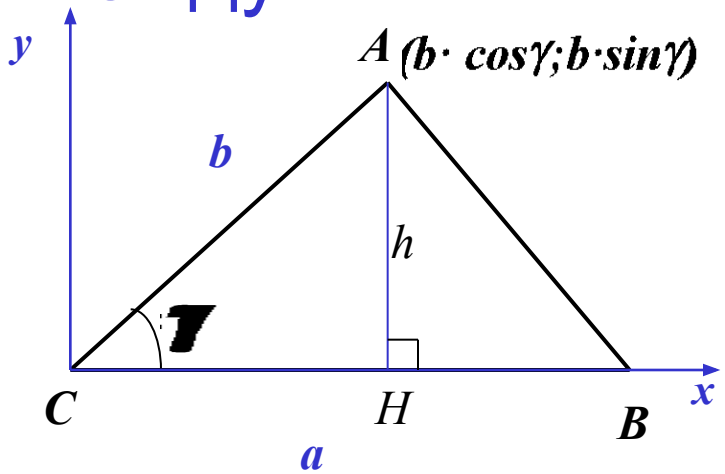
# Теорема о площади треугольника

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.




**Дано:** $\Delta ABC$, $BC=a$, $CA=b$, $\angle C=\gamma$

**Доказать:** $S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$

**Доказательство:**

*Введём прямоугольную систему координат ,*
*тогда координаты точки*
*A (b cosγ; b sinγ)*

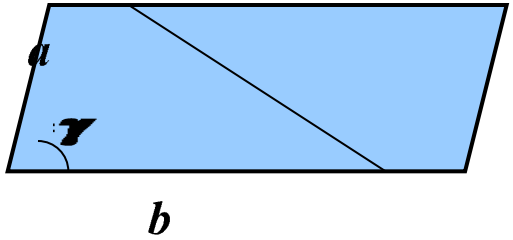
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h,$$

$$h=b\cdot \sin\gamma$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

# Следствие 1

- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними



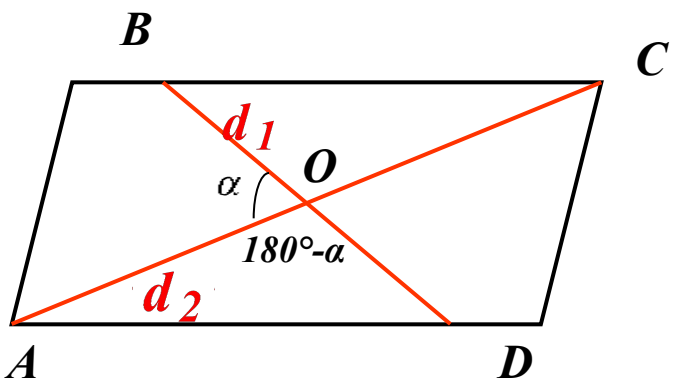

$$S_{пар} = a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

- ( докажите самостоятельно)

*Диагональ параллелограмма , делит его на два равновеликих треугольника :* $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a\, b \sin\gamma$ , $S_{пар} = a\, b \sin\gamma$

# Следствие 2

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними




**Дано:** ABCD- параллелограмм,

$BD=d_1$, $AC=d_2$, $\angle AOB=\alpha$

**Доказать:** $S=\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$

**Доказательство:**

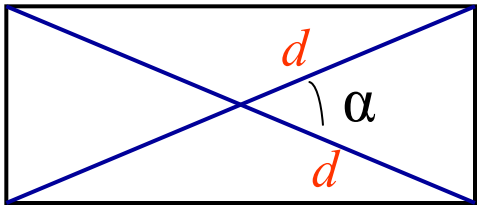
По свойству параллелограмма $S_{AOB}=S_{COD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

$S_{BOC}=S_{AOD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin(180°-\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

т.к. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$.

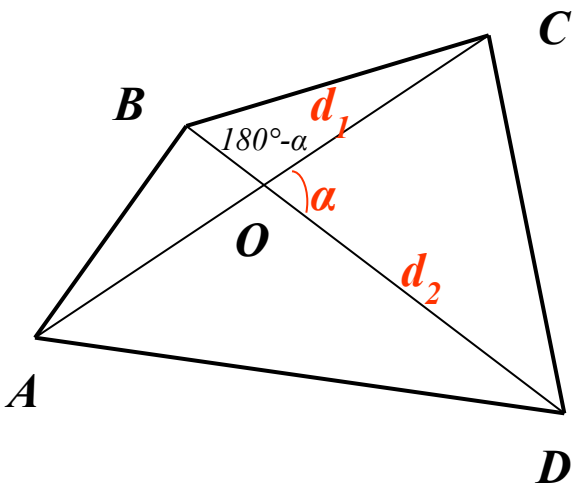
Значит, $S_{пар} = 4\cdot S_{\Delta} = 4\cdot\frac{d_1 \cdot d_2}{8}\sin\alpha, = \frac{d_1 \; d_2}{2}\sin\alpha$

# Площадь прямоугольника




$$S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\alpha$$

# Площадь произвольного четырёхугольника




**Дано:** ABCD- 4-угольник,

$BD=d_1$, $AC=d_2$, $\angle COD=\alpha$

**Доказать:** $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$

**Доказательство:**

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COB}=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha+$$

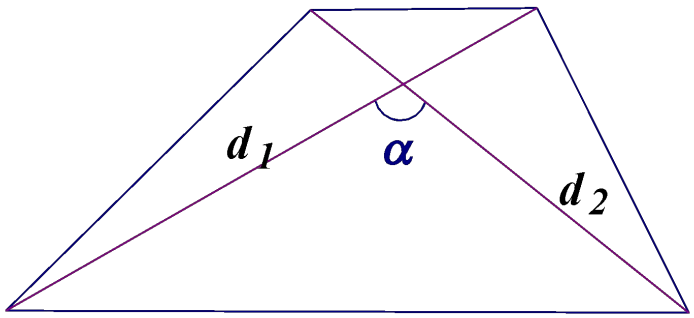
$$+\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}BO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}+\frac{1}{2}DO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot\sin\alpha\underbrace{(BO+OD)}_{BD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$$

# Площадь трапеции

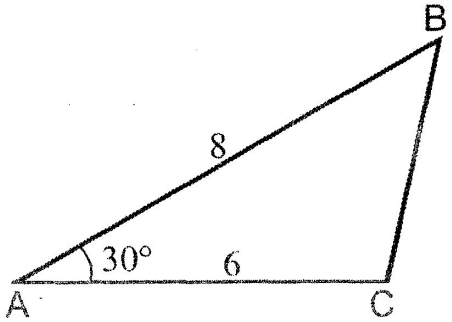



$$S=\frac{1}{2}\, d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$

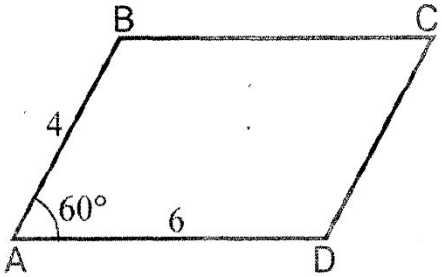
# Задания по готовым чертежам

# Вычислите площадь

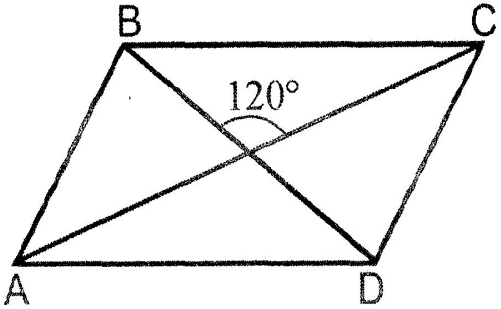
**№ 1.**




**№ 2.**

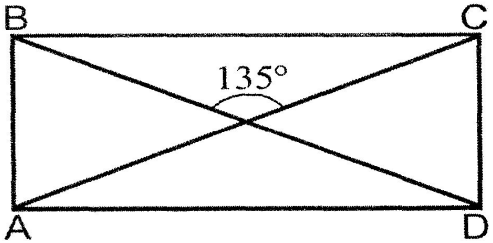



**№3.**



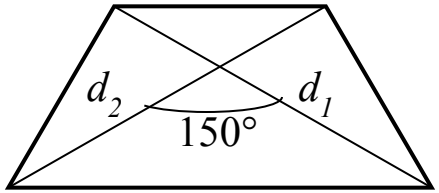

$ABCD$ – параллелограмм.
$BD = 6$, $AC = 10$.

**№4**

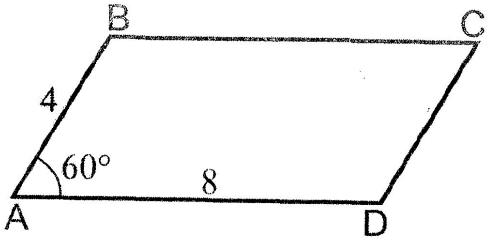



$ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

**№5**



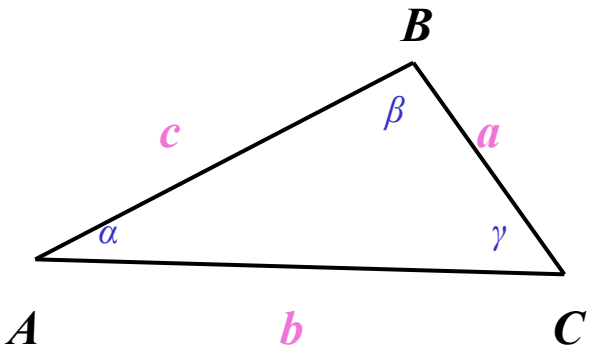

**№6**




***Найти: высоты параллелограмма***

# Теорема синусов

# Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов




***Дано:*** $\Delta ABC, AB=c,\ BC=a,\ AC=b$

***Доказать:*** $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

***Доказательство:***

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \Rightarrow b\sin\alpha=a\sin\beta \;\Big|\; :(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$$

*следовательно,* $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

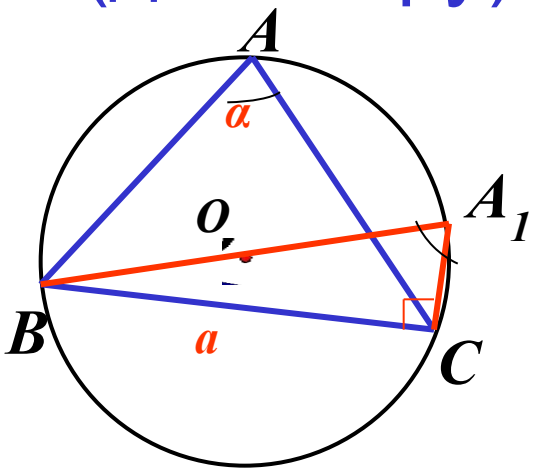
$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \Rightarrow c\sin\alpha=a\sin\gamma \;\Big|\; :(\sin\alpha\cdot\sin\gamma),$$

*следовательно,* $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

***Значит,*** $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$

# Следствие 1

## Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам (диаметру) описанной окружности.




***Дано:*** $\omega(O;R)$, $\Delta ABC$, $BC=a$, $\angle A=\alpha$

***Доказать:*** $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$

***Доказательство:*** *1 случай*

*Рассмотрим остроугольный треугольник*

*1)Проведём диаметр* $BA_1$

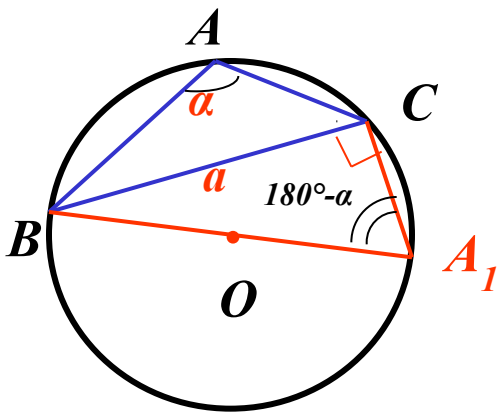
*2)* $\Delta BCA_1$ : $\angle C=90^\circ$ *( по свойству вписанного угла , опирающегося на диаметр)*

*3)* $\angle A=\angle A_1=\alpha$ *( по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу), значит,* $\sin\angle A=\sin\angle A_1=\sin\alpha$

*4)* $\Delta BCA_1$ : $\angle C=90^\circ$, $\sin\angle A_1=\dfrac{BC}{BA_1}$, *т.е.* $\sin\alpha=\dfrac{a}{2R}$, *отсюда* $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

2 случай

*ΔABC- тупоугольный (докажите самостоятельно)*



# Следствие 2

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$
- $a$, $b$, $c$ – *стороны треугольника*,

$R$ – *радиус окружности ,описанной около треугольника .*

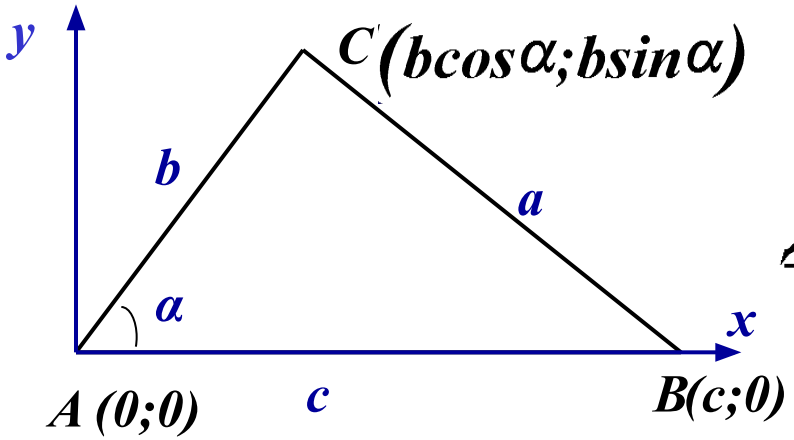
( *докажите самостоятельно, используя теорему о площади треугольника и следствие из теоремы синусов*)

$$S=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot \sin\alpha \qquad \frac{a}{\sin\alpha}=2R \qquad \sin\alpha=\frac{a}{2R}$$

*Значит,* $$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

# Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.




***Дано:*** $\Delta ABC$, $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$, $\angle A = \alpha$

***Доказать:*** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

***Доказательство:***

*Введём прямоугольную систему координат*

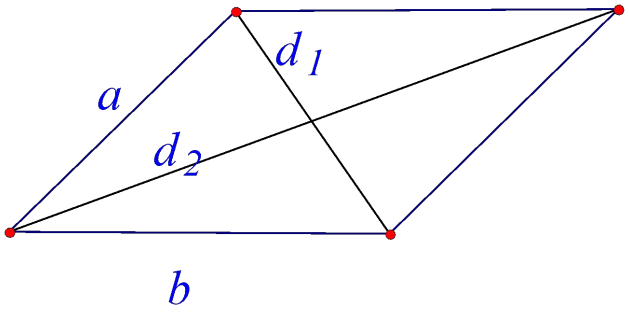
*По формуле расстояния между двумя точками получаем:*

$$BC^2 = a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + b^2\sin^2\alpha = \underline{b^2\cos^2\alpha} - 2bc\cos\alpha + c^2 + \underline{b^2\sin^2\alpha} =$$

$$= b^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Докажите самостоятельно , используя теорему косинусов , следующее утверждение:

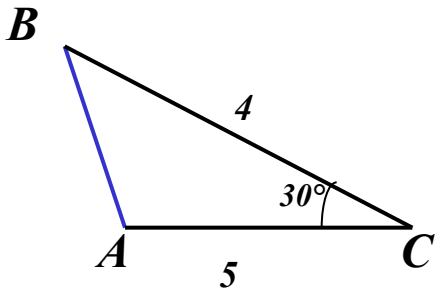
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.




$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

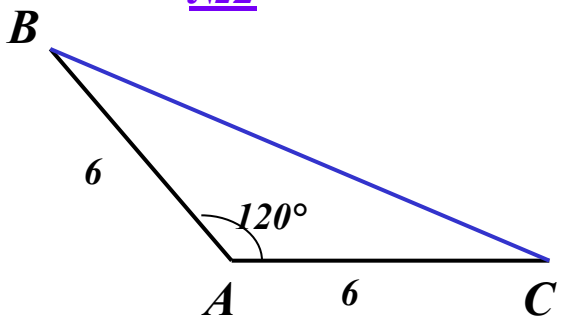
# Задания по готовым чертежам

## №1



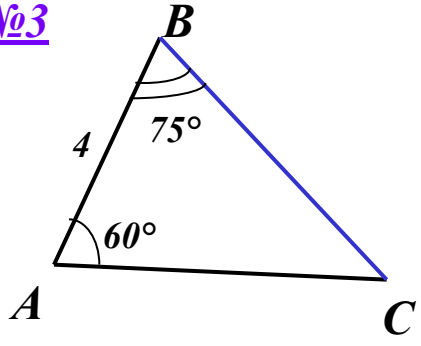

**Найти: AB**

## №2



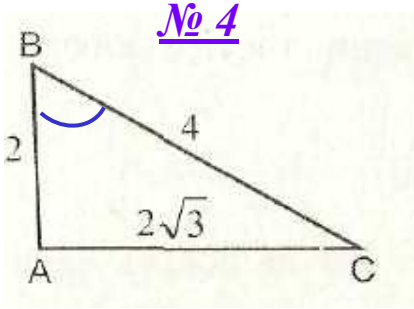

**Найти: BC**

## №3



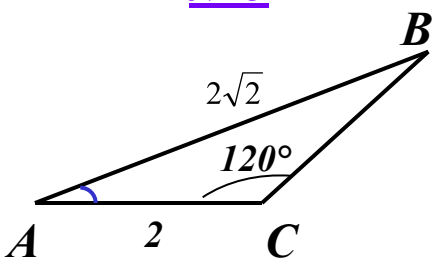

**Найти: BC**

## № 4



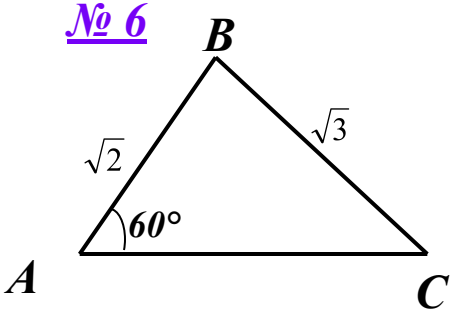

**Найти: ∠B.**

## № 5



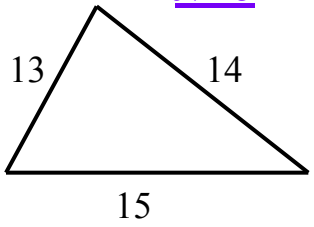

**Найти: ∠A.**

## № 6



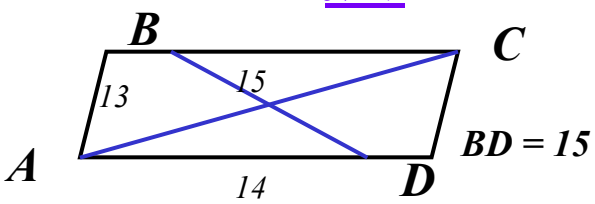

**Найти: ∠B и R**( *радиус описанной окружности*)

## № 6




**Найти: R**( *радиус описанной окружности*)

## № 7

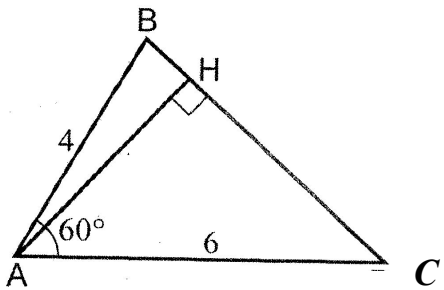



**BD = 15**

**Найти: AC**

# Задания по готовым чертежам

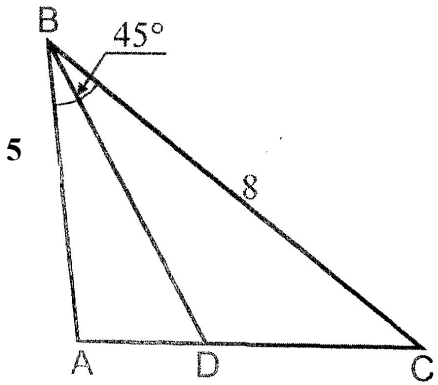
## №1




***BC***$= 2\sqrt{7}$

***Найти : AH***

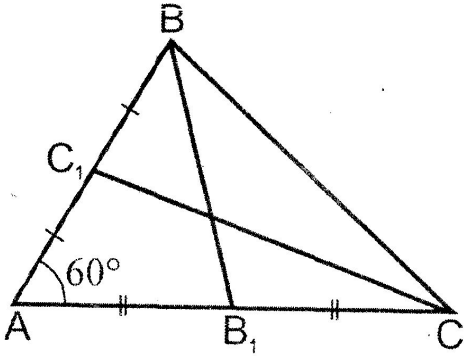
## №2




***BD-*** *биссектриса*

***Найти :*** $S_{ABD}$ , $S_{BDC}$

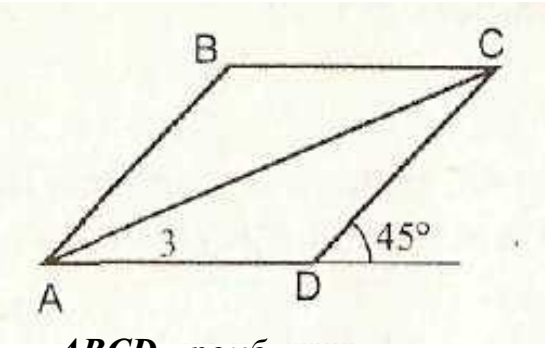
## №3




***AB=10, AC=14.***

***Найти:*** $S_{BOC}$,

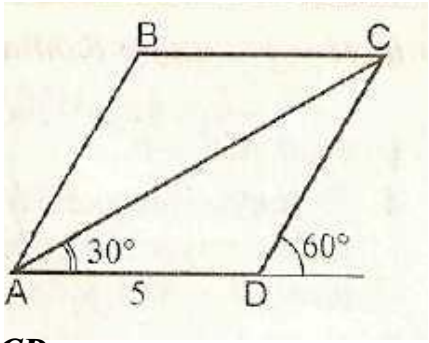
## №4




***ABCD*** *- ромб*

***Найти : AC***

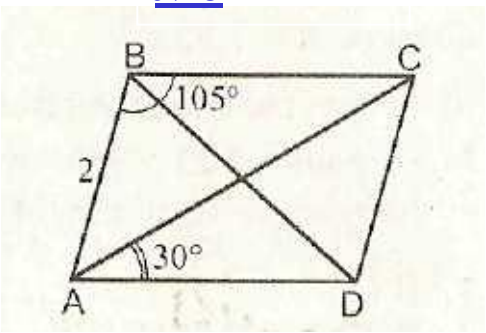
## №5




***ABCD*** *- параллелограмм*

***Найти : AC***

## №6




***ABCD*** *- параллелограмм*

***Найти : BC***