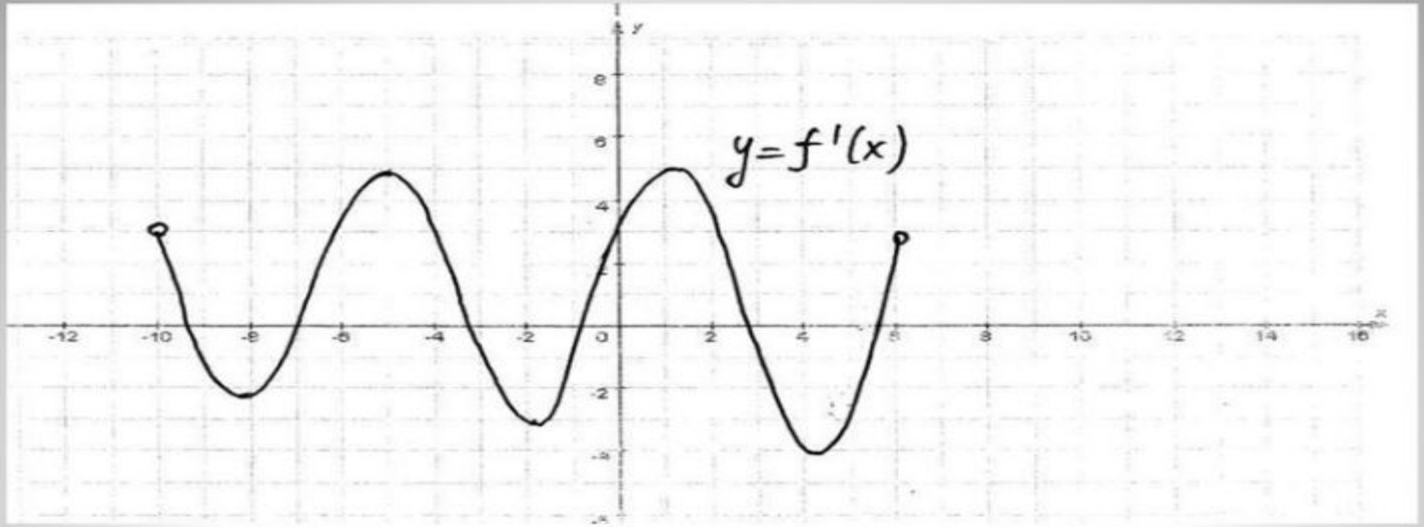
Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

Решение задач



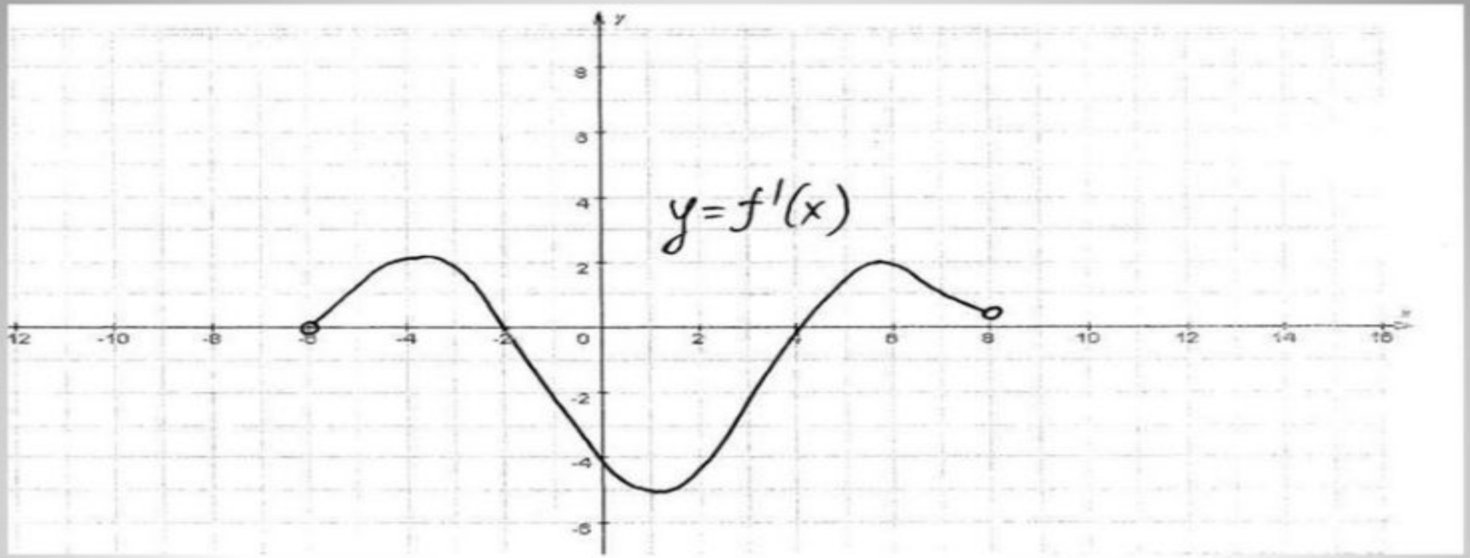
№1. Непрерывная функция y=f(x) задана на [-10;11]. На рисунке изображён график её производной. Укажите количество промежутков возрастания функции.

Решение задач



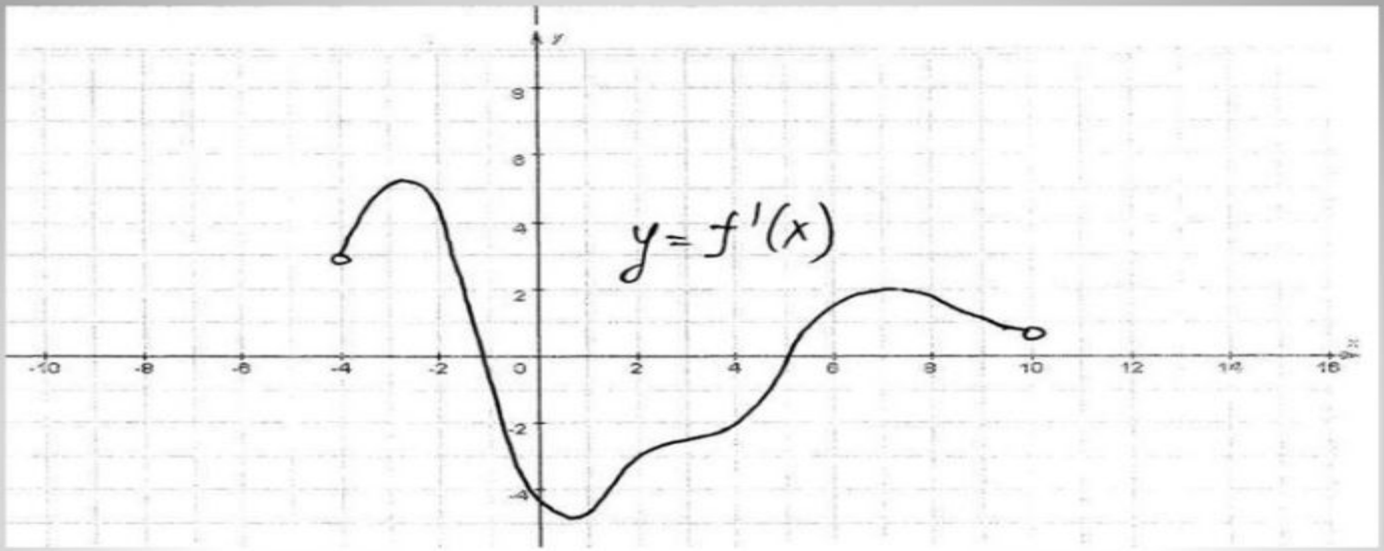
№2. Непрерывная функция y=f(x) задана на (-10;6). На рисунке изображён график её производной. Укажите количество промежутков убывания функции.

Решение задач



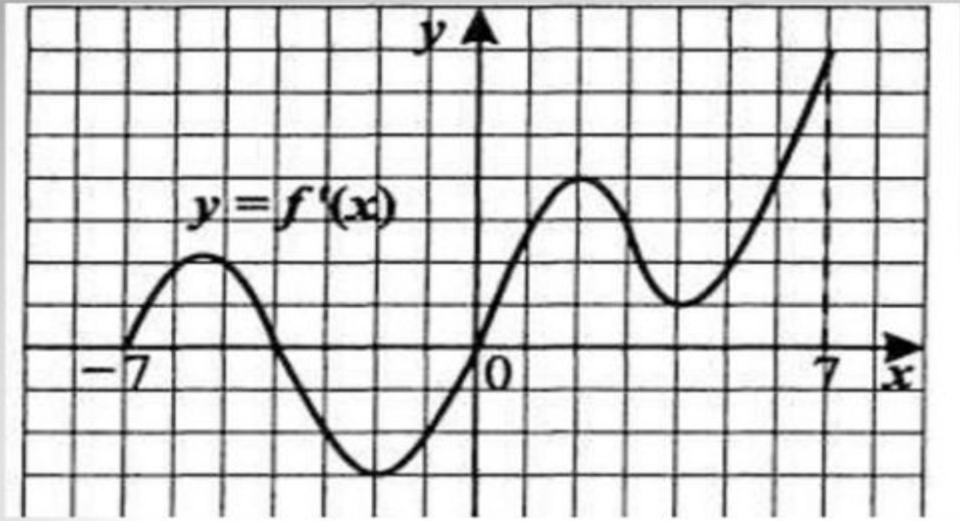
№3. Непрерывная функция y=f(x) задана на (-6;8). На рисунке изображён график её производной. Укажите длину промежутка убывания этой функции.

Решение задач



№4. Непрерывная функция y=f(x) задана на (-4;10). На рисунке изображён график её производной. Опишите последовательно типы монотонностей функции

Решение задач



№5. По графику функции y=f´(x) ответьте на вопросы:

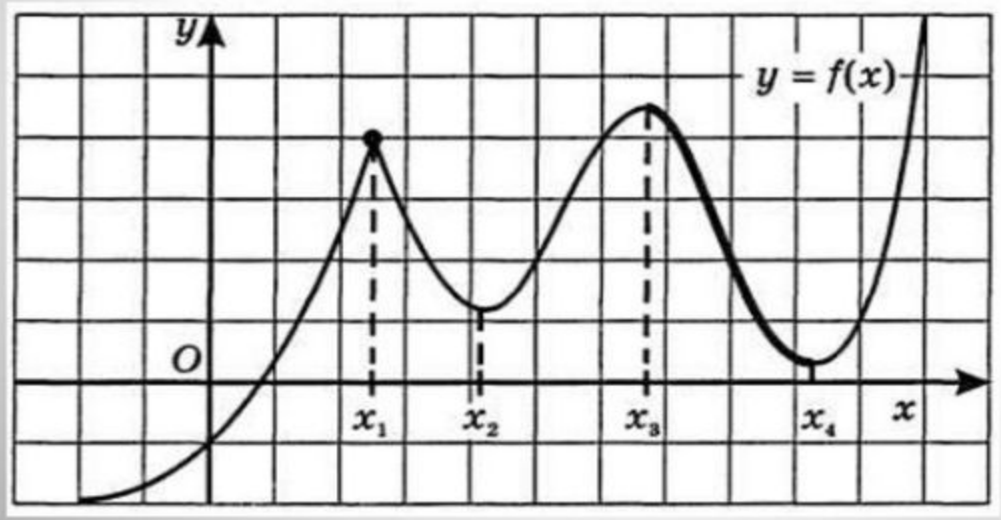
- Сколько промежутков возрастания у этой функции?
- Найдите длину промежутка убывания этой функции.

Решение задач

Пример №2.

По графику функции y=f(x) ответьте на вопросы:

- Сколько промежутков возрастания у этой функции?
- Назовите наименьший из промежутков убывания этой функции.

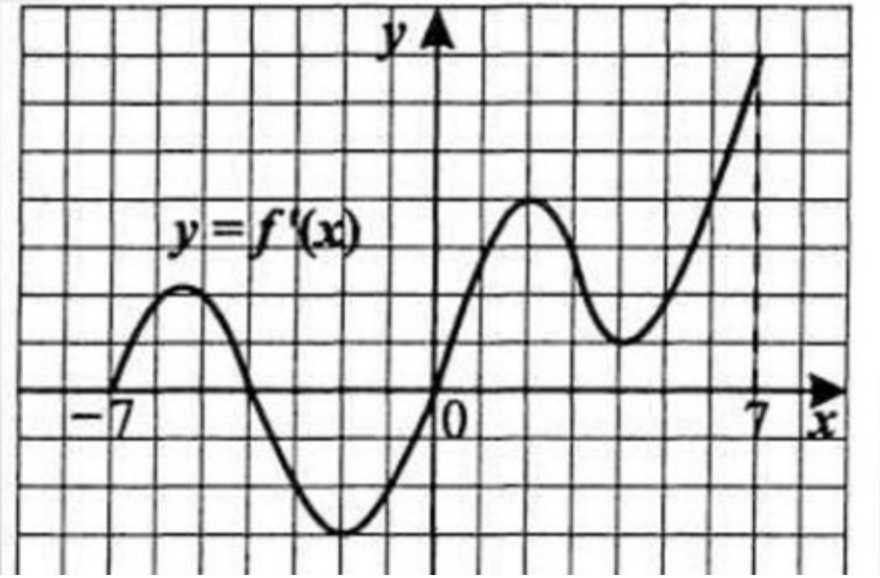


Решение задач

Пример №3. (задание B_8 из тестов ЕГЭ по математике)

По графику функции y=f´(x) ответьте на вопросы:

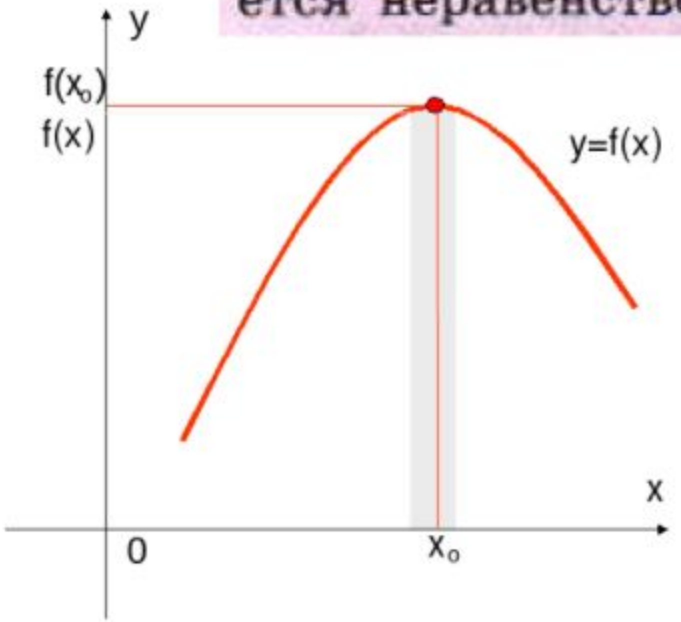
- Сколько промежутков возрастания у функции f(x)?
- Найдите длину промежутка убывания этой функции.



8

Максимум функции

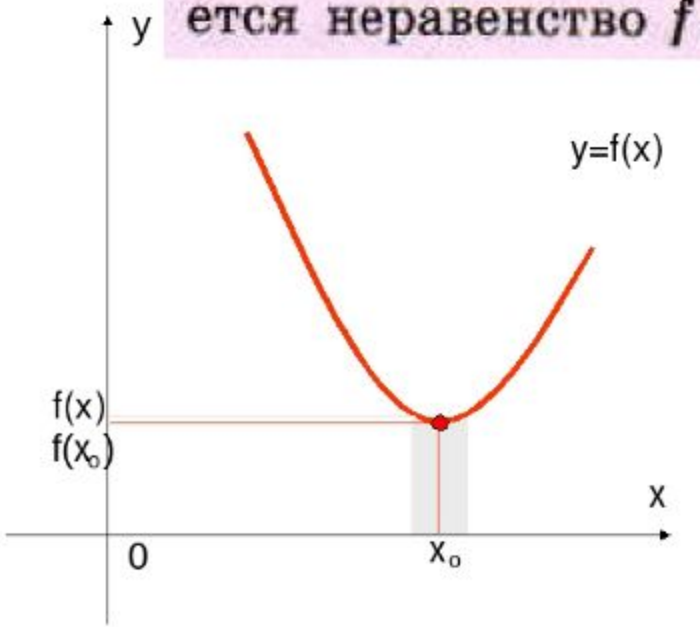
Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



8

Минимум функции

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



8

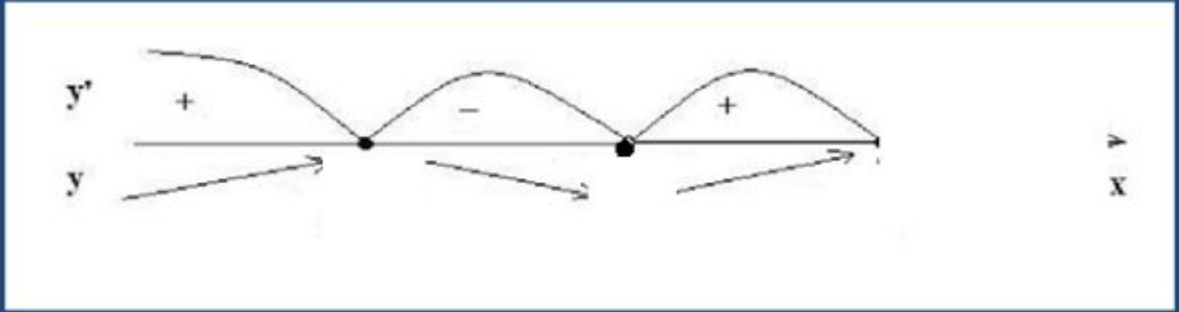
Точки минимума и максимума называются точками экстремума функции.

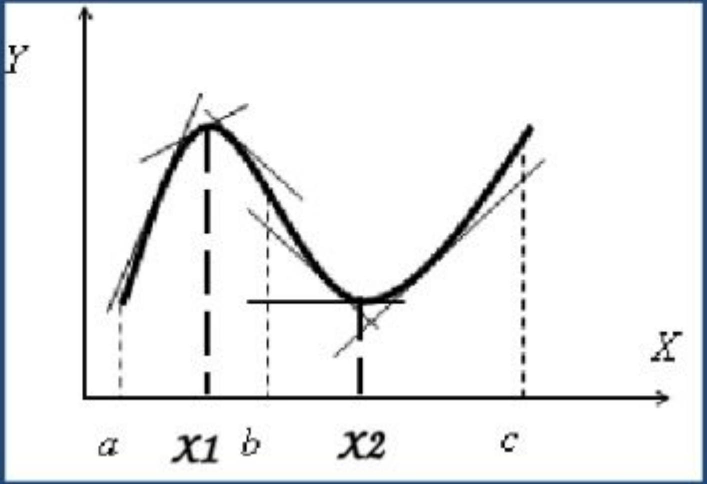
8

Пусть хо точка из области определения функции f(x) и $f'(x) = 0$ если

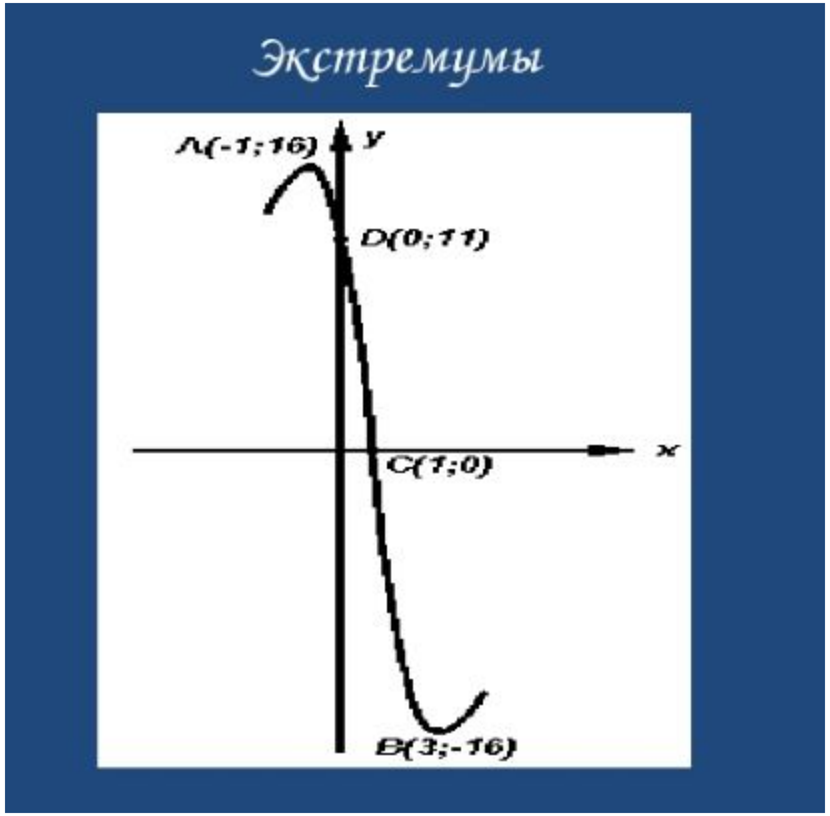
производная функции меняет свой знак с «+» на «-» в точке хо или наоборот, то эта точка

является Экстремумом.





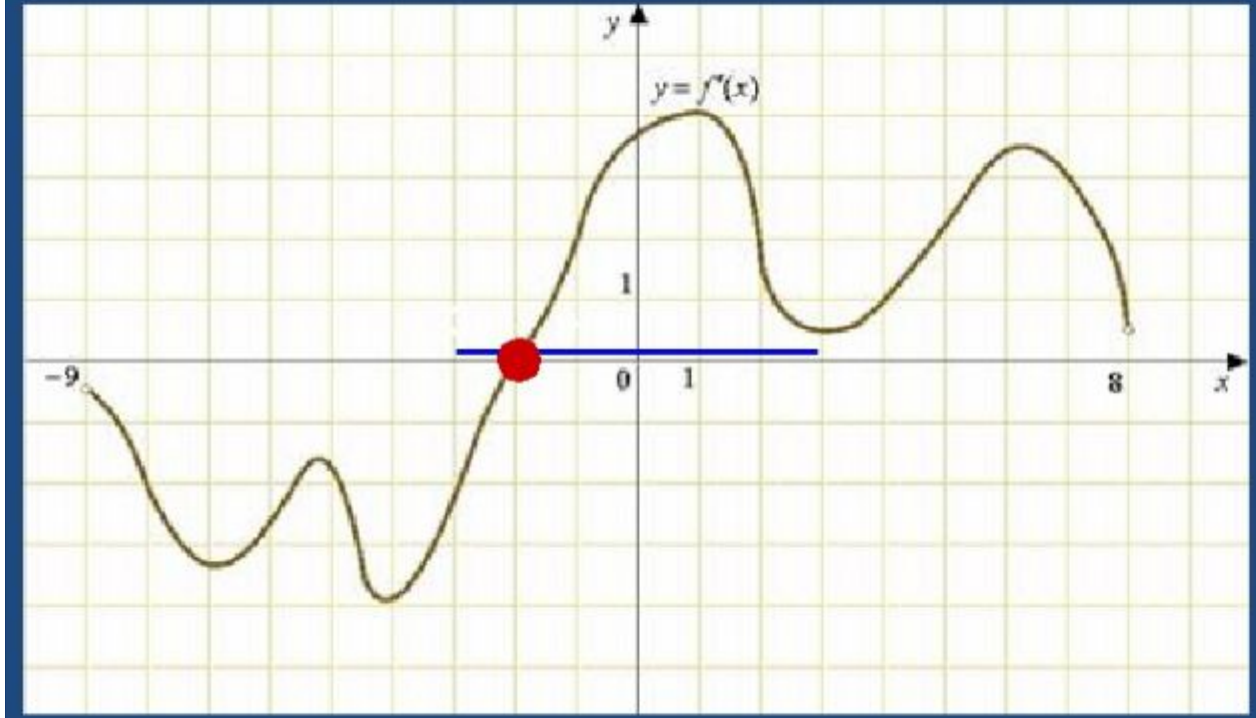
8


Экстремумы
A(-1;16)
y
D(0;11)
C(1;0)
x
B(3;-16)


Не являются экстремумами
y
y = x³
0
x

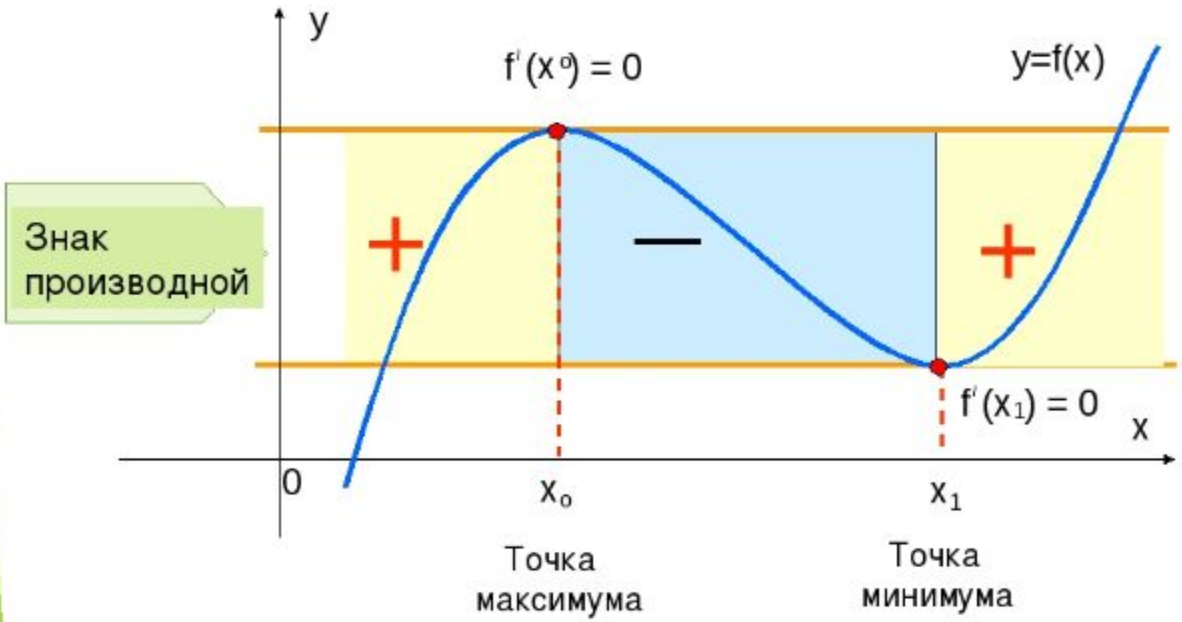
8

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (-9;8). Найдите точку экстремума функции на интервале (-3;3)



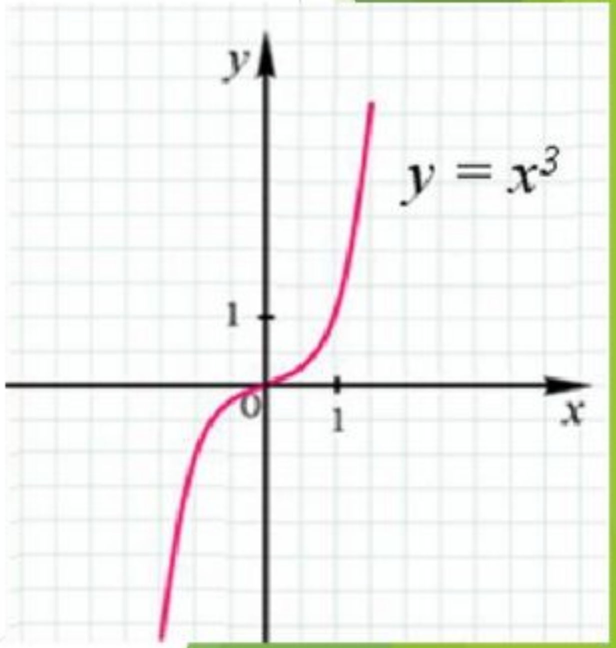
8

Точки максимума и минимума



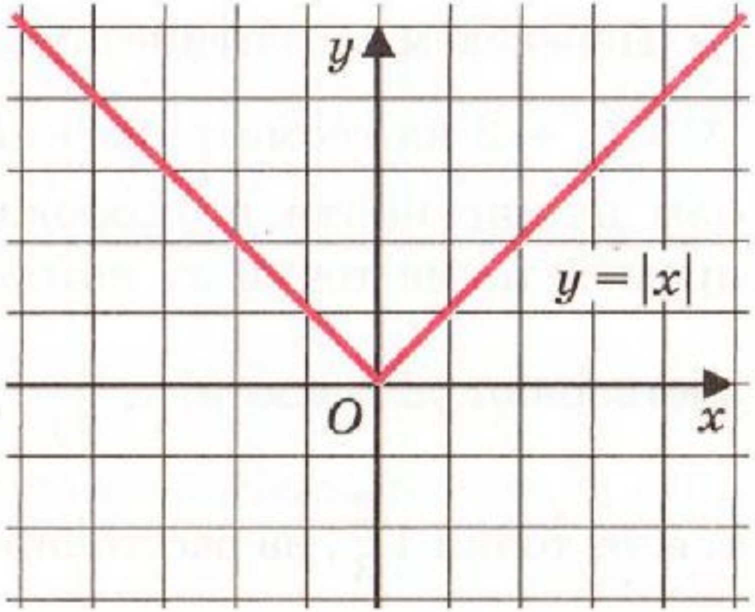
Точки, в которых производная функции равна 0, называют стационарными точками.

x=0 – точка , в которой производная равна 0, но она не является точкой экстремума.



9

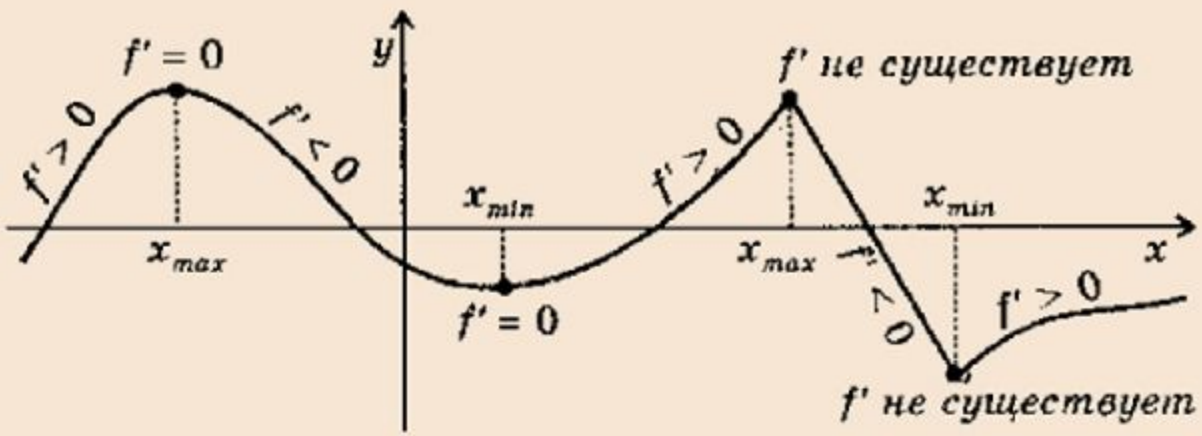
Точки, в которых функция имеет производную, равную 0 или не имеет производной, называют критическими точками.



x=0 – точка минимума, а производной в этой точке нет.

Примеры экстремумов функции

Замечание. В самой точке x_0 производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.



Точки из области определения функции, в которых:

$f'(x) = 0$ *или* *не существует,*

называются **критическими точками** *этой функции.*

Только они могут быть точками экстремума функции. (рис. 1 и 2).

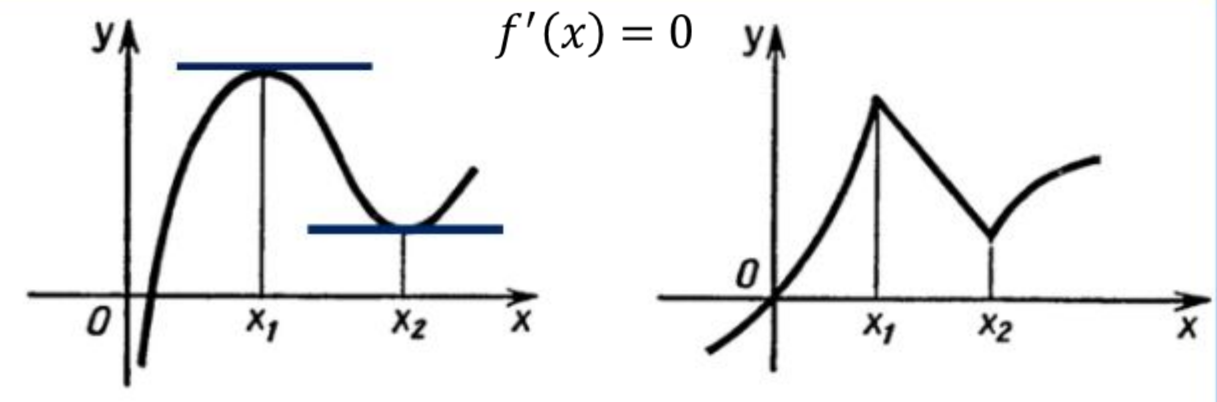


Рис. 1

Рис. 2

По заданным графикам функций $y=f(x)$ укажите:

- критические точки;
- стационарные точки;
- экстремумы функции.

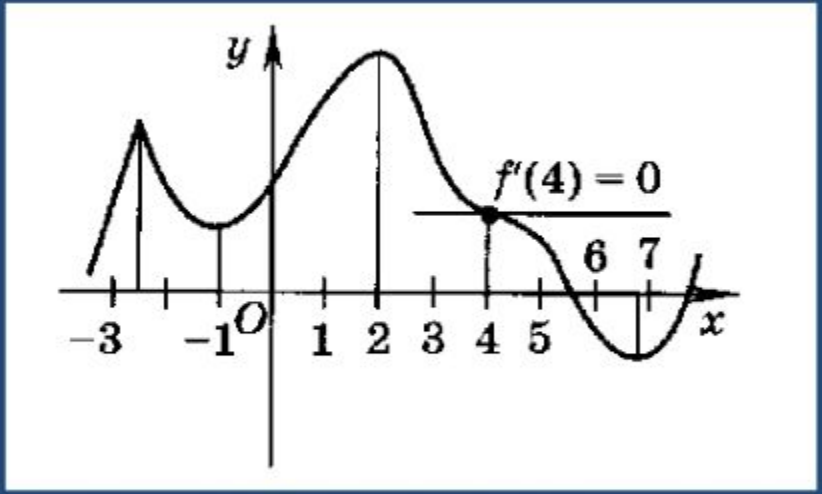
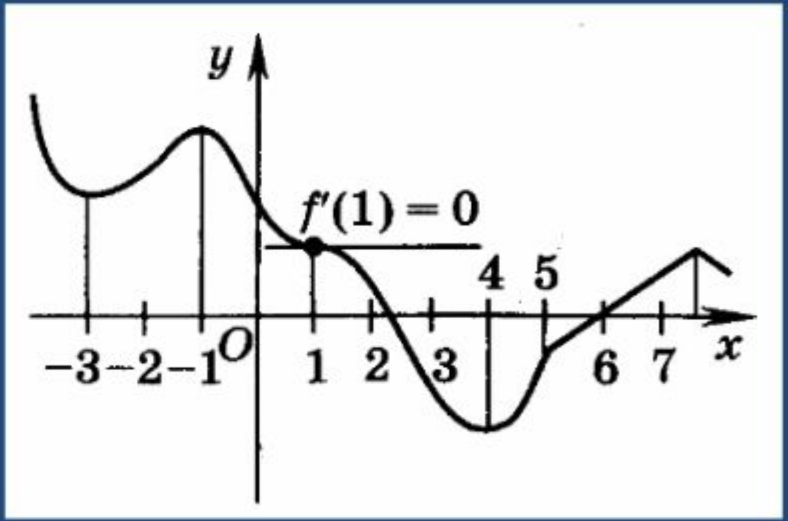


Рисунок 1

Рисунок 2



11

Экстремумы функции

Необходимое условие экстремума:

Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является *критической* точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

Достаточное условие экстремума:

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$.

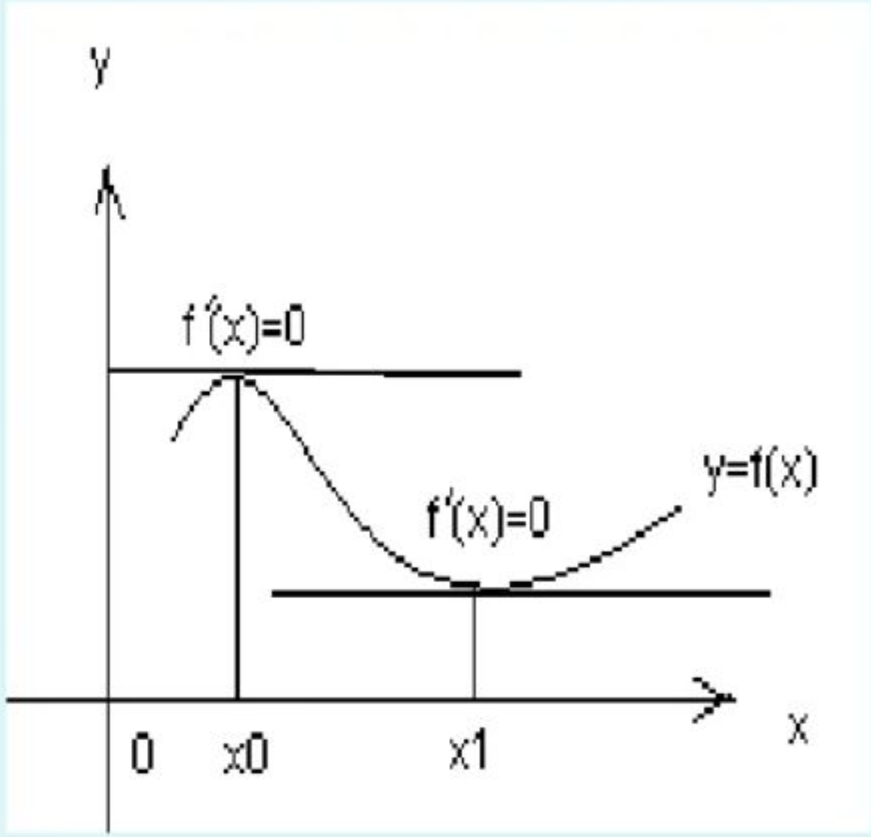
Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка максимума.	Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка минимума.

10

Теорема Ферма.

- Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции f(x), то $f'(x_0)=0$.

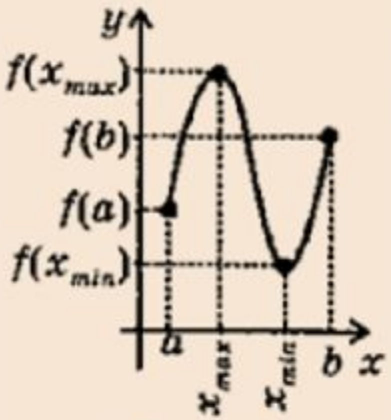
Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции y =f(x) в точке (x_0; f(x_0)), где x_0 – точка экстремума функции y=f(x), параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент f'(x) равен нулю.



Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

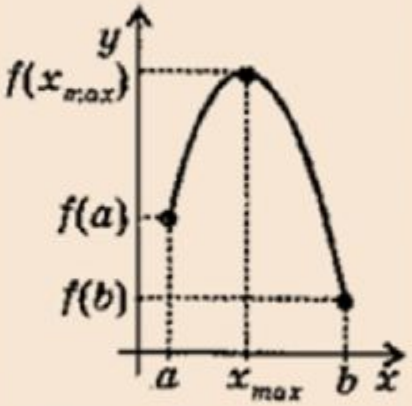
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:



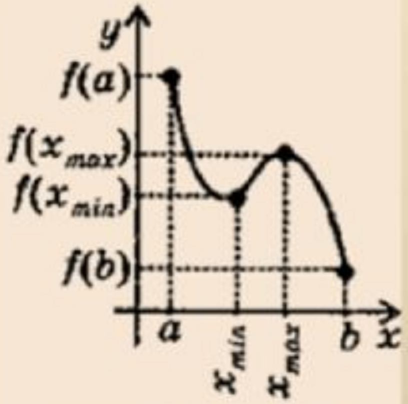
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

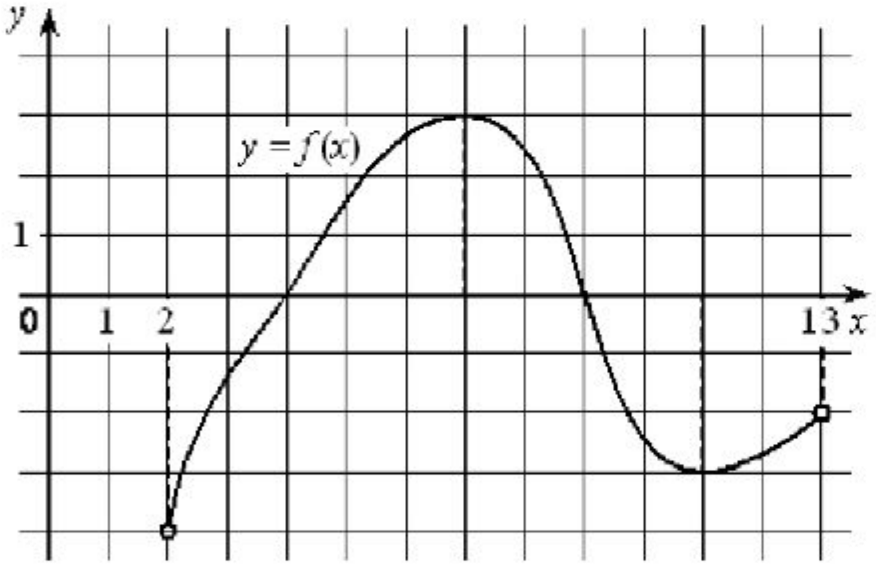
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$



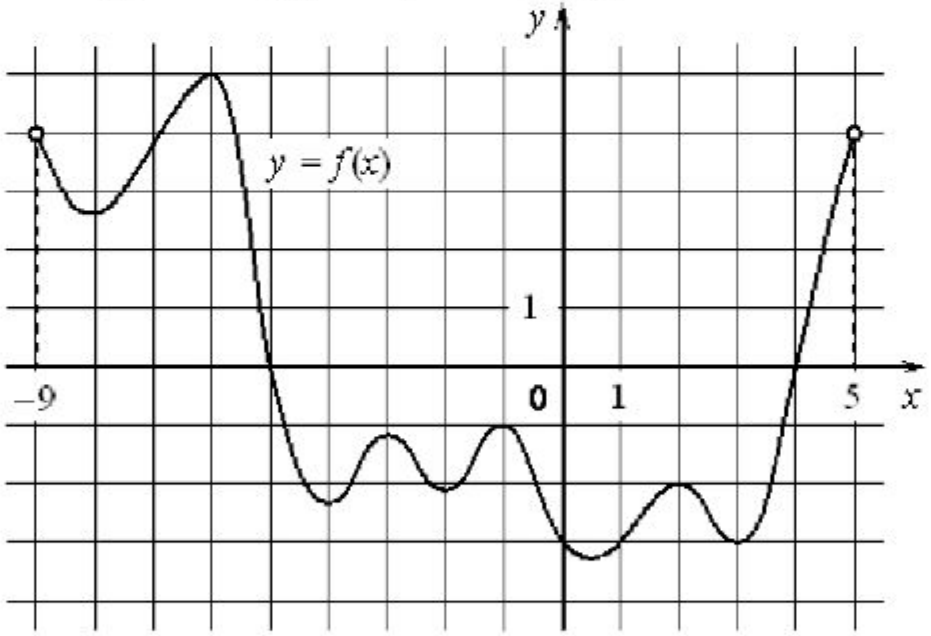
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$

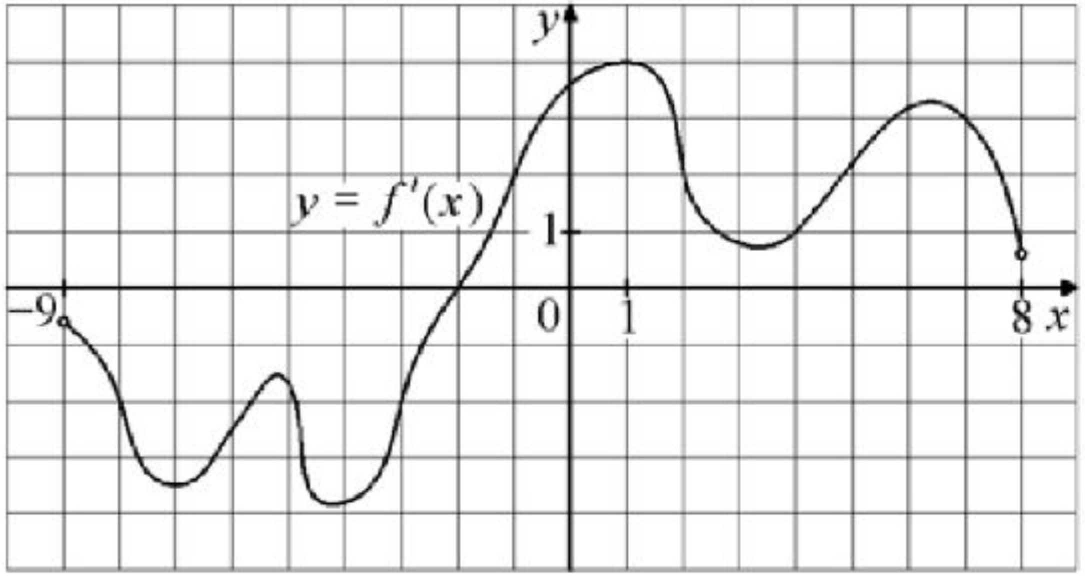
На рисунке изображён график
дифференцируемой функции ℝ=ℂ(ℜ),
определённой на интервале (<⁝;⁝; =).
Найдите точку из отрезка [⁝ ⁝;⁝; <],
в которой производная функции ℂ(ℜ) равна 0.



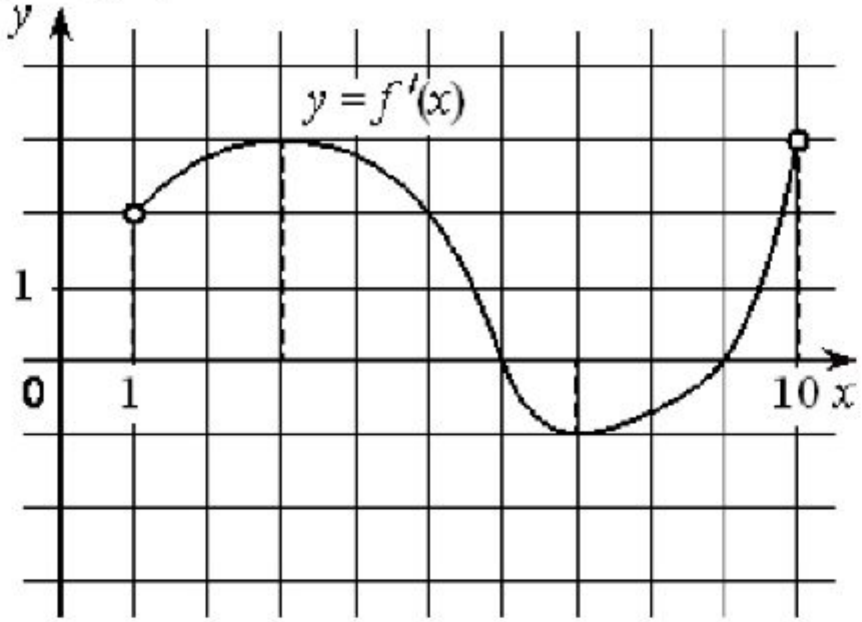
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



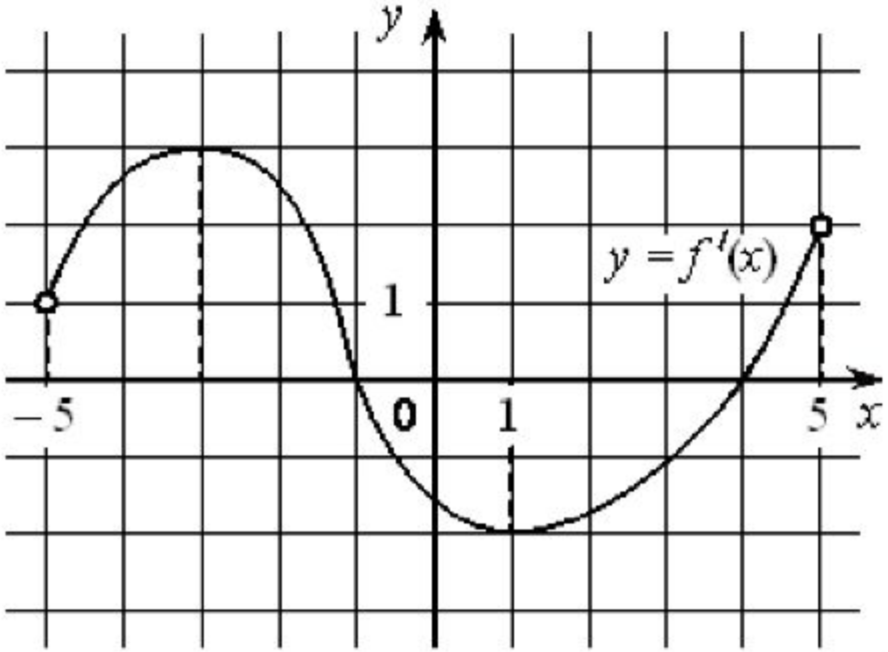
На рисунке изображён график ℝ=ℂ(ℜ) — производной функции ℂ(ℜ), определённой на интервале (−~;[]). Найдите точку экстремума функции ℂ(ℜ) на отрезке [−=;[]=].



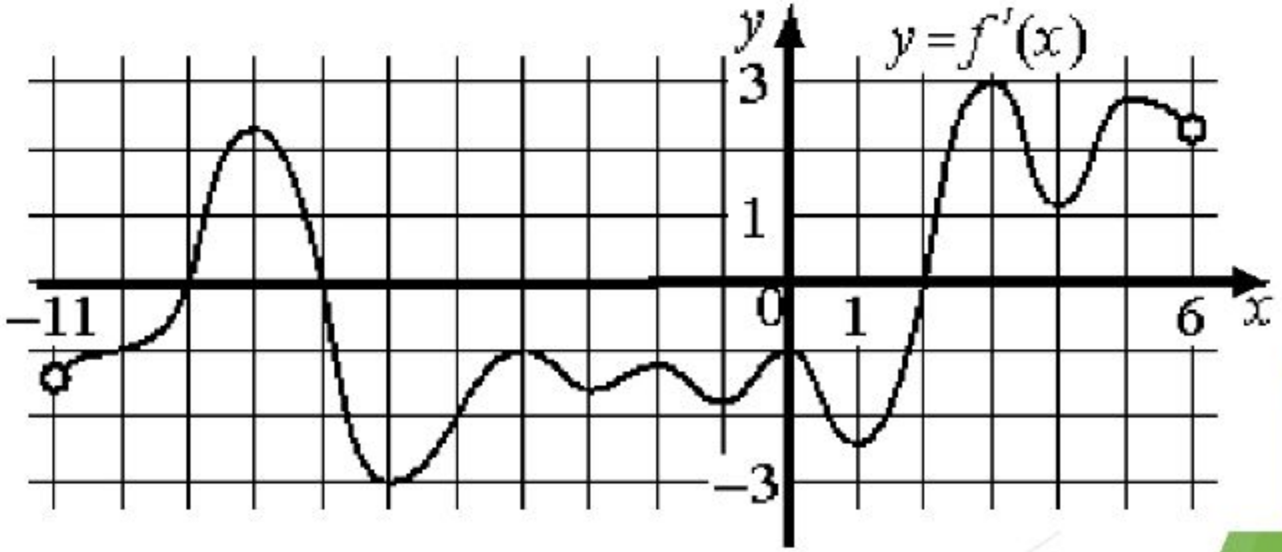
На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (; ;; :). Найдите точку минимума функции $f(x)$



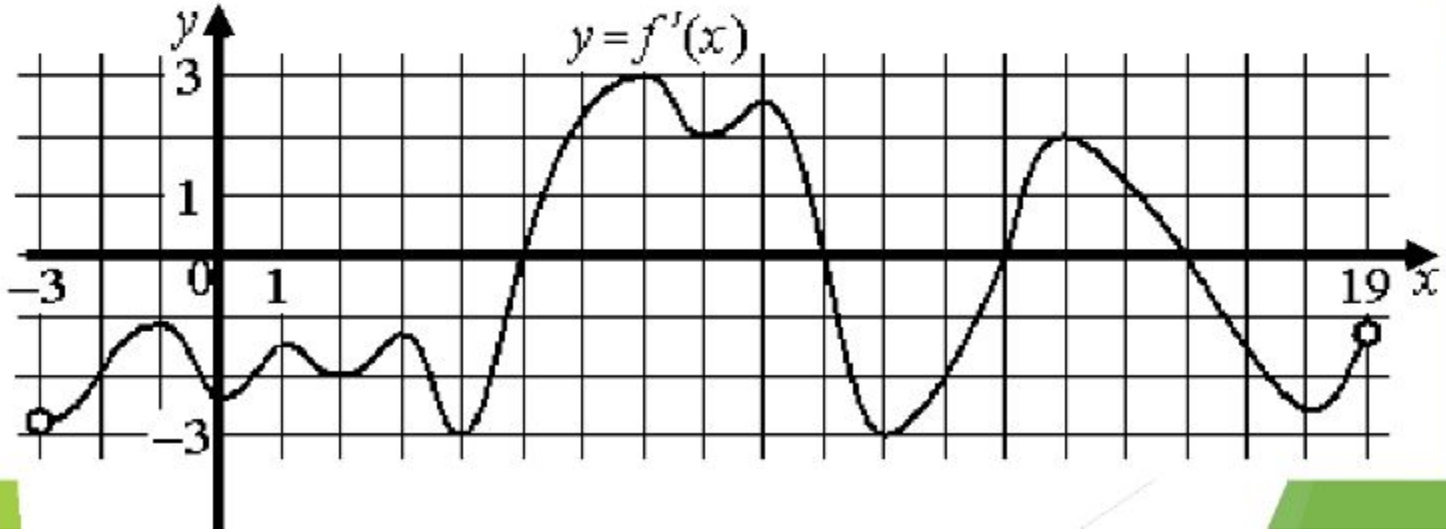
На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-$[illegible]$;$ [illegible]$]$.

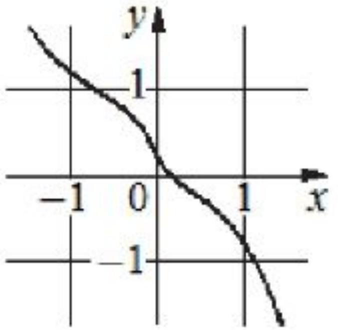


На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [illegible].

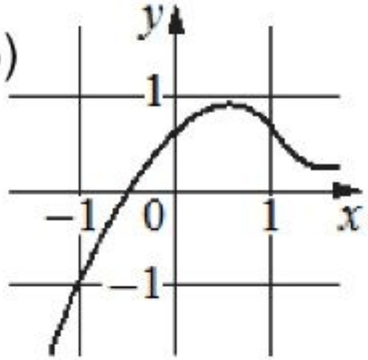


Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [– 1; 1] .

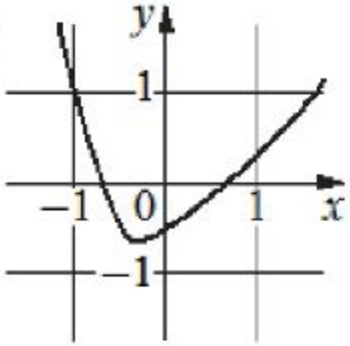
А)



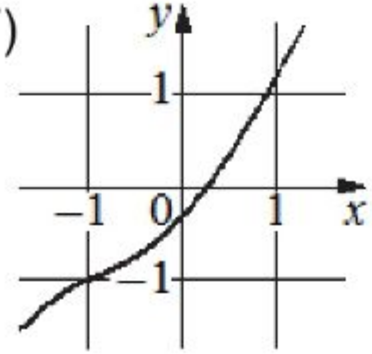
Б)



В)



Г)



1) функция возрастает на отрезке [−1; 1]

2) функция убывает на отрезке [−1; 1]

3) функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]

4) функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]