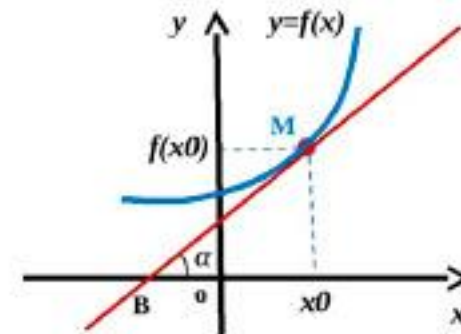
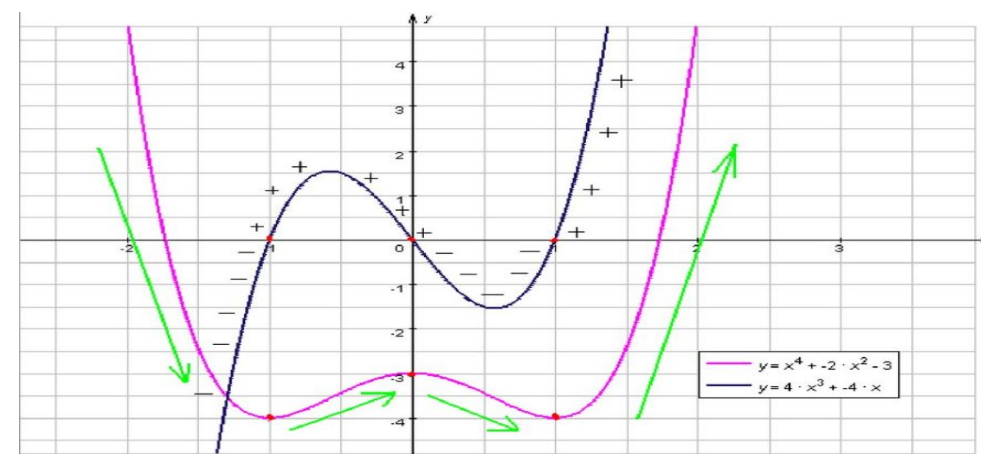


Вопросы к зачету по теме : Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

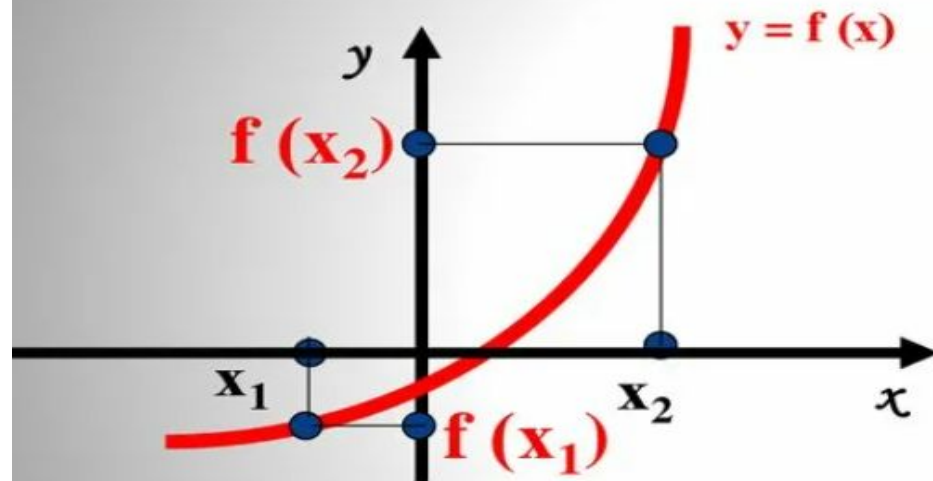


- 1) Какая функция называется возрастающей (определение + свойство производной, график) . Примеры.
- 2) Какая функция называется убывающей. (определение + свойство производной, график). Примеры.
- 3) Какие функции называются монотонными. Монотонно возрастающие, монотонно убывающие функции. Примеры.
- 4) Способы исследования функции на монотонность. Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции с помощью производной. Решение примера.
- 5) Теорема Лагранжа. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.
- 6) Теорема о достаточном условии возрастания и убывания функции.
- 7) Необходимые и достаточные условия постоянства функции.
- 8) Точки экстремума . Точки минимума и точки максимума.
- 9) Стационарные точки и критические точки.
- 10) Теорема Ферма. Геометрический смысл теоремы Ферма.
- 11) Необходимое и достаточное условие Теоремы Ферма



автор, лицензия: [CC BY](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Возрастающая функция



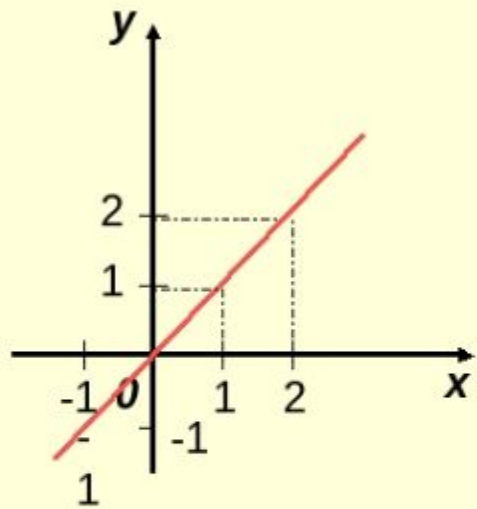
Функция $f(x)$ называется
возрастающей
на некотором интервале,
если для любых x_1 и x_2 из этого
интервала, таких, что

$$x_2 > x_1$$

следует неравенство

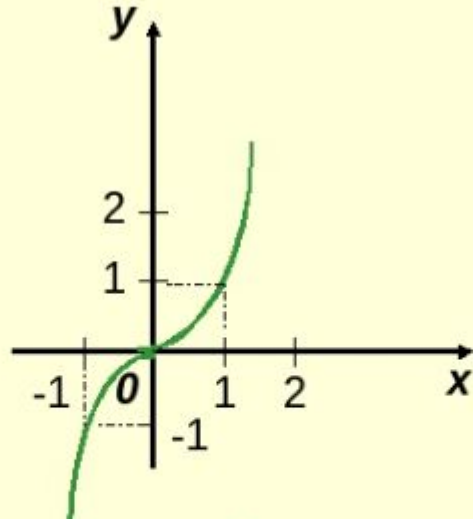
$$f(x_2) > f(x_1).$$

Примеры возрастающей функции.



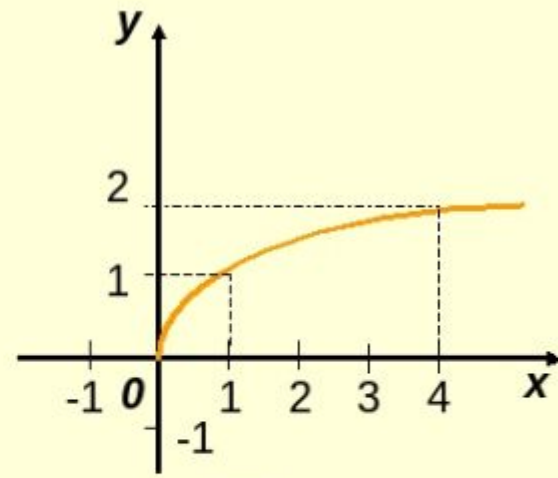
$$y = x$$

возрастают на всей числовой прямой



$$y = x^3$$

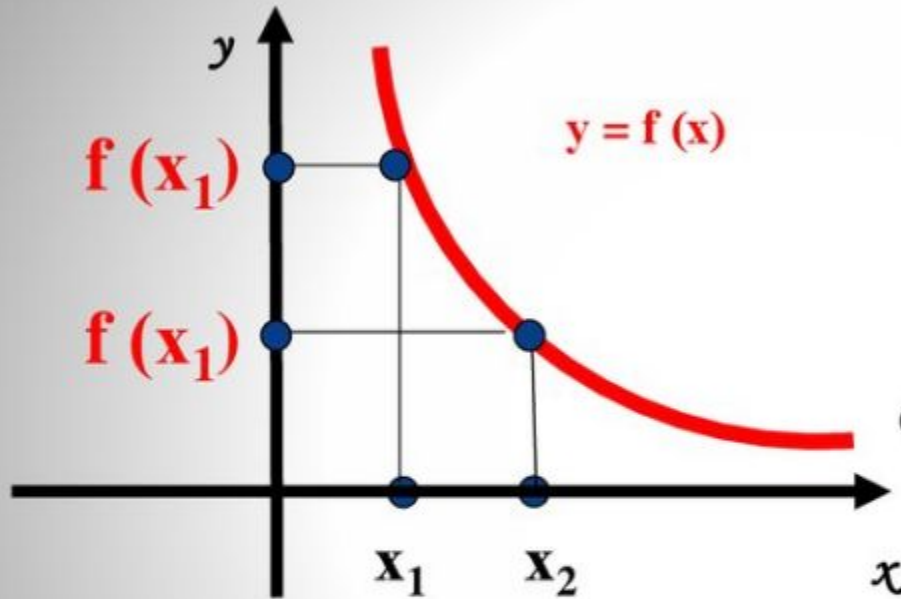
возрастает на промежутке $x \geq 0$



$$y = \sqrt{x}$$

- Если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то функция возрастает на этом интервале.

Убывающая функция



Функция $f(x)$ называется
убывающей

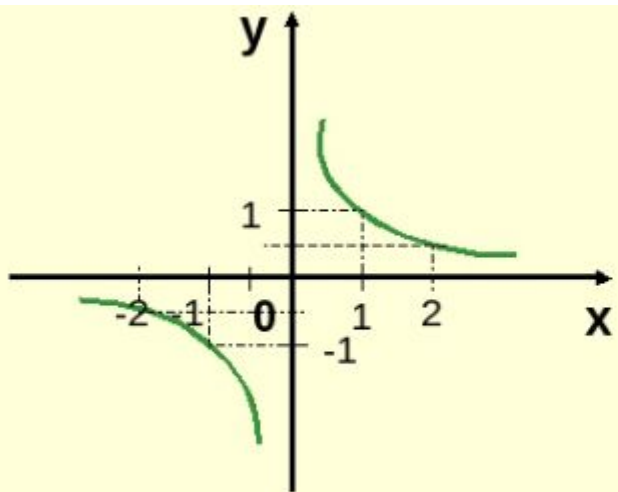
на некотором интервале,
если для любых x_1 и x_2 из этого
интервала, таких, что

$$x_2 > x_1$$

следует неравенство

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Примеры возрастающей функции.



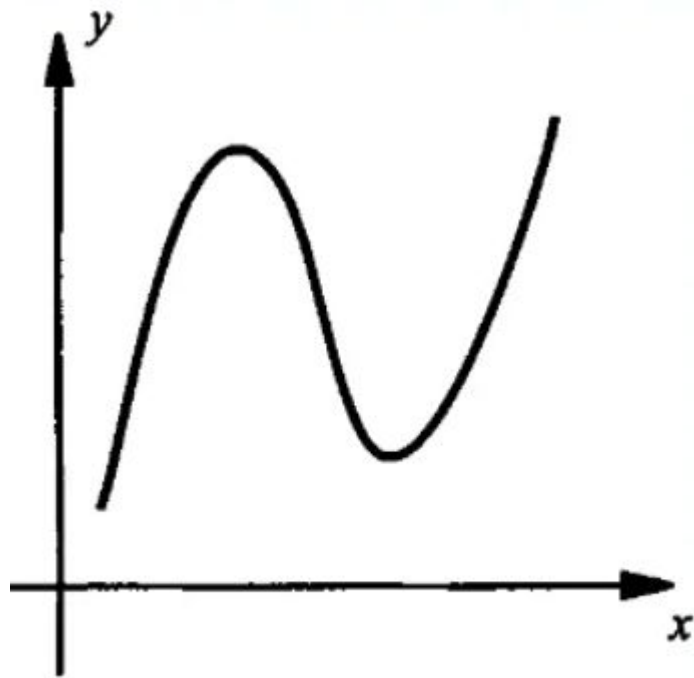
$y = 1/x$ - убывает на всей области определения

- Если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то функция убывает на этом интервале.

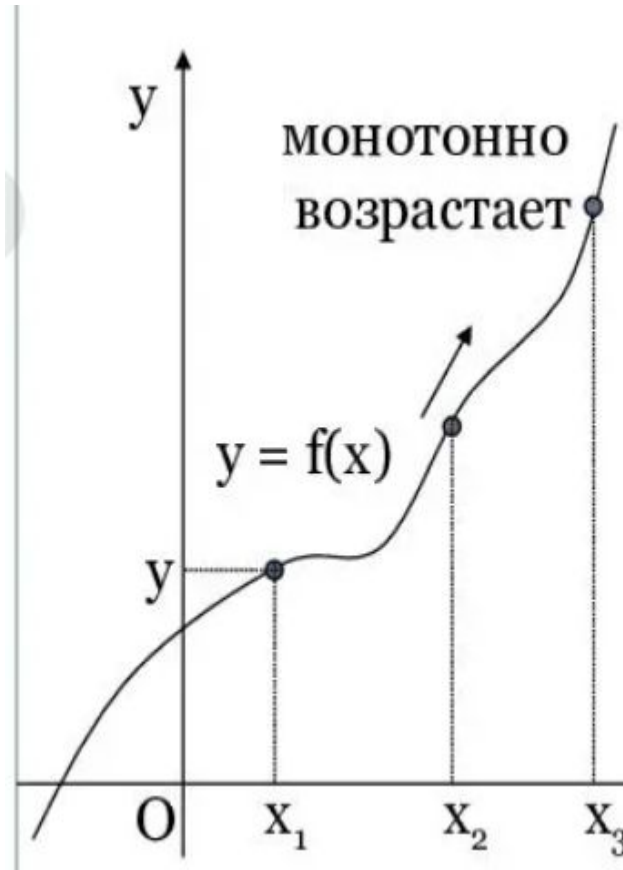
Монотонная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функция называется **монотонной** на промежутке, если она на этом промежутке или возрастает, или убывает.

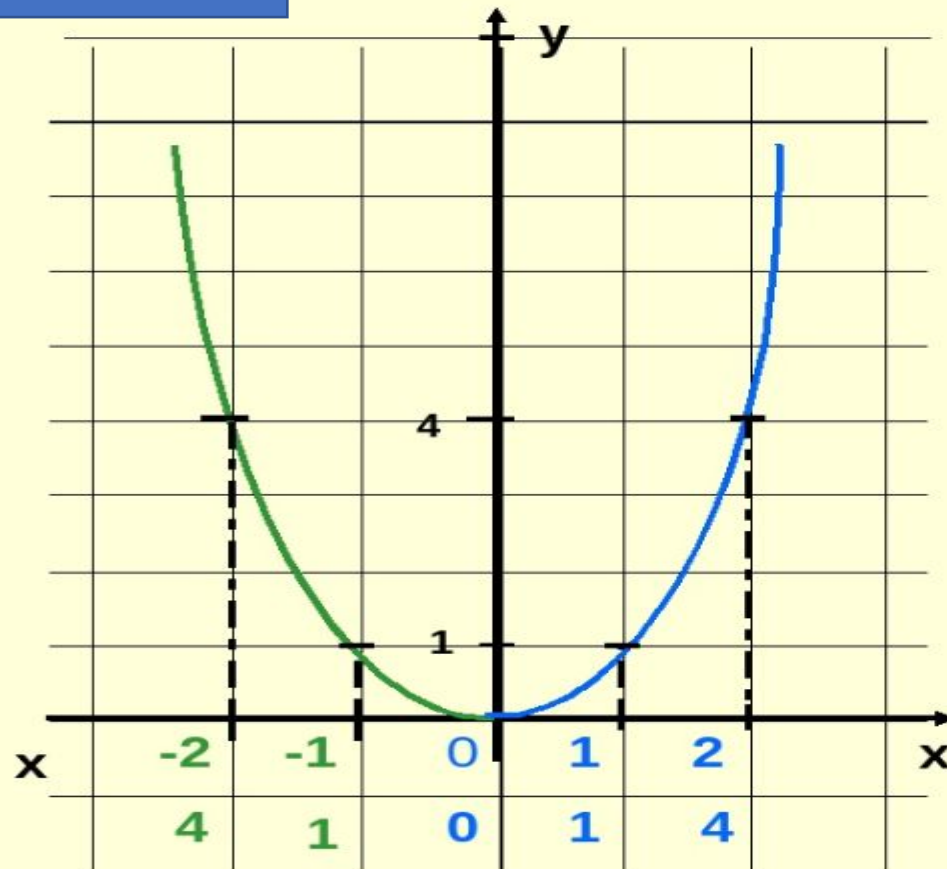


Немонотонная функция



Функция монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и монотонно убывает на промежутке $(-\infty; 0]$

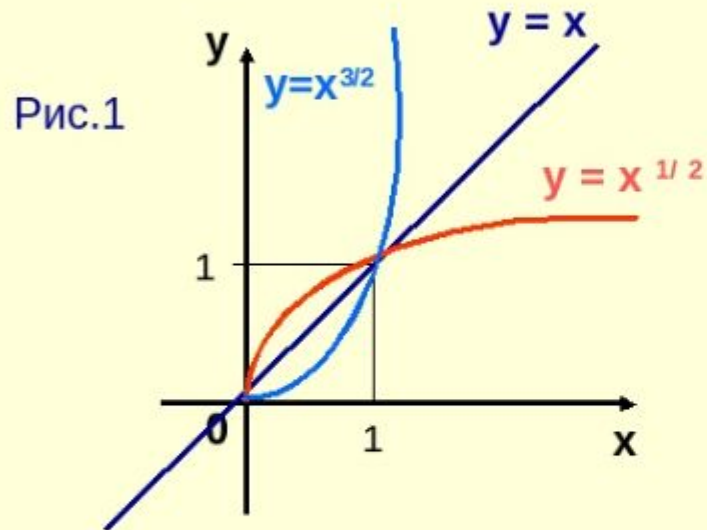
Промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2$



На промежутке $x \leq 0$
функция убывает:
 $-1 > -2$, но $y(-1) < y(-2)$

На промежутке $x \geq 0$
функция возрастает:
 $2 > 1$ и $y(2) > y(1)$.

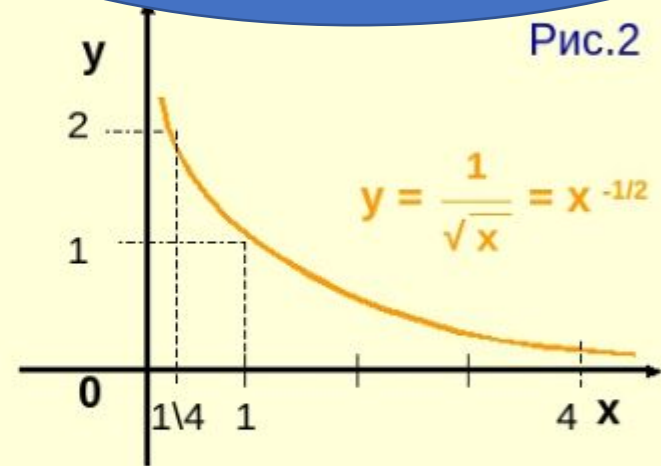
Монотонно возрастающие степенные функции



возрастают на промежутке $x \geq 0$

$$r > 0$$

Монотонно убывающая степенная функция



убывает на промежутке $x > 0$

$$r < 0$$

Вывод:

если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geq 0$;
если $r < 0$, то степенная функция $y = x^r$ убывает на промежутке $x > 0$.

Повторение

Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 3 - 2x$;

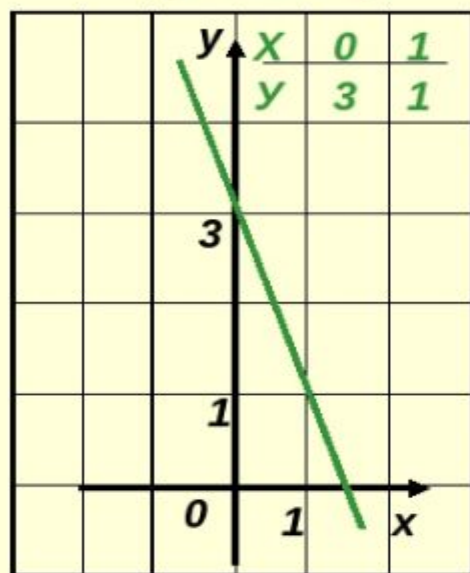
2) $y = 2 - x^2$;

3) $y = (x - 2)^2$.

Повторение

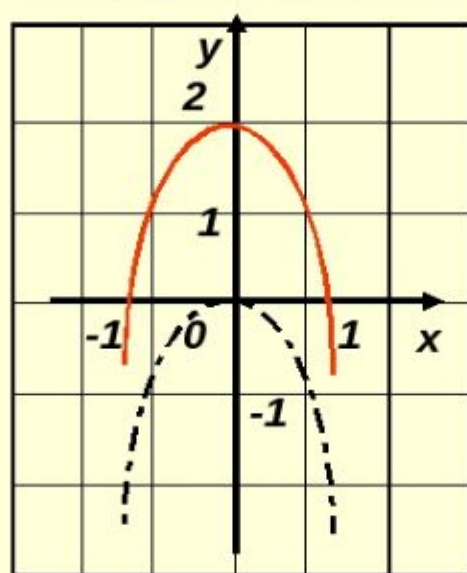
Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 3 - 2x$;



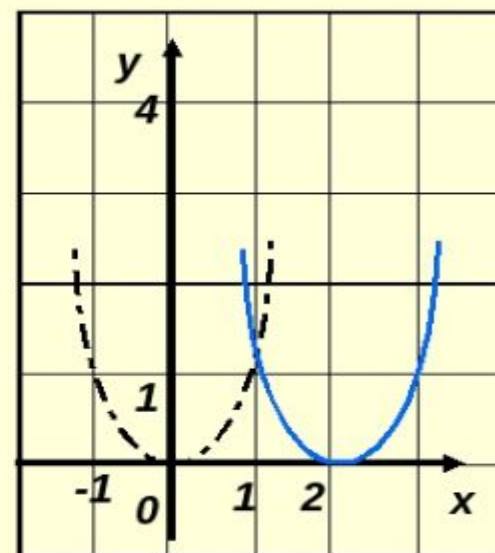
Убывает на всей числовой оси

2) $y = 2 - x^2$;



На промежутке $x \leq 0$ возрастает,
на промежутке $x \geq 0$ убывает

3) $y = (x - 2)^2$.



На промежутке $x \geq 2$ возрастает,
на промежутке $x \leq 2$ убывает

Способы исследования функций на монотонность

Способ 1. По определению
возрастающей (убывающей) функции.

Способ 2. По графику функции.

Пример №1. Исследуйте функцию $f(x) = 1/x$ на монотонность.

Решение.

$$D(f) : x \neq 0$$

Пусть x_2 и x_1 - произвольные точки из $D(f)$ такие, что $x_2 > x_1$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = 1/x_2 - 1/x_1 = (x_1 - x_2)/x_2 x_1 < 0$, значит данная функция убывает на каждом из двух промежутков своей области определения.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Определить промежутки, в которых $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
4. Сделать выводы о монотонности функции.

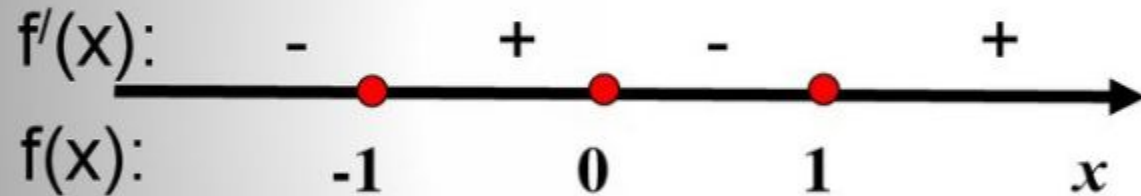
Образец решения по алгоритму

$$f(x) = x^4 - 2x^2,$$

1. $D(f) = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = 4x^3 - 4x,$

3. $f'(x) > 0$, если $4x^3 - 4x > 0$, $x^3 - x > 0$, $x(x-1)(x+1) > 0$



4. Функция убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[(0; 1)]$.

Функция возрастает на промежутках $[(-1; 0)]$ и $[(1; +\infty)]$

Повторение

Дифференцируемая функция

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Повторение

Таблица производных

$$1. c' = 0,$$

$$2. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$$

$$3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$$

$$4. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$$

$$5. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u',$$

$$6. (e^u)' = e^u \cdot u',$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$$

$$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$9. (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$10. (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$11. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$$

$$12. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$$

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях)

Пусть функция $y = f(x)$

а) определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$

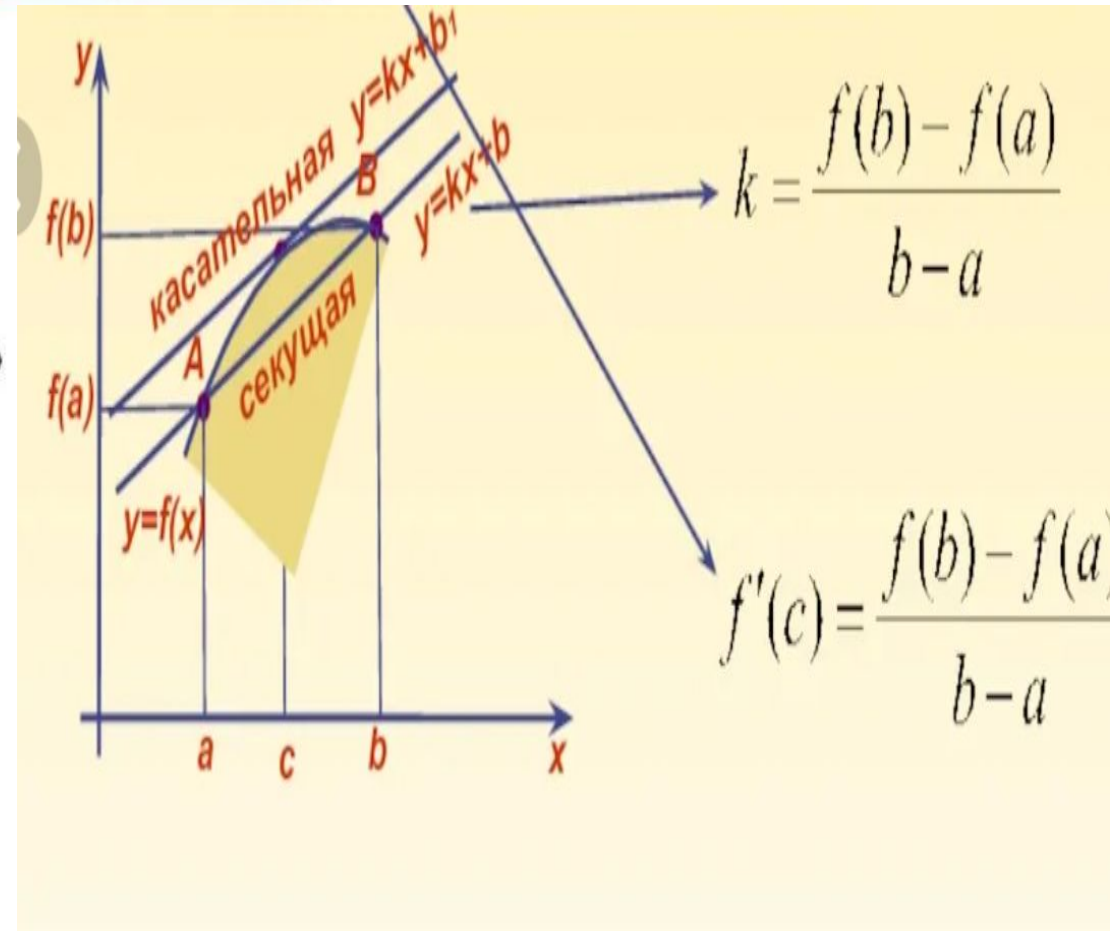
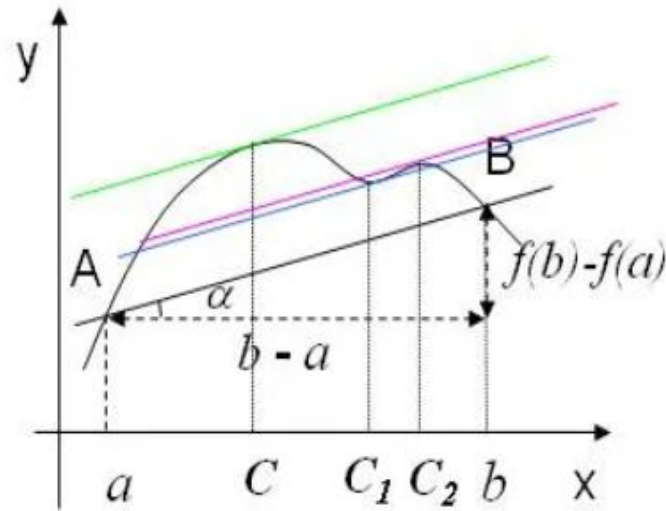
б) дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда найдется хотя бы одна точка $C \in (a, b)$, такая, что

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Геометрически

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(C)$$



Геометрический смысл теоремы Лагранжа

На графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная к которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и b (рис. 1).

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке C с абсциссой c равен угловому коэффициенту секущей l , т.е. на интервале (a, b) найдется такая точка c , что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна секущей.

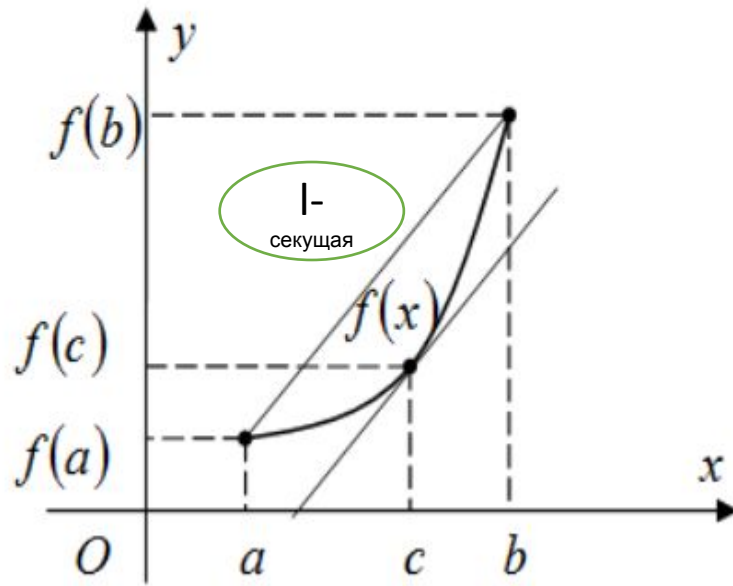


Рис. 1

ПРИМЕР 1

Задание Учитывая, что функция $f(x) = -x^2 + 2x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке $[1, 3]$, найти точку $c \in (1, 3)$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

Решение Вычислим значение заданной функции на концах отрезка $[1, 3]$. Получим

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1 ; f(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$$

Тогда

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

Таким образом $f'(c) = -2$. Найдем производную заданной функции $f'(x) = -2x + 2$. В точке x производная равна

$$f'(c) = -2c + 2 = -2$$

Получили уравнение относительно c . Решая его, получим, что $c = 2$. Эта точка принадлежит заданному интервалу $(1, 3)$.

Ответ $c = 2$

ПРИМЕР 2

Задание На дуге кривой $f(x) = x^3 - x$ между точками $A(-2, -6)$ и $B(1, 0)$ найти точку $C(c, f(c))$, касательная в которой параллельна хорде AB .

Решение Согласно геометрическому смыслу теоремы Лагранжа, абсцисса точки C удовлетворяет условию:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Найдем значение правой части этого равенства:

$$\frac{0 - (-6)}{1 - (-2)} = 2$$

Тогда $f'(c) = 2$. Вычислим производную заданной функции $f'(x) = 3x^2 - 1$. В точке $C(c, f(c))$ она будет иметь значение

$$f'(c) = 3c^2 - 1 = 2$$

Решая полученное уравнение относительно c , имеем

$$3c^2 = 3 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

По условию теоремы Лагранжа $c \in (-2, 1)$, таким образом, подходит значение $c = -1$. Найдем ординату точки C

$$f(c) = (-1)^3 - (-1) = 0$$

Ответ $C(2, 0)$

Достаточный признак возрастания(убывания) функции

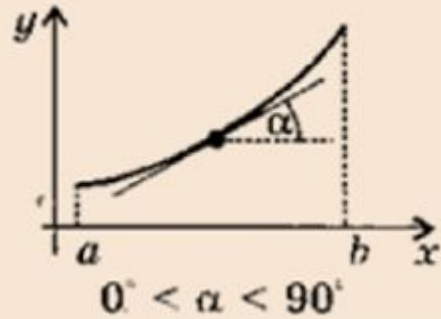
Теорема 1.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция возрастает на интервале $(a;b)$

Теорема 2.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция убывает на интервале $(a;b)$

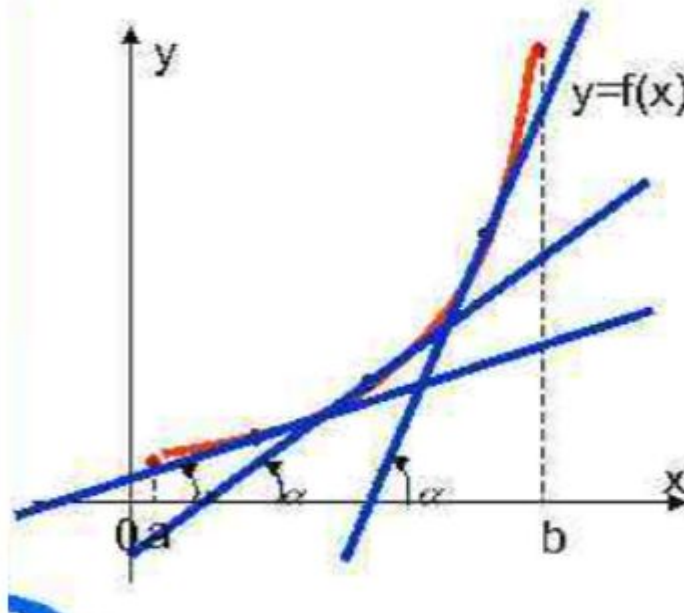
Монотонность функции



*Достаточное условие
возрастания функции*

Если в каждой точке интервала $(a; b)$
 $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно
возрастает на этом интервале.

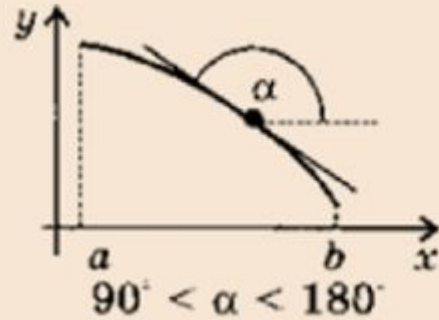
$f(x)$ — $\begin{matrix} \text{МОНОТОННО} \\ \text{возрастает} \end{matrix} \Leftrightarrow f'(x) > 0$



Касательная образует **острый**
угол с осью абсцисс Ox и
поэтому график функции на этом
промежутке «поднимается», т.е.
функция возрастает.

α — острый, $\text{tg } \alpha > 0$,

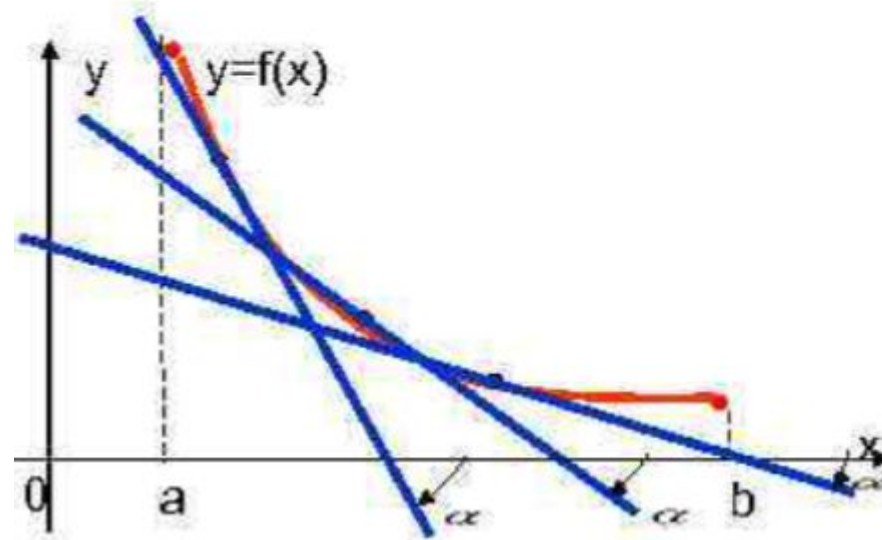
$$f'(x) > 0$$



Достаточное условие убывания функции

Если в каждой точке интервала $(a; b)$
 $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно
убывает на этом интервале.

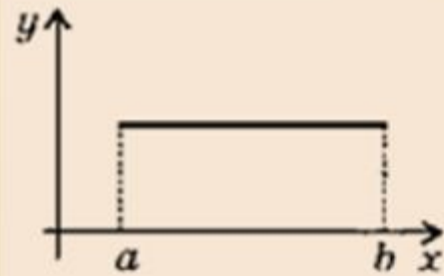
$f(x)$ — монотонно
убывает $\Leftrightarrow f'(x) < 0$



Касательная образует **тупой** угол
с осью абсцисс Ox и поэтому
график функции на этом
промежутке «опускается», т.е.
функция **убывает**.

α — тупой, $\text{tg } \alpha < 0$,

$$f'(x) < 0$$

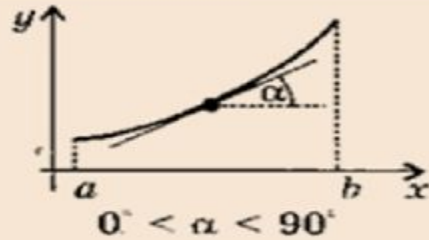


*Необходимое и достаточное
условие постоянства функции*

Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

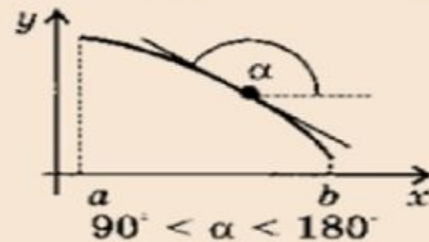
Обобщение

Монотонность функции



*Достаточное условие
возрастания функции*

Если в каждой точке интервала $(a; b)$
 $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно
возрастает на этом интервале.



*Достаточное условие
убывания функции*

Если в каждой точке интервала $(a; b)$
 $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно
убывает на этом интервале.

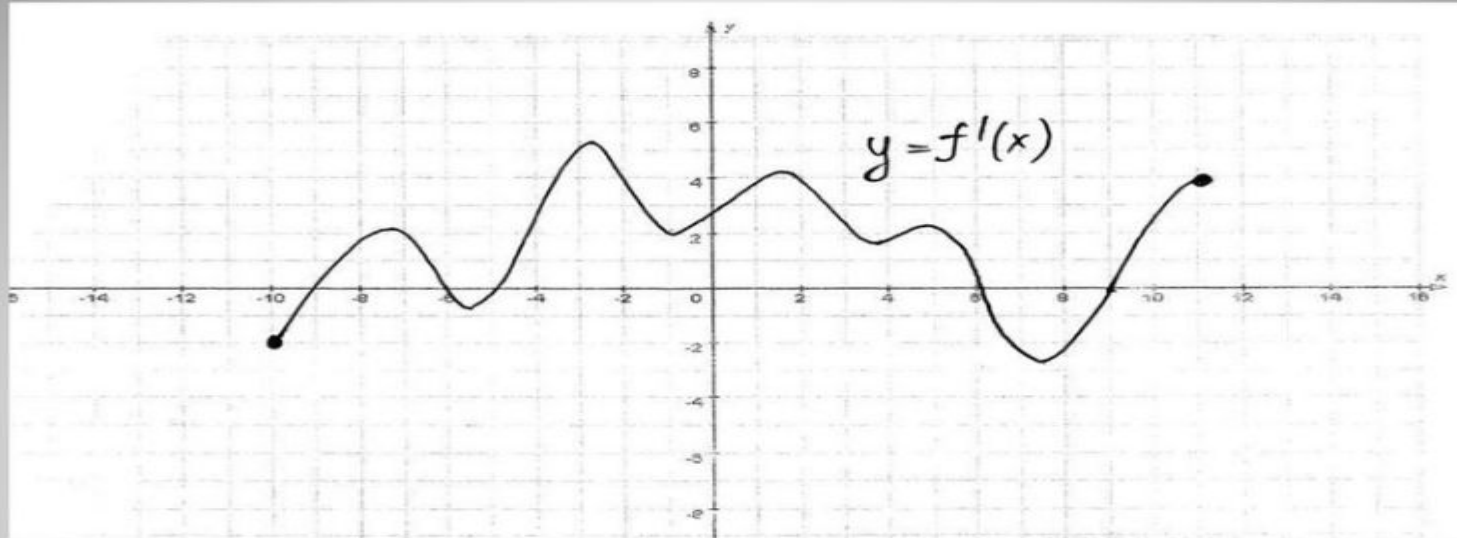


*Необходимое и достаточное
условие постоянства функции*

Функция $f(x)$ постоянна на интервале
 $(a; b)$ тогда и только тогда, когда
 $f'(x) = 0$ в каждой точке этого
интервала.

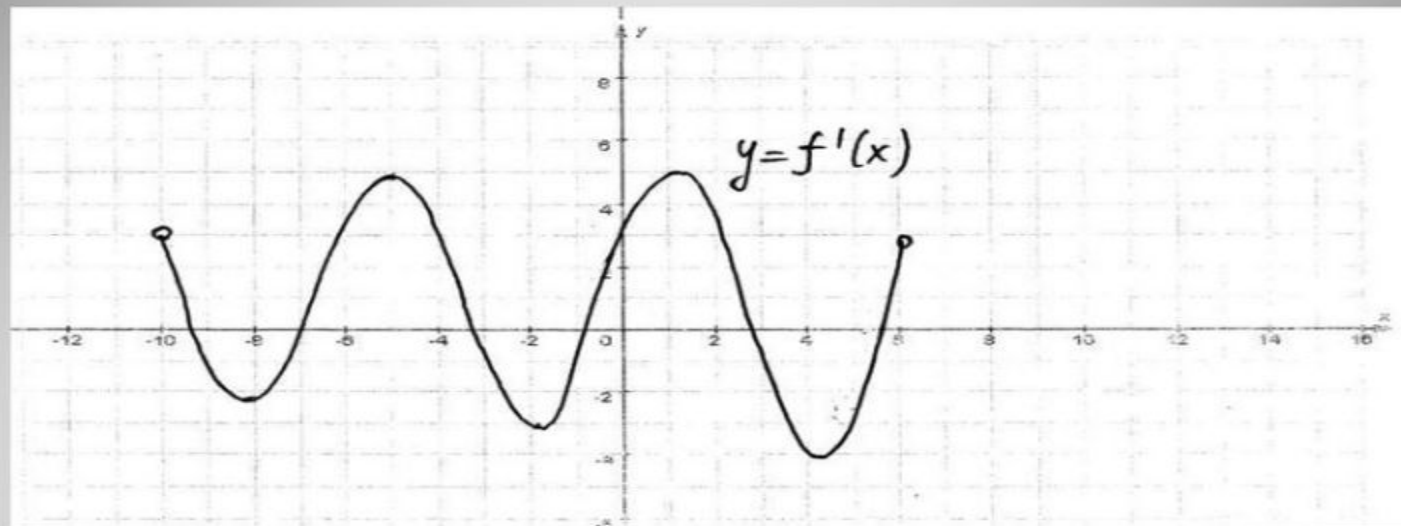


Решение задач



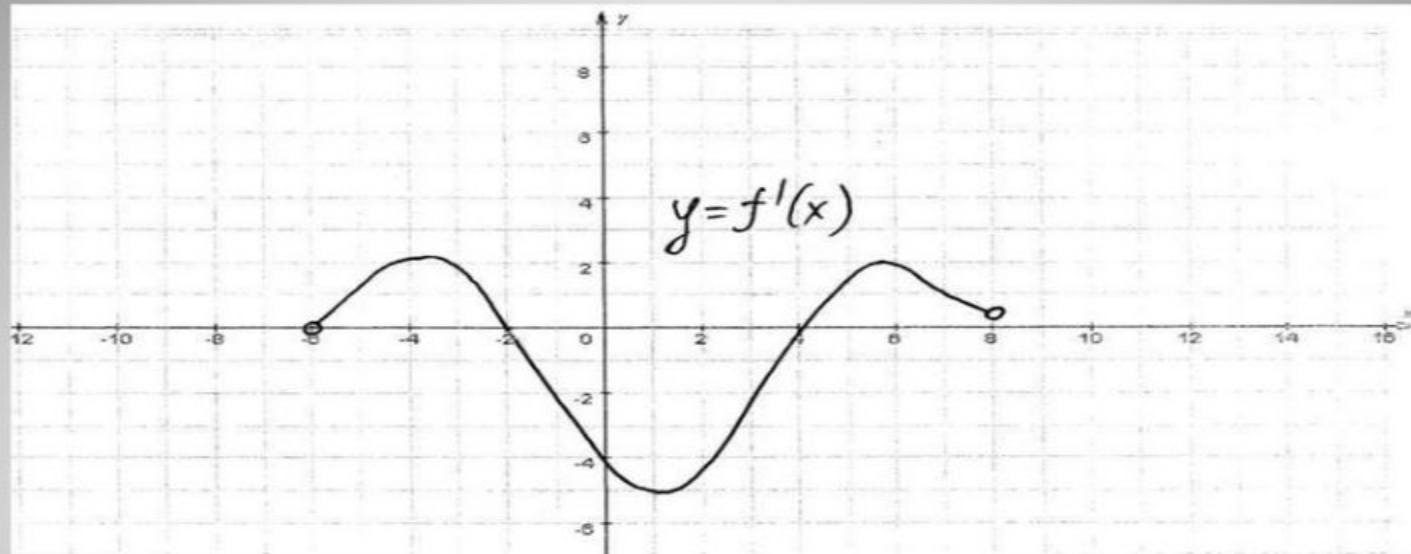
№1. Непрерывная функция $y=f(x)$ задана на $[-10; 11]$. На рисунке изображён график её производной. Укажите количество промежутков возрастания функции.

Решение задач



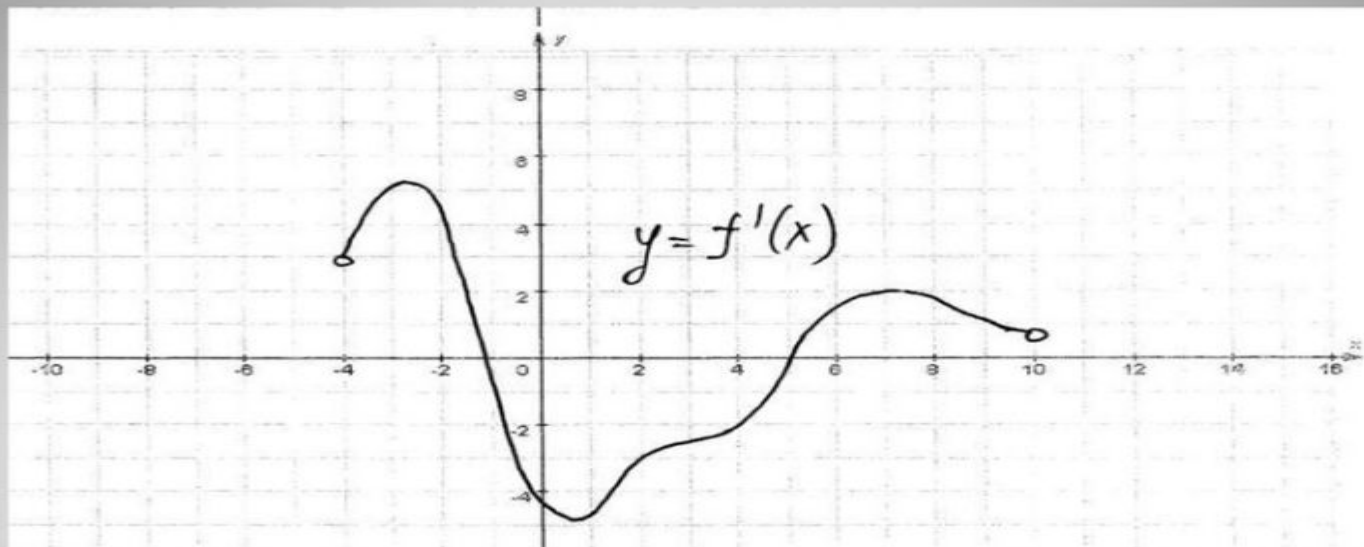
№2. Непрерывная функция $y=f(x)$ задана на $(-10;6)$. На рисунке изображён график её производной. Укажите количество промежутков убывания функции.

Решение задач



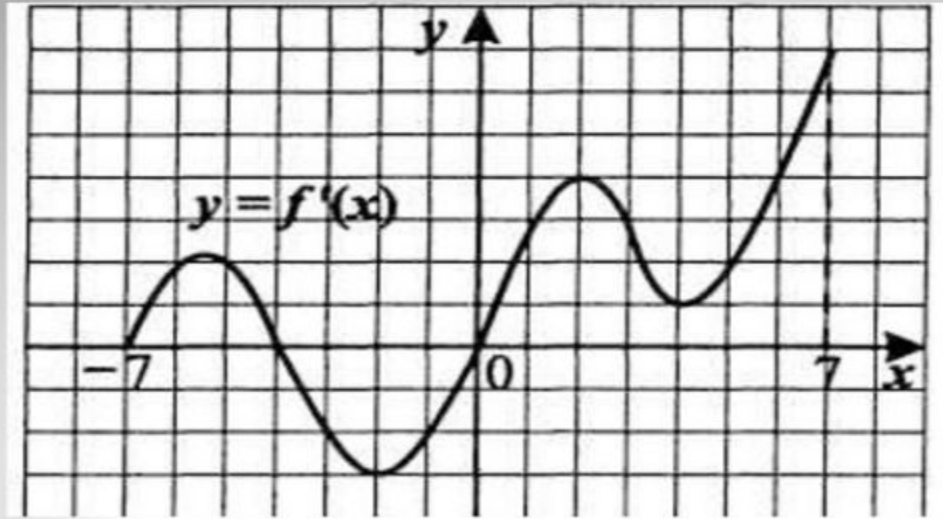
№3. Непрерывная функция $y=f(x)$ задана на $(-6;8)$. На рисунке изображён график её производной. Укажите длину промежутка убывания этой функции.

Решение задач



№4. Непрерывная функция $y=f(x)$ задана на $(-4;10)$. На рисунке изображён график её производной. Опишите последовательно типы монотонностей функции

Решение задач



№5. По графику функции $y=f'(x)$ ответьте на вопросы:

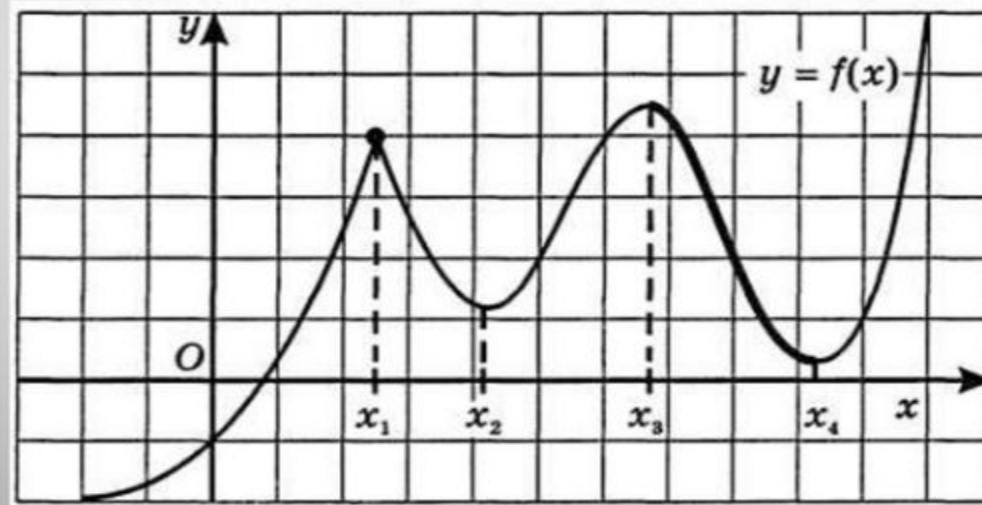
- Сколько промежутков возрастания у этой функции?
- Найдите длину промежутка убывания этой функции.

Решение задач

Пример №2.

По графику функции $y=f(x)$ ответьте на вопросы:

- Сколько промежутков возрастания у этой функции?
- Назовите наименьший из промежутков убывания этой функции.

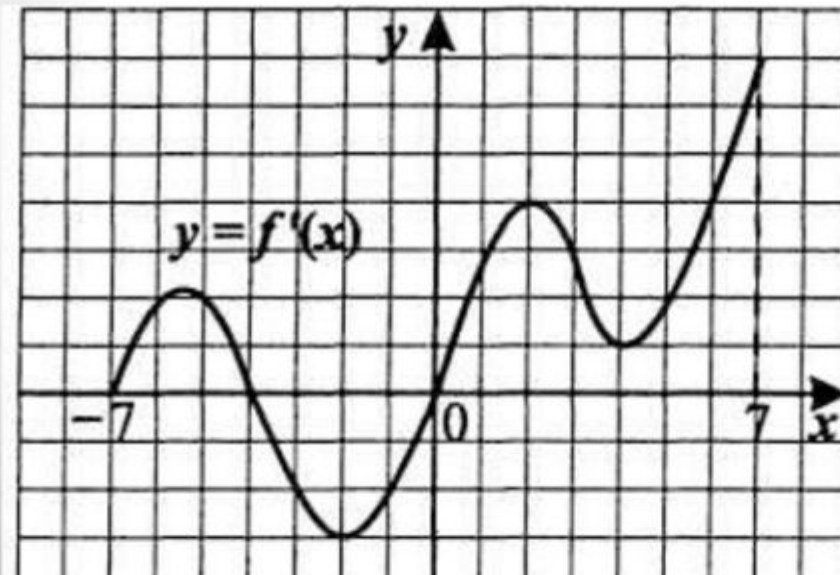


Решение задач

Пример №3. (задание В₈ из тестов ЕГЭ по математике)

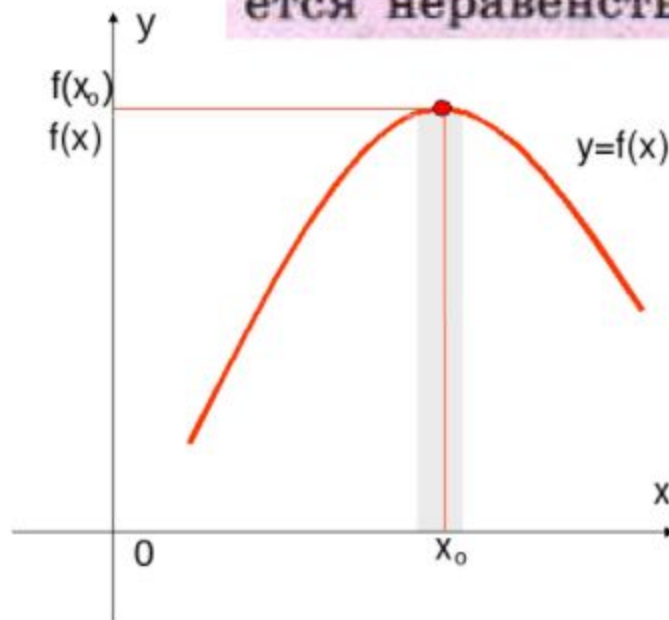
По графику функции $y=f'(x)$ ответьте на вопросы:

- Сколько промежутков возрастания у функции $f(x)$?
- Найдите длину промежутка убывания этой функции.



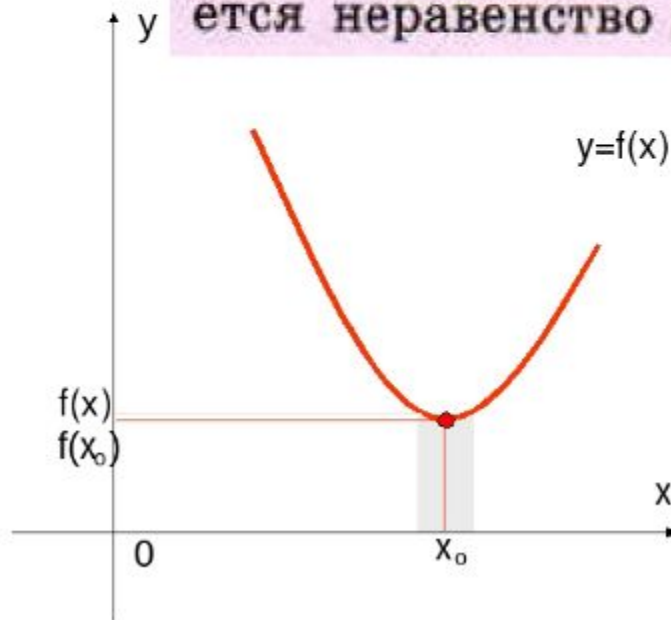
Максимум функции

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



Минимум функции

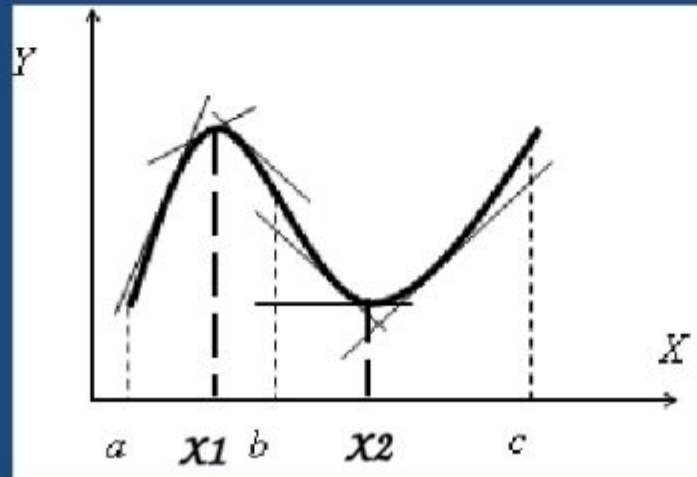
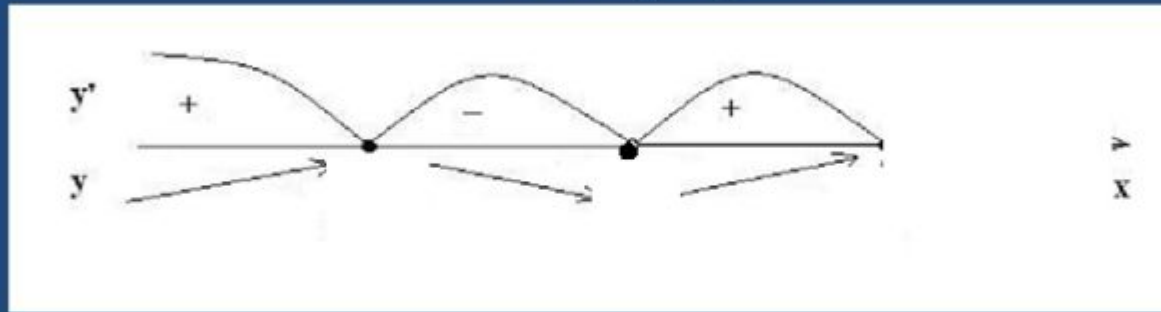
Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



**Точки минимума и максимума
называются точками экстремума
функции.**

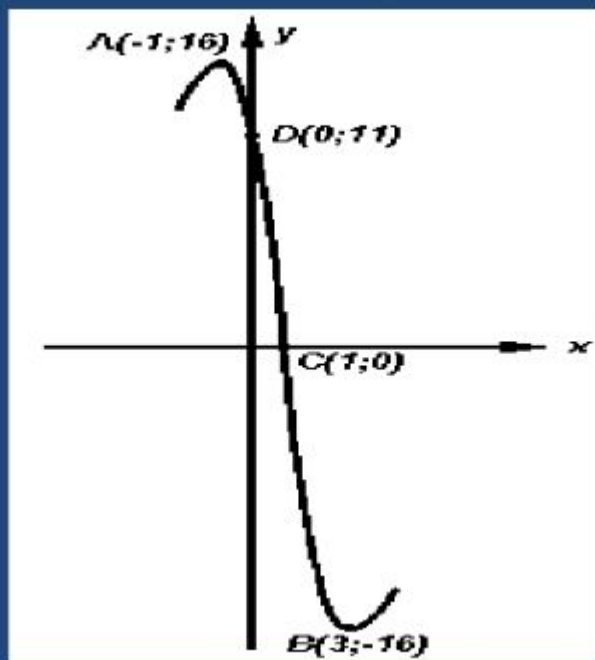
Пусть x_0 точка из области определения функции $f(x)$ и $f'(x) = 0$ если производная функции меняет свой знак с «+» на «-» в точке x_0 или наоборот, то эта точка

является Экстремумом.

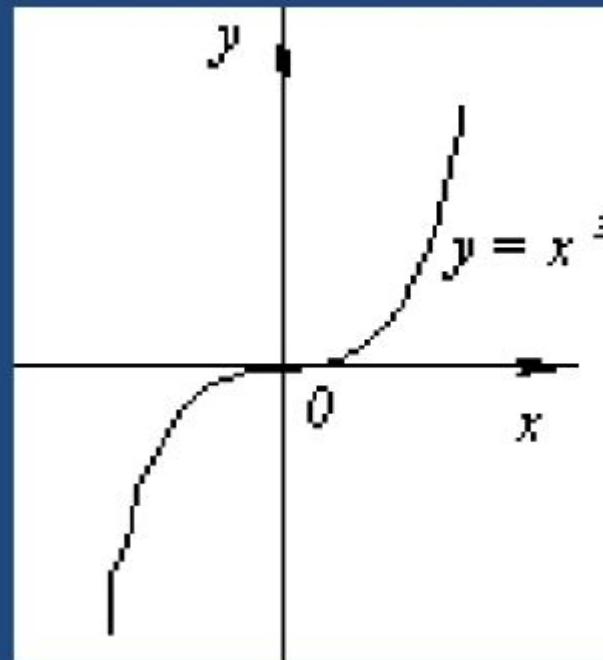


$$f'(x) \equiv 0$$

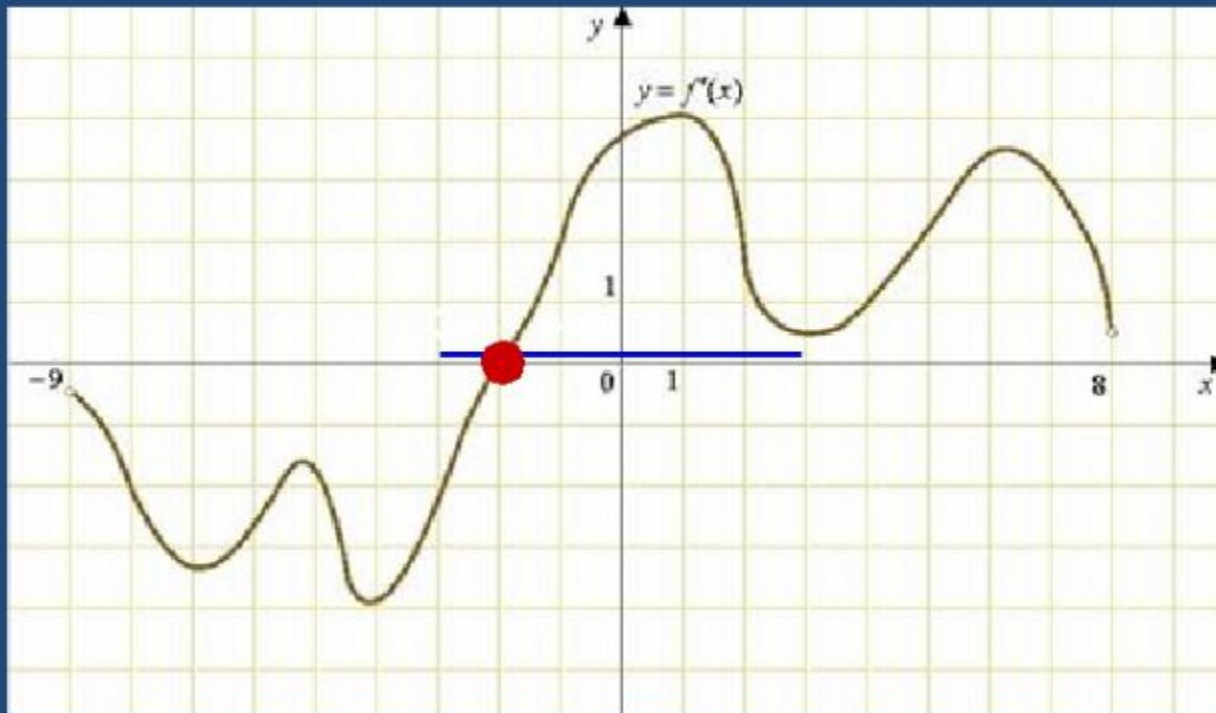
Экстремумы



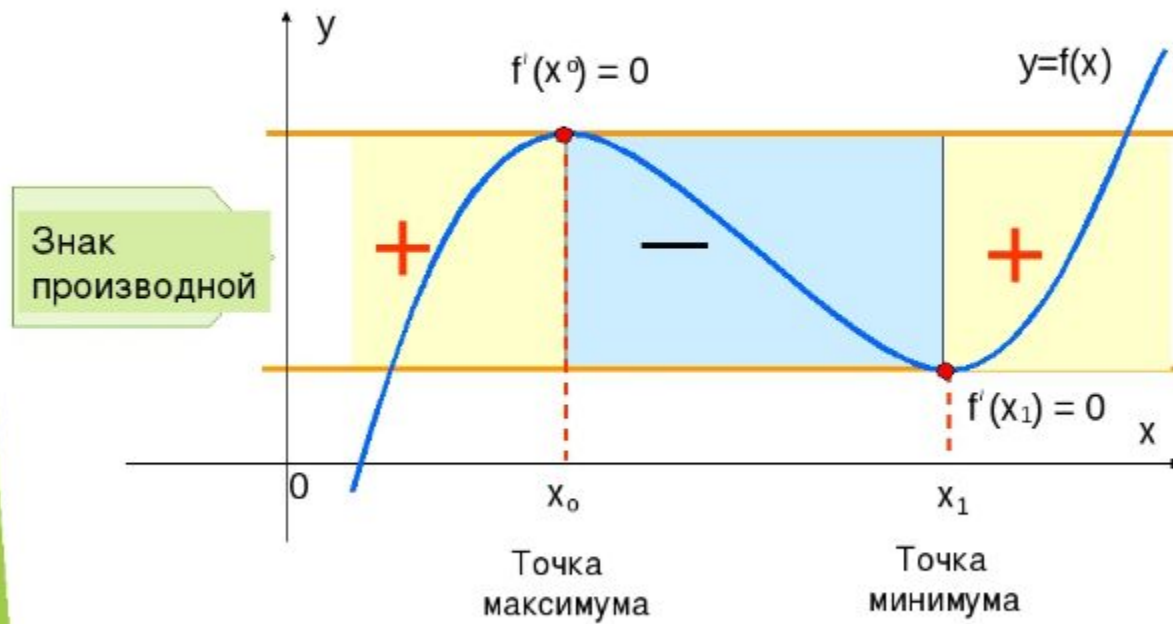
Не являются экстремумами



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите точку экстремума функции на интервале $(-3;3)$

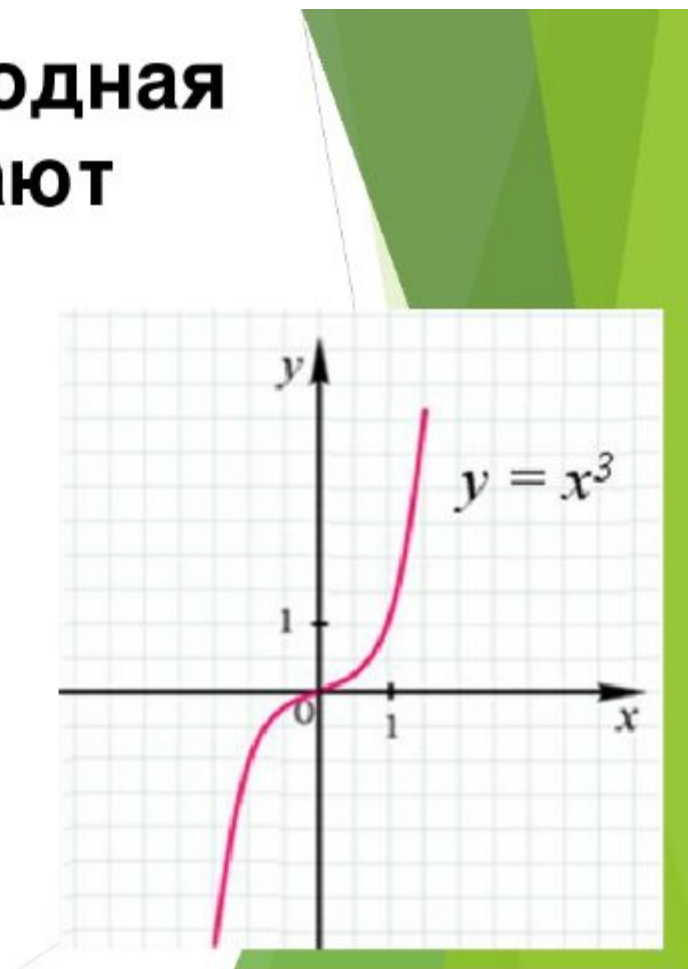


Точки максимума и минимума



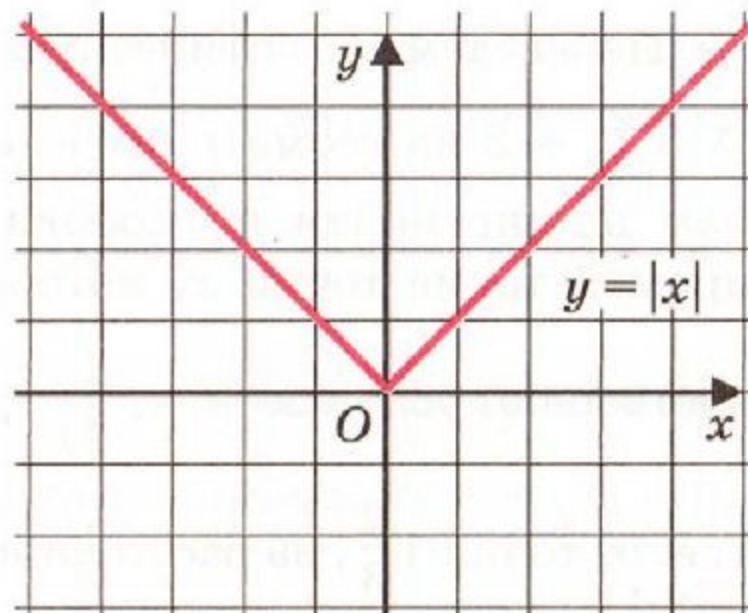
Точки, в которых производная функции равна 0, называют стационарными точками.

$x=0$ – точка, в которой производная равна 0, но она не является точкой экстремума.



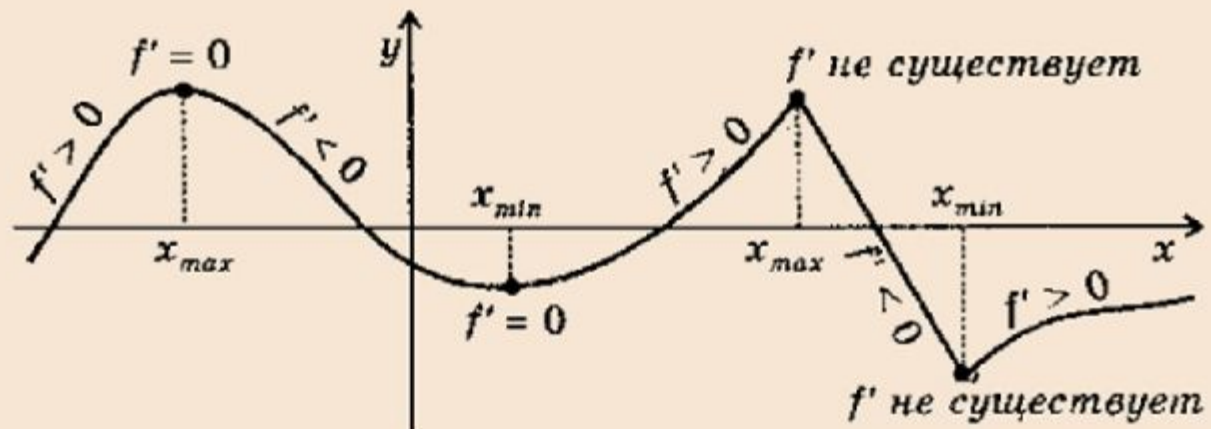
Точки, в которых функция имеет производную, равную 0 или не имеет производной, называют критическими точками.

$x=0$ – точка минимума, а производной в этой точке нет.



Примеры экстремумов функции

Замечание. В самой точке x_0 производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.



Точки из области определения функции, в которых:

$$f'(x) = 0 \text{ или не существует,}$$

называются **критическими точками** этой функции.

Только они могут быть точками экстремума функции. (рис. 1 и 2).

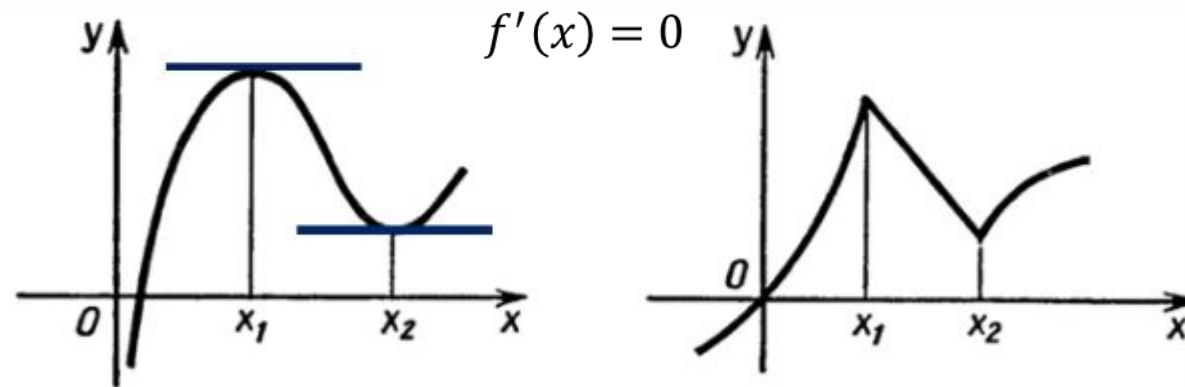


Рис. 1

Рис. 2

По заданным графикам функций $y=f(x)$ укажите:

- критические точки;
- стационарные точки;
- экстремумы функции.

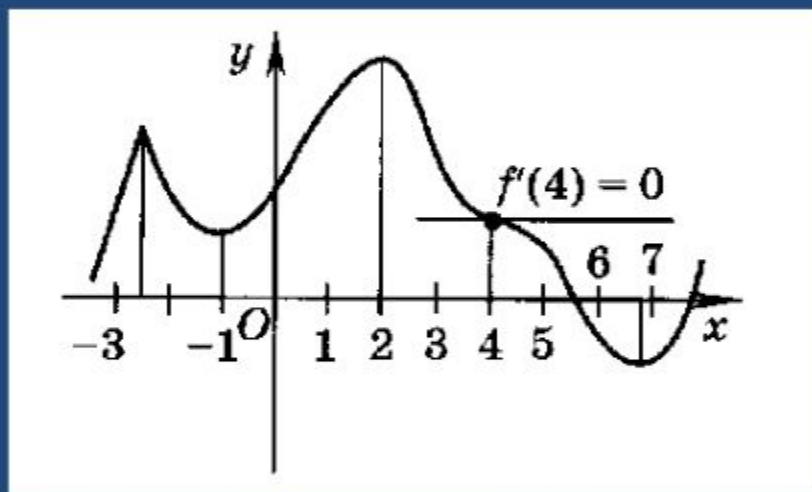
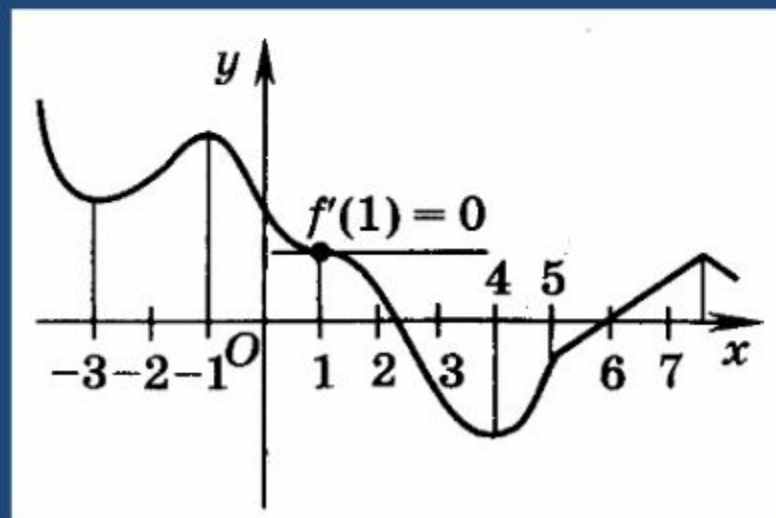


Рисунок 1

Рисунок 2



Экстремумы функции

Необходимое условие экстремума:

Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является *критической* точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

Достаточное условие экстремума:

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$.

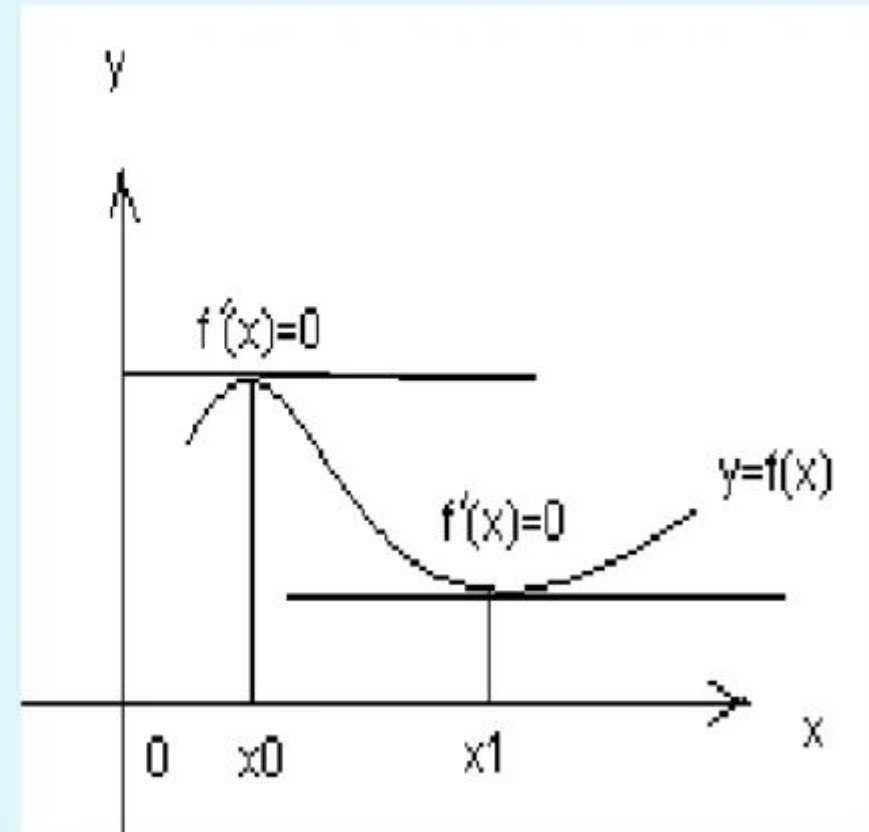
Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$,
 $f'(x) < 0$ при $x > x_0$,
то x_0 — точка максимума.

Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$,
 $f'(x) > 0$ при $x > x_0$,
то x_0 — точка минимума.

Теорема Ферма.

- Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

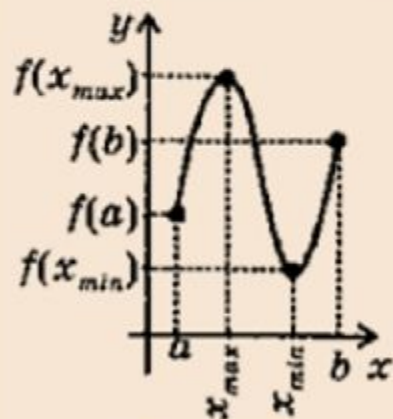
Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 – точка экстремума функции $y=f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x)$ равен нулю.



Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

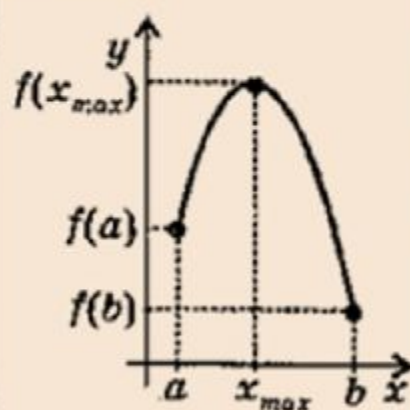
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:



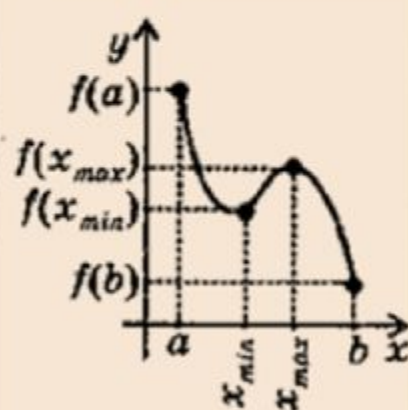
$$\max_{[a; b]} f(x) = f(x_{max})$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = f(x_{min})$$



$$\max_{[a; b]} f(x) = f(x_{max})$$

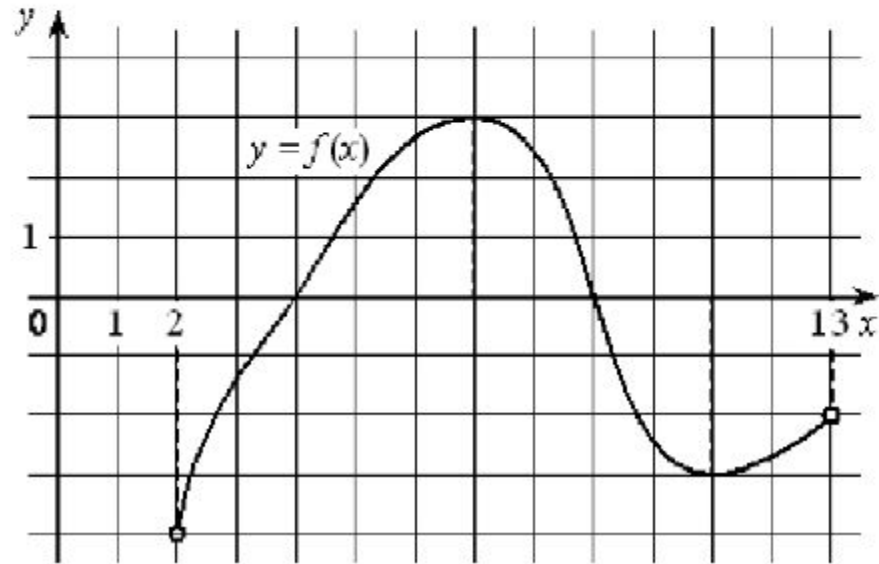
$$\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$$



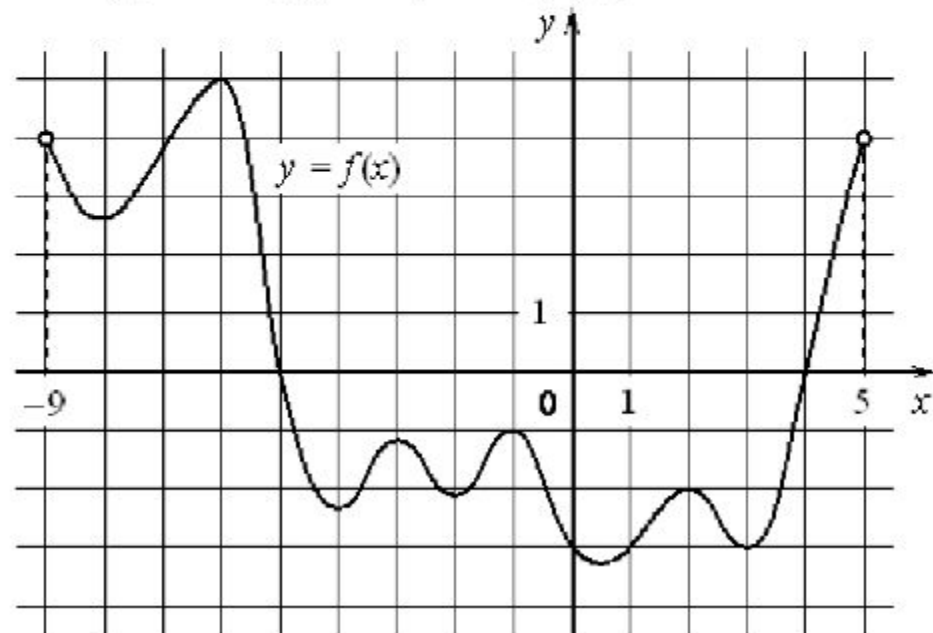
$$\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$$

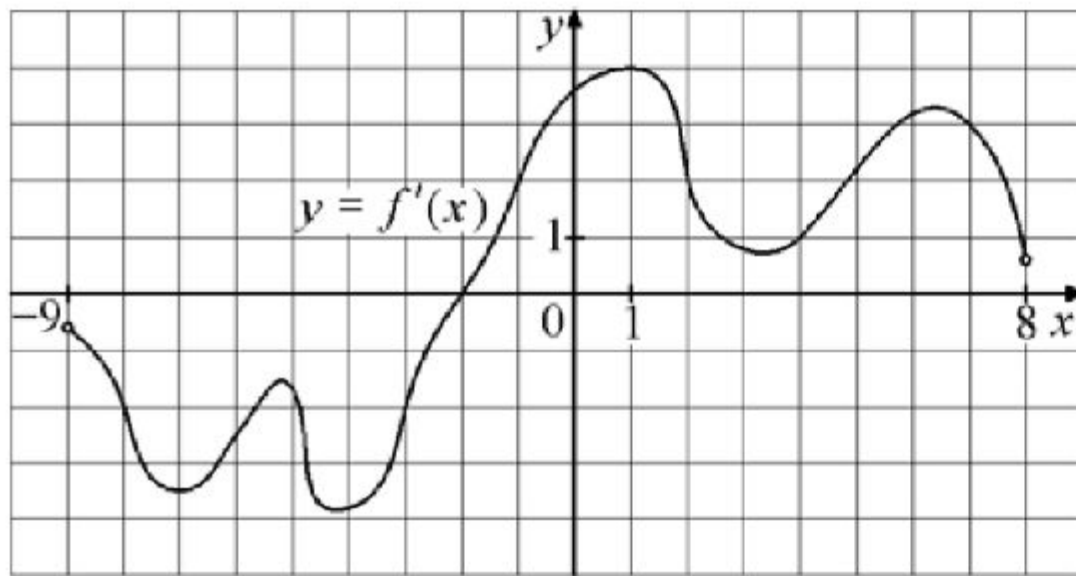
На рисунке изображён график дифференцируемой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определённой на интервале $(-2; 13)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 13]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



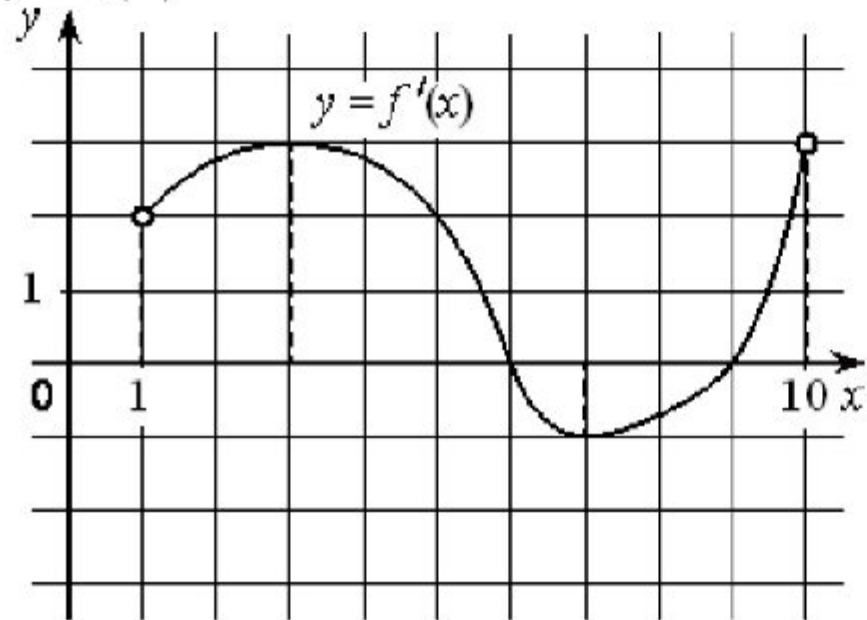
На рисунке изображён график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определённой на интервале $(-9; 5)$.
Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



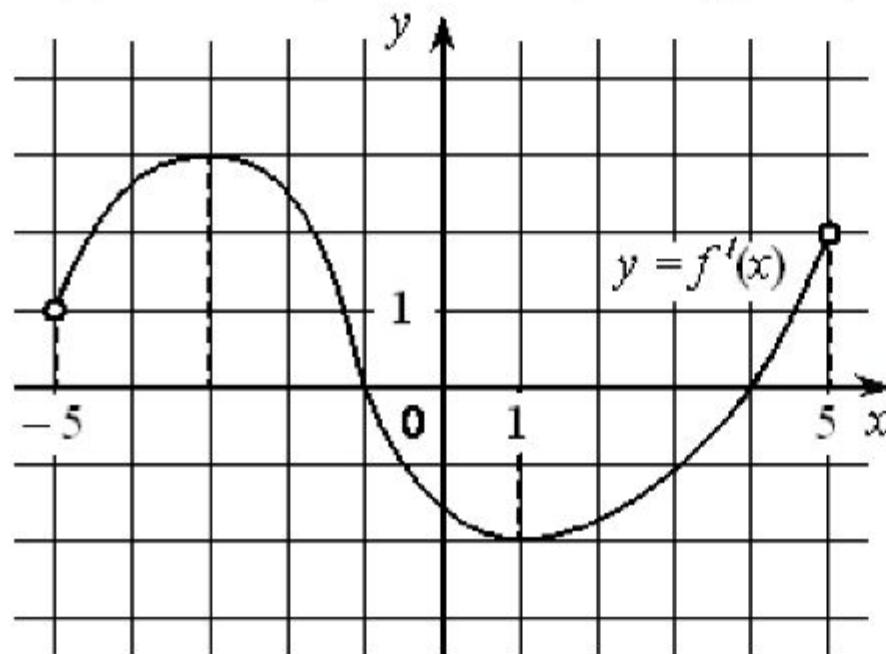
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-9; 8]$.



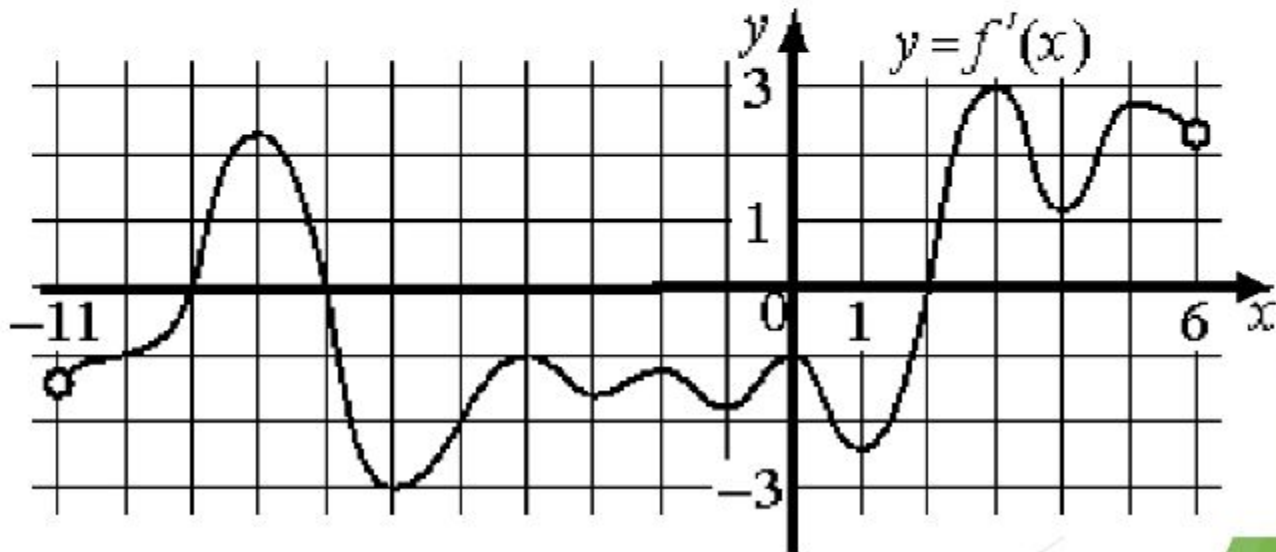
На рисунке изображён график функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ — производной функции $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, определённой на интервале $(; 10;)$. Найдите точку минимума функции $\mathbb{C}(\mathbb{R})$



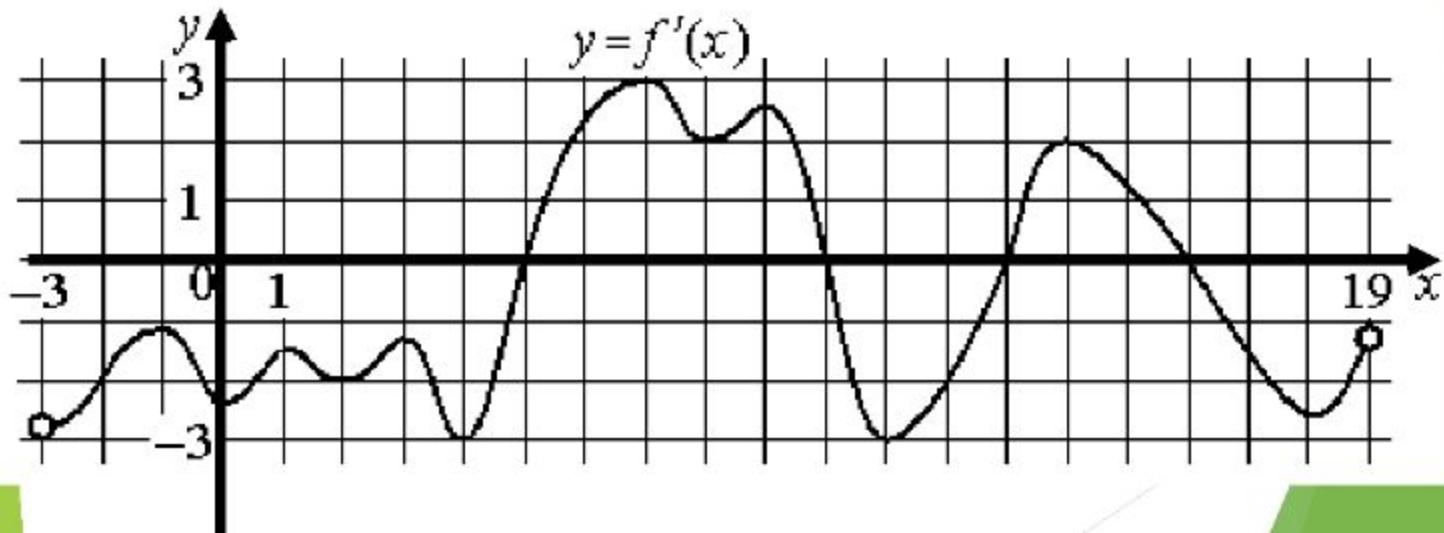
На рисунке изображён график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
(\mathcal{R}) — производной функции $f(x)$,
определённой на интервале $(-5; 5)$.
Найдите точку максимума функции $f(x)$.



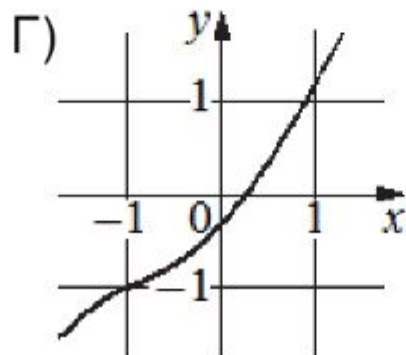
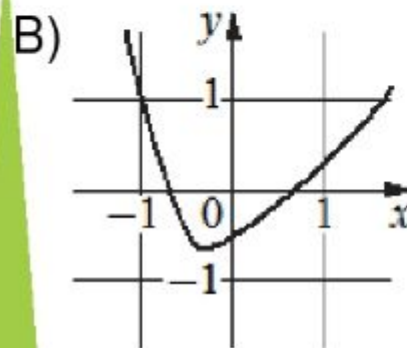
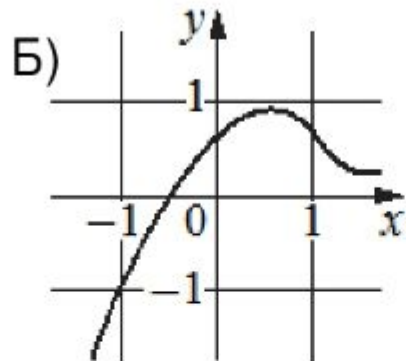
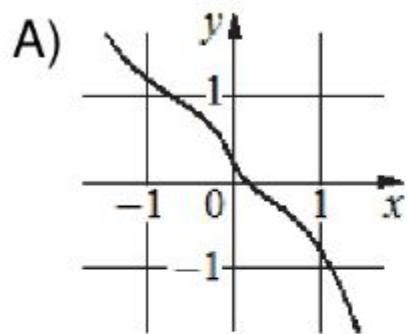
На рисунке изображён график $IR = \mathbb{R}$ — производной функции \mathbb{R} , определённой на интервале $(-11; 6]$. Найдите количество точек минимума функции \mathbb{R} , принадлежащих отрезку $[-11; 6]$.



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-\infty; \infty)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 19]$.



Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке $[-1; 1]$.



- 1) функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$
- 2) функция убывает на отрезке $[-1; 1]$
- 3) функция имеет точку минимума на отрезке $[-1; 1]$
- 4) функция имеет точку максимума на отрезке $[-1; 1]$

