Определители матриц

1. Вычисление определителей 1-го и 2-го порядков.

2. Вычисление определителей 3-го порядка

Квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Обозначения определителя (детерминанта) матрицы

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителей матриц 1 – го и 2 – го порядков

Определитель матрицы 1-го порядка

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$$

Определитель матрицы 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Пример 1.

Найти определители матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Решение:</u>

а) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$

б) $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 24 - 6 = 18$

Вычисление определителей матриц 3 – го порядка

Определителем 3 - го порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 2.

Найти определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 5 - 4 \cdot 0) - 3 \cdot (6 \cdot 5 - 5 \cdot 0) + 7 \cdot (6 \cdot 4 - 5 \cdot 2) =$$

$$= 10 - 3 \cdot 30 + 7 \cdot 14 = 10 - 90 + 98 = 18$$

Метод треугольников

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

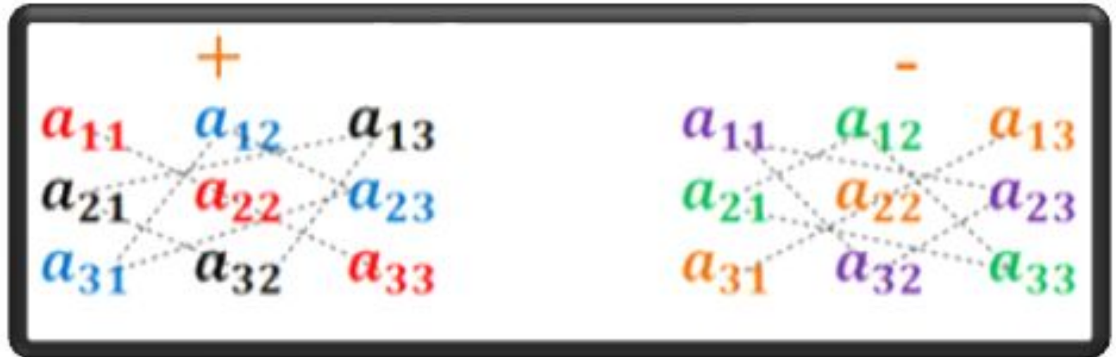
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{33} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Пример 3.

Найти определитель матрицы по правилу треугольников:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



<u>Решение:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 5 + 6 \cdot 4 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot 7 -$$

$$-6 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 10 + 0 + 168 - 70 - 90 - 0 = 18$$

Свойства определителей:

1. Определитель матрицы не изменится, если его строки заменить столбцами с тем же номером, и наоборот;
2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный;
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю;
4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
5. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю;
6. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали.