Теория множеств

Старший преподаватель кафедры ИиИт

Виноградова Марина Николаевна

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1 Множества и операции над ними

1.1.1. Понятие множества

Теория множеств опирается на три первичных понятия:
1) множество;
2) элемент;
3) принадлежность.

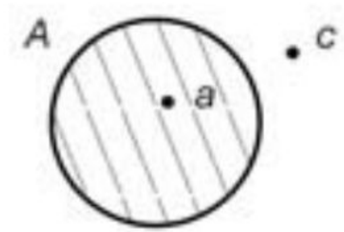


Рис. 1.1.

На рисунке 1.1 буквой A обозначено множество, элементами которого являются точки заштрихованной части плоскости, при этом точка a принадлежит множеству A ($a \in A$), точка c не принадлежит множеству A ($c \in A$).

1.1.2. Способы задания множеств

Множество можно задать, перечислив все его элементы: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{-1,3,6,8\}$. Порядок записи элементов множества произволен. Часто задают множество, указав его характеристическое свойство, которое для каждого элемента позволяет выяснить, принадлежит он множеству или нет.

Например,

$$B = \{\,x \mid x \text{ – целый корень уравнения } 2x^3 - x^2 + 1 = 0\},$$

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \mid -1 \le \mathrm{x} \le 7, \mathrm{x} \text{ – целое}\}.$$

В дальнейшем для известных числовых множеств будут использоваться обозначения:

N = { 1,2,3,…} – множество натуральных чисел;

Z = { …, -2,-1,0,1,2,…} – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

1.1.3. Основные определения

Пустым множеством называется множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента, т.е. для любого элемента x выполняется $x \notin \varnothing$.

Универсальным называется множество **U** всех элементов, рассматриваемых в данной задаче.

Будем говорить, что множество A ***включается*** во множество B $(A \subseteq B)$, если каждый элемент множества A является элементом множества B (говорят также, что A является подмножеством множества B). Из определения включения следуют свойства:

1) $A \subseteq A$ для любого множества A;
2) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A;
4) $A \subseteq \mathbf{U}$ для любого множества A.

Определим понятие ***равенства*** множеств: $A=B$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A.

1.1.4. Диаграммы Эйлера – Венна

Эти диаграммы применяются для наглядного изображения множеств и их взаимного расположения.

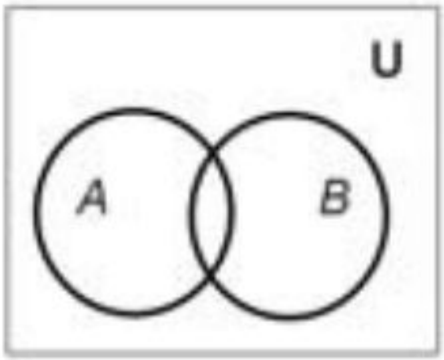


Рис. 1.2. Диаграмма Эйлера-Венна

Универсальное множество **U** изображается в виде прямоугольника, а произвольные множества – подмножества универсального – в виде кругов (рис. 1.2).

1.1.5. Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 1.3, *а*).

Пример. Если $A = \{0,1,2\}, B = \{-1,2,3\}$, то $A \cup B = \{-1,0,1,2,3\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B (рис. 1.3, *б*).

Пример. Если $A = \{0,1,2\}, B = \{-1,2,3\}$, то $A \cap B = \{2\}$.

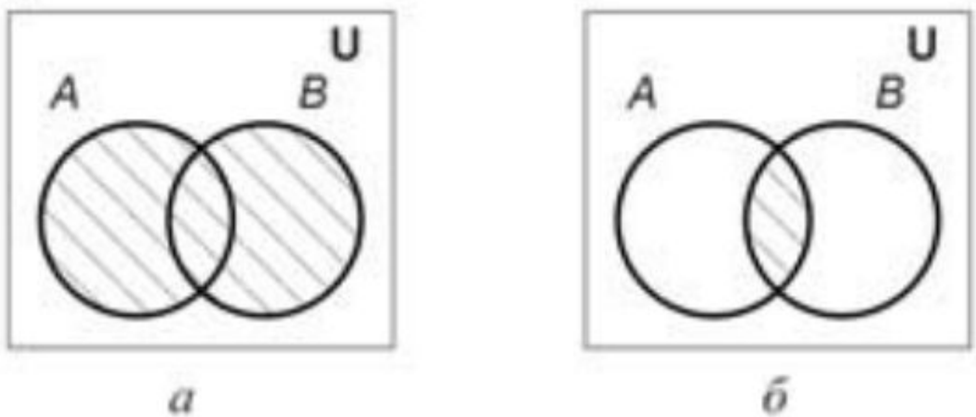


Рис. 1.3. Операции над множествами:
а) объединение множеств A и B;
б) пересечение множеств A и B

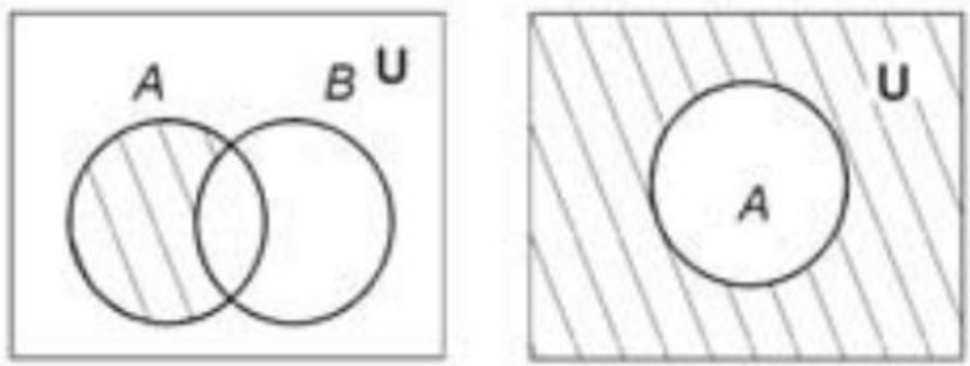
Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$ тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.4, *а*).

Пример. $A \setminus B = \{0,1,2\} \setminus \{-1,2,3\} = \{0,1\}$;

$$B \setminus A = \{-1,2,3\} \setminus \{0,1,2\} = \{-1,3\}.$$

Дополнением множества A до универсального $\mathbf{U}$ называется множество $\overline{A} = \mathbf{U} \setminus A$ (рис. 1.4, *б*).

Пример. Если $A = \{0,1,2\}$, $\mathbf{U} = \{0,1,2,3,4,5\}$, то $\overline{A} = \mathbf{U} \setminus A = \{3,4,5\}$.



а *б*

Рис. 1.4. Операции над множествами:
а) разность множеств *A* и *B*;
б) дополнение множества *A*

1.1.6. Системы множеств

Элементы множества сами могут быть множествами: $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$; в таком случае удобно говорить о системе множеств. Рассмотрим такие системы множеств, как булеан и разбиение множеств.

Булеаном $\mathrm{B}(X)$ множества X называется множество всех подмножеств множества X. Например, для множества $X = \{0,1\}$ булеаном является множество $\mathrm{B}(X) = \{\ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\ \}$.

Разбиением $\mathrm{R}(X)$ множества X называется система его непустых непересекающихся подмножеств, в объединении дающая множество X (рис. 1.5).

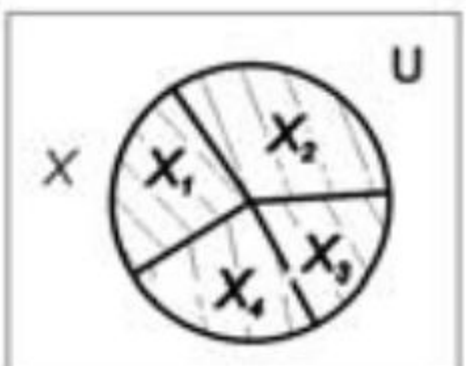


Рис. 1.5. Разбиение множества $R(X)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Например, для множества $X = \{1,2,3,4,5\}$ можно построить разбиение $\mathrm{R}_1(X) = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}\}$, состоящее из двух элементов (они называются блоками разбиения), или разбиение $\mathrm{R}_2(X) = \{\{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4\}\}$ – из четырех блоков; возможны и другие разбиения этого множества X.

1.1.7. Законы алгебры множеств

Так же, как операции обычной алгебры, операции над множествами выполняются по законам (табл. 1.1), которые доказываются на основе введенных выше определений. Особенностью алгебры множеств является закон идемпотентности, благодаря которому в алгебре множеств нет числовых коэффициентов и степеней.

№	Формулы	Название
1	$A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$	Свойства пустого множества
2	$A\cup U=U$; $A\cap U=A$; $A\cup\bar{A}=U$	Свойства универсального множества
3	$A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$	Закон коммутативности
4	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	Закон ассоциативности
5	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	Закон дистрибутивности
6	$\overline{\overline{A}}=A$	Закон двойного дополнения
7	$A\cap A=A$; $A\cup A=A$	Законы идемпотентности
8	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;	Законы де Моргана
9	$A\cup(A\cap B)=A$; $A\cap(A\cup B)=A$	Законы поглощения

Задача 1. Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера-Венна.

Группа туристов из 100 человек пробыла в городе N три дня. За это время драматический театр посетили 28 туристов, оперный – 42, кукольный – 30. И в драматическом, и в оперном побывало 10 человек; в драматическом и кукольном – 8; в оперном и кукольном – 5. Все три театра посетили три человека. Сколько туристов не были ни в одном театре?

Решение. В задаче идет речь о трех множествах *Д*, *О*, *К* – зрителей драмы, оперы и кукольного спектакля соответственно. Универсальное множество **U** – это множество туристов группы. Используя обозначение $n(X)$ – количество элементов множества X, запишем кратко условие задачи:

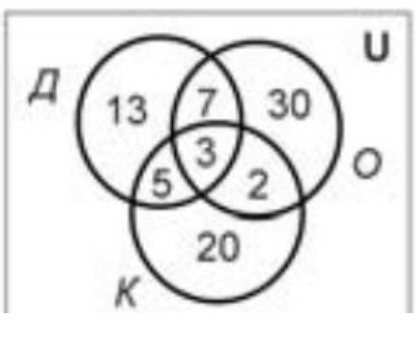
$$n(\mathbf{U}) = 100;$$

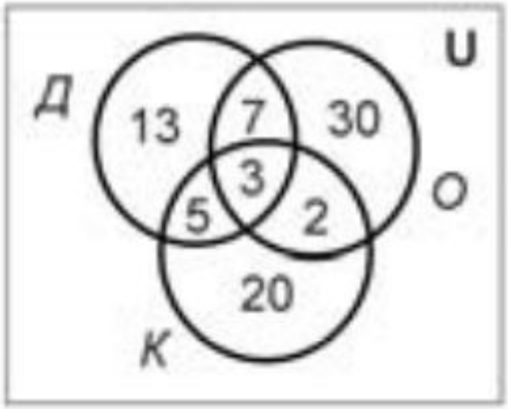
$$n(Д) = 28; n(O) = 42; n(K) = 30;$$

$$n(Д \cap O) = 10;\ n(Д \cap K) = 8;\ n(O \cap K) = 5;$$

$$n(Д \cap K \cap O) = 3.$$

В задаче требуется найти $n(\overline{Д \cup O \cup K}) = n(U \setminus (Д \cap O \cap K))$.





Теперь на диаграмме (рис. 1.6) все элементы учтены ровно по одному разу, следовательно, количество туристов, которые побывали хотя бы в одном театре, равно

$$n(Д \cup О \cup К) = 13 + 7 + 30 + 5 + 3 + 2 + 20 = 80.$$

Количество туристов, не побывавших ни в одном театре

$$n(\mathbf{U} \setminus (Д \cup О \cup К)) = 100 - 80 = 20.$$

Ответ: не были ни в одном театре 20 человек.

Задача 2. Задано универсальное множество $\mathbf{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и множества $X = \{2,4,7\}, Y\{1,3,5,\}, Z = \{2,3,5,6\}$. Перечислить элементы множества $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X$. Записать булеан множества X и какое-либо разбиение множества Y.

Решение. Для нахождения множества W выполним операции над множествами в следующем порядке:

1) $\overline{Z} = U \setminus Z = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,3,5,6\} = \{1,4,7\}$ - по определению операции дополнения;

2) $\overline{Z} \cap Y = \{1,4,7\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,7\}$ - по определению операции пересечения множеств;

3) $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X = \{1,7\} \cup \{2,4,7\} = \{1,2,4,7\}$.

Итак, $W = \{1,2,4,7\}$.

В булеан множества X включаем пустое множество, само множество X (см. свойства включения в 1.1.3), все одноэлементные подмножества, все двухэлементные подмножества множества X:

$$\mathrm{B}(X) = \{ \varnothing, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,7\}, \{2,4\}, \{4,7\}, \{2,4,7\} \}.$$

Для множества Y построим разбиение, состоящее из трех блоков $\mathrm{R}(Y) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$, например, таким образом:

$$Y_1 = \{1,7\}, Y_2 = \{3\}, Y_3 = \{5\}.$$

Определение разбиения выполняется: множества Y_1, Y_2, Y_3 не пусты, не пересекаются ($Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $Y_2 \cap Y_3 = \varnothing$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$), их объединение равно множеству Y:

$$Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = (Y_1 \cup Y_2) \cup Y_3 = (\{1,7\} \cup \{3\}) \cup \{5\} = \{1,3,7\} \cup \{5\} =$$
$$= \{1,3,5,7\}.$$

Задача 3. Упростить выражение, пользуясь законами алгебры множеств:

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B.$$

Решение. Договоримся считать, что операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, т.е., если нет скобок, изменяющих приоритет, вначале выполняется пересечение, а затем объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности, определим порядок действий:

$$(A \overset{1}{\cap} (\overline{A} \cup B)) \overset{3}{\cup} ((B \cup C) \overset{2}{\cup} B).$$

Выполним преобразования, указывая номер закона (табл. 1.1) над знаком равенства:

1) $A \cap (\overline{A} \cup B) \overset{5}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \overset{1}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1}{=} A \cap B$;

2) $(B \cup C) \cup B \overset{3}{=} (C \cup B) \cup B \overset{4}{=} C \cup (B \cup B) \overset{7}{=} C \cup B$;

3) $(A \cap B) \cup (C \cup B) \overset{3}{=} (A \cap B) \cup (B \cup C) \overset{4}{=} ((A \cap B) \cup B) \cup C \overset{3}{=}$

$= (B \cup (A \cap B)) \cup C \overset{9}{=} B \cup C$.

Ответ: $B \cup C$.