Лекция №8

Фундаментальная система решений (ФСР)

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется любой базис пространства решений этой системы.

.

- ***Теорема 4.*** Пусть однородная система линейных уравнений приведена к виду:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n} \end{cases} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{r}$ – ранг матрицы $\boldsymbol{A = \left(a_{ij}\right), r < n}$.

1. Если $\boldsymbol{D}$ – произвольный определитель $\boldsymbol{n - r}$ порядка отличный от нуля, то беря компоненты его строк в качестве значений свободных переменных и решая каждый раз получившуюся невырожденную систему, получим $\boldsymbol{n - r}$ решений системы (2), образующих ФСР.

2. Любую фундаментальную систему решений системы (2) можно получить описанным способом из некоторого определителя отличного от нуля.

- ***Пример.*** Найти ФСР и общее решение следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Элементы векторной алгебры

- ***Определение.*** Вектором называется направленный отрезок прямой, т.е. множество точек прямой, заключенных между фиксированными точками A и B с указанием направлений (Будем обозначать $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$).

Определение. Длина вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ называется его модулем и будет обозначаться $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right|$.

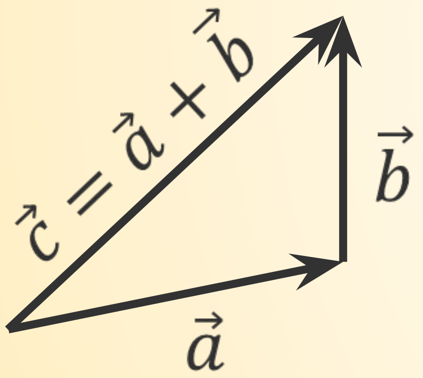
Вектор $\vec{\boldsymbol{0}}$, начало и конец которого совпадают, называется нулевым. Его модуль равен нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение. Два вектора называются равными, если они параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину

Линейные операции над векторами

1. *Сложение векторов.*

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом



Операция сложения векторов может быть распространена на любое конечное число слагаемых векторов.

Свойства операции сложения векторов:

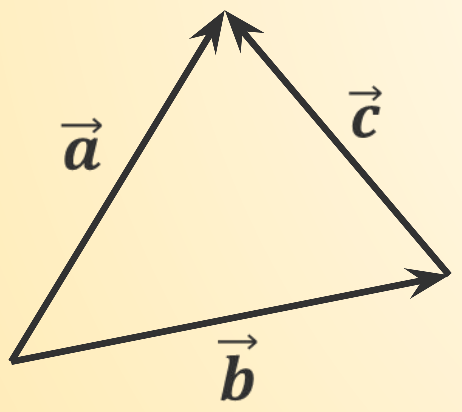
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность).

2. **_Вычитание векторов._**

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ (обозначаем $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$).

Построение вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$:



Приложим к началу вектора $\vec{a}$ начало вектора $\vec{b}$. Из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ проводим вектор $\vec{c}$.

3. ***Умножение вектора на скаляр.***

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, параллельный вектору $\vec{a}$, направленный, как $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$, и имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (обозначаем $\lambda \cdot \vec{a}$).

Свойства произведения вектора на число.

1. $\forall \lambda \epsilon R, \forall k \epsilon R$ и любого вектора $\vec{a}$

   $\lambda \cdot (k \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot k) \cdot \vec{a}$ (ассоциативность умножения на число).

2. $\forall \lambda \epsilon R, \forall k \epsilon R$ и любого вектора $\vec{a}$

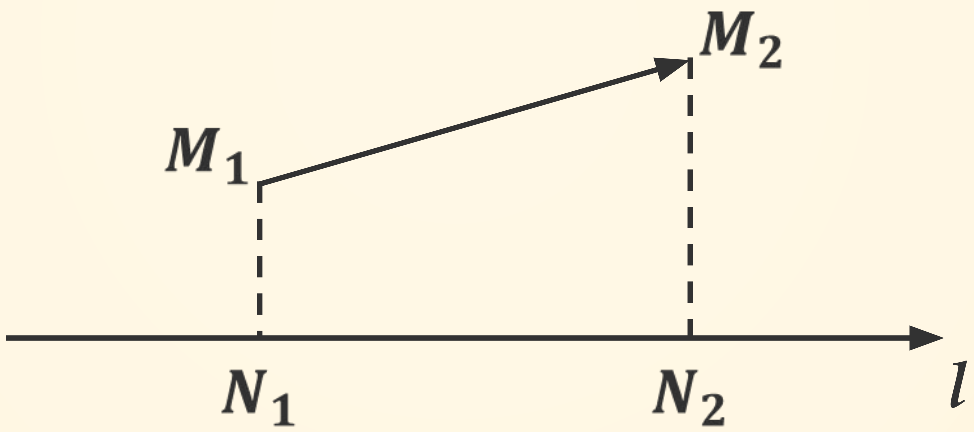
   $(\lambda + k) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + k \vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

3. $\forall \lambda \epsilon R$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

   $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов).

Проекция вектора

- ***Определение.*** Проекцией вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на заданную ось l называется величина отрезка $[N_1N_2]$, где N_1 и N_2 - проекции точек M_1 и M_2 на ось l (обозначаем $pr_l\overrightarrow{M_1M_2}$).



Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на какую-либо ось l равна произведению модуля вектора на косинус угла наклона вектора к оси, т.е.

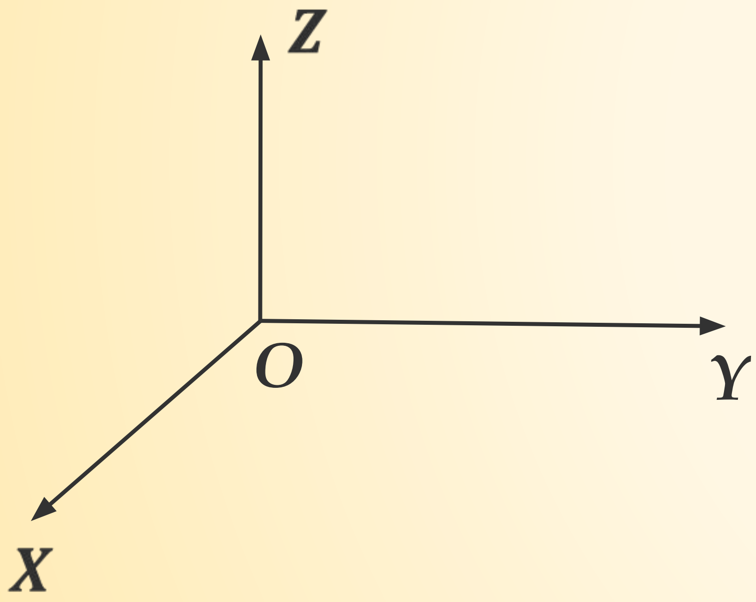
$$pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\hat{\ }l)$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось

$$pr_l(\vec{a}+\vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$$

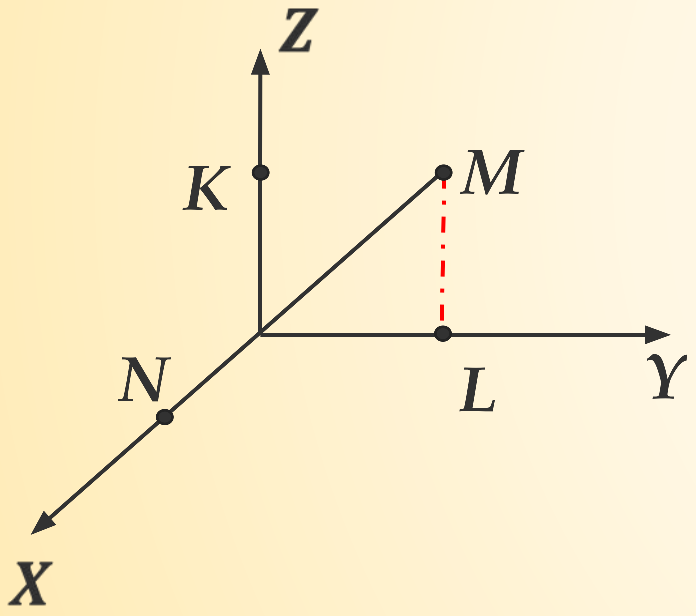
Координаты векторов

- Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат XYZ , которая состоит из фиксированной точки O – начала координат и трех взаимно перпендикулярных прямых OX – ось абсцисс, OY – ось ординат, OZ – ось аппликат.



На каждой из трех осей лучами, выходящими из точки O, приписываются положительные и отрицательные направления и на каждой прямой выбирается масштаб.

- Возьмем произвольный вектор $\vec{a}$, параллельным переносом совмещаем начало вектора $\vec{a}$ с точкой O, а конец обозначим M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M. Пусть координаты точки M будут соответственно $|\overrightarrow{ON}| = x$, $|\overrightarrow{OL}| = y$, $|\overrightarrow{OK}| = z$, $M(x; y; z)$.



Проекция вектора $\vec{a}$ на координатные оси называются <u>координатами вектора $\vec{a}$</u>.

$pr_{ox}\vec{a} = x$, $pr_{oy}\vec{a} = y$, $pr_{oz}\vec{a} = z$ и записываем

$\vec{a} = (x, y, z)$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы

- Обозначим углы, которые образует вектор $\vec{a}$ с координатными осями, соответственно через α, β, γ.

Тогда $x = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = |\vec{a}| \cos\gamma$, т.к. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- При этом $\boldsymbol{\cos\alpha}$, $\boldsymbol{\cos\beta}$, $\boldsymbol{\cos\gamma}$ - называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{\boldsymbol{a}}$. Легко показать, что:

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

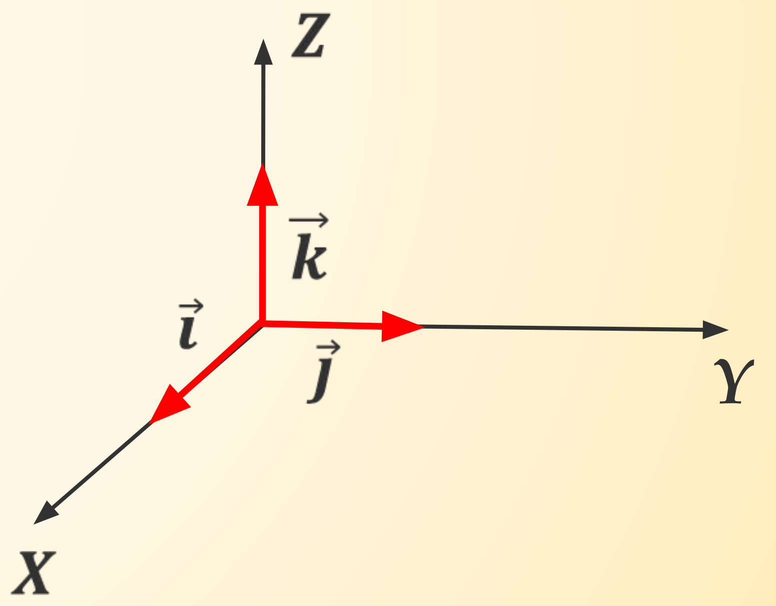
Разложение вектора по ортам

- Построим тройку векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) начало каждого из них лежит в начале координат;
2) по модулю они равны единице: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$;
3) вектор $\vec{i}$ направлен по оси абсцисс, $\vec{j}$ - по направлению оси ординат, $\vec{k}$ - по направлению оси аппликат.

Эти вектора называются ***ортами***.

Теорема 4. Вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - образуют базис в пространстве векторов.



Скалярное произведение векторов

- <u>***Определение.***</u> Скалярным произведением двух векторов $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла φ между ними (обозначаем $(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}})$).

$$(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}| \cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$ *<u>свойство коммутативности</u>*.

2. Для $\forall \lambda \epsilon R$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется:

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$$ *<u>свойство дистрибутивности</u>*.

4. Для любого вектора $\vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |a|^2.$$

Теорема 5. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

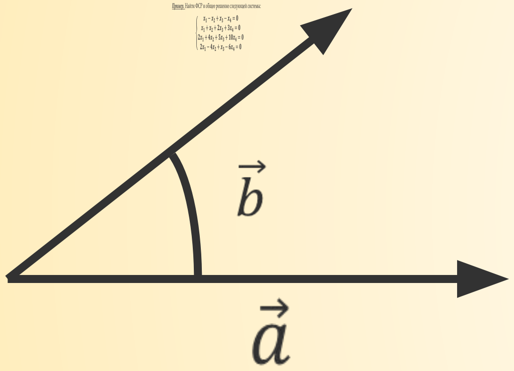
Приложения скалярного произведения

Теорема 4. Пусть однородная система линейных уравнений приведена к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

где r – ранг матрицы $A = (a_{ij})$, $r < n$.

1. Если D – произвольный определитель $n - r$ порядка отличный от нуля, то беря компоненты его строк в качестве значений свободных переменных и решая каждый раз получившуюся невырожденную систему, получим $n - r$ решений системы (2), образующих ФСР.
2. Любую фундаментальную систему решений системы (2) можно получить описанным способом из некоторого определителя отличного от нуля.



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Пример 1. Определить угол $\widehat{BAC}$ в треугольники с вершинами $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}; -\mathbf{1}; \mathbf{3})$, $\mathbf{B}(\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{1})$ и $\mathbf{C}(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{5})$.

▪ ***Задача 2.*** Найти проекцию вектора $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$ на вектор $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$.

$$\boldsymbol{pr_a \vec{b}} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{A(2; -1; 3)}$, $\mathbf{B(1; 1; 1)}$ и $\mathbf{C(0; 0; 5)}$. Найти $\boldsymbol{pr_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}}$