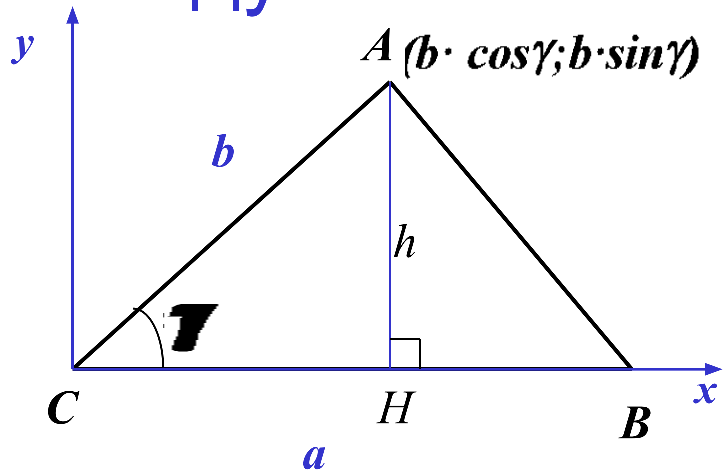
Теорема о площади треугольника

•Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



Дано: ΔABC, $BC=a$, $CA=b$, $\angle C=\gamma$

Доказать: $S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$

Доказательство:

Введём прямоугольную систему координат ,
тогда координаты точки
A (b cosγ; b sinγ)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h,$$

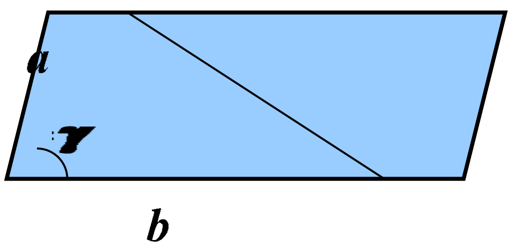
$$h=b\cdot \sin\gamma$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

Следствие 1

- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними

$$S_{пар}=a\cdot b\cdot \sin\gamma$$



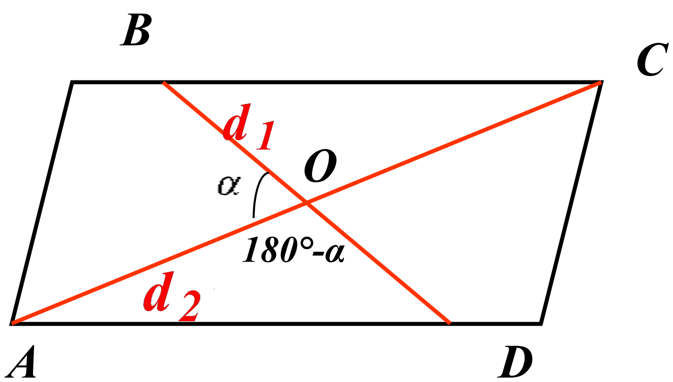
- (докажите самостоятельно)

Диагональ параллелограмма , делит его на два равновеликих

треугольника : $S_{\Delta}=\frac{1}{2}a\,b\,\sin\gamma$, $\mathbf{S_{пар}= a\,b\,\sin\gamma}$

Следствие 2

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними



Дано: *ABCD- параллелограмм,*

$BD=d_1,\ AC=d_2,\ \angle AOB=\alpha$

Доказать: $S=\frac{1}{2}\,d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$

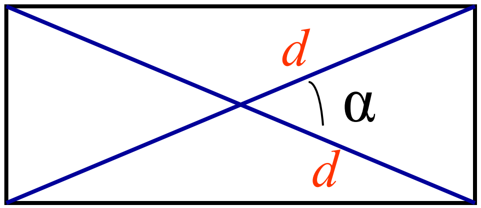
Доказательство:

По свойству параллелограмма $S_{AOB}=S_{COD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha=\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

$S_{BOC}=S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha=\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

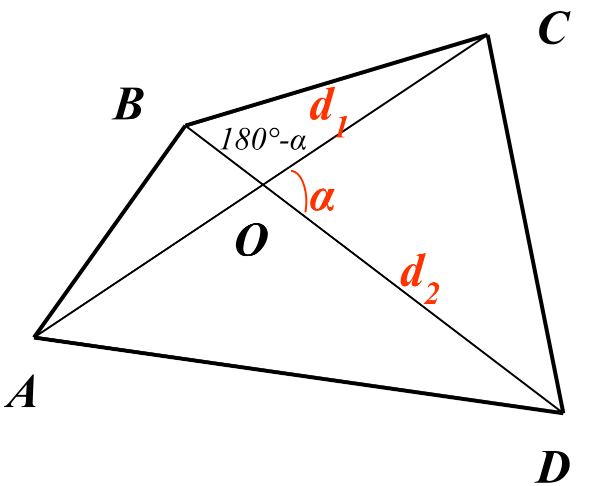
т.к. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha.$ *Значит,* $S_{пар}=4\cdot S_{\Delta}=4\cdot\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,=\frac{d_1\,d_2}{2}\sin\alpha$

Площадь прямоугольника



$$S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\alpha$$

Площадь произвольного четырёхугольника



Дано: *ABCD- 4-угольник,*

$BD=d_1,\ AC=d_2,\ \angle COD=\alpha$

Доказать: $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$

Доказательство:

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COB}=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha+$$

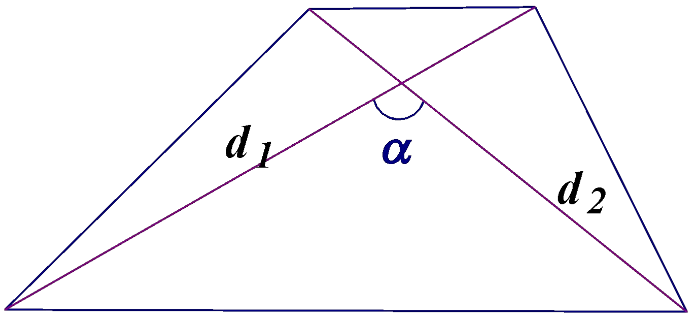
$$+\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}BO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}+\frac{1}{2}DO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot\sin\alpha\underbrace{(BO+OD)}_{BD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$$

Площадь трапеции

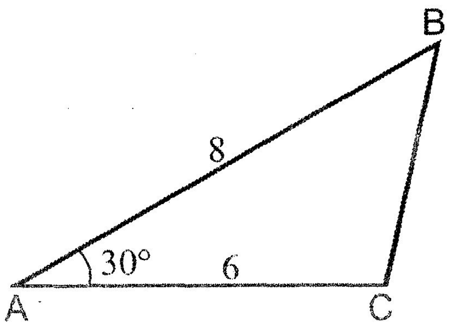


$$S=\frac{1}{2}\,d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$$

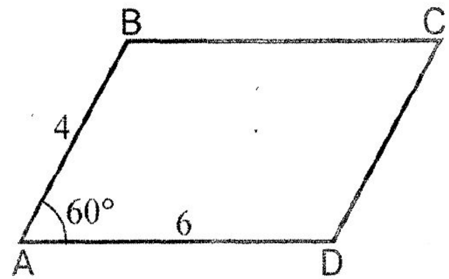
Задания по готовым чертежам

Вычислите площадь

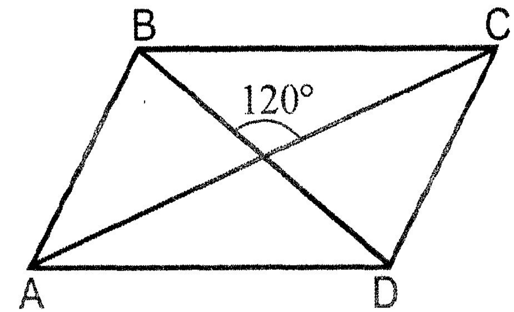
№ 1.



№ 2.



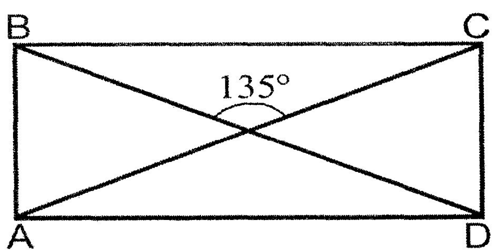
№3.



$ABCD$ – параллелограмм.

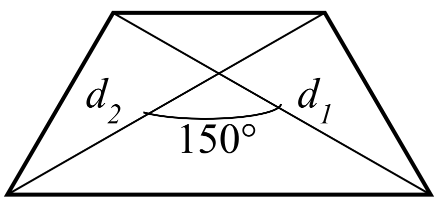
$BD = 6$, $AC = 10$.

№4

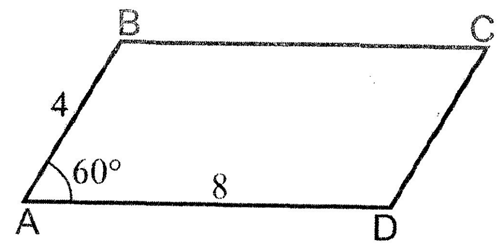


$ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

№5



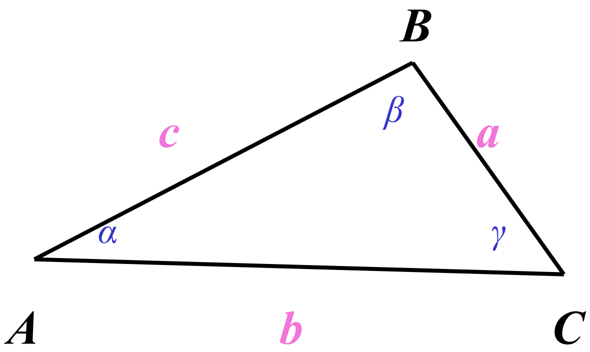
№6



Найти: высоты параллелограмма

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



Дано: $\Delta ABC, AB=c,\ BC=a,\ AC=b$

Доказать: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \Rightarrow b\sin\alpha=a\sin\beta \;\Big|\; :(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$$

следовательно, $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

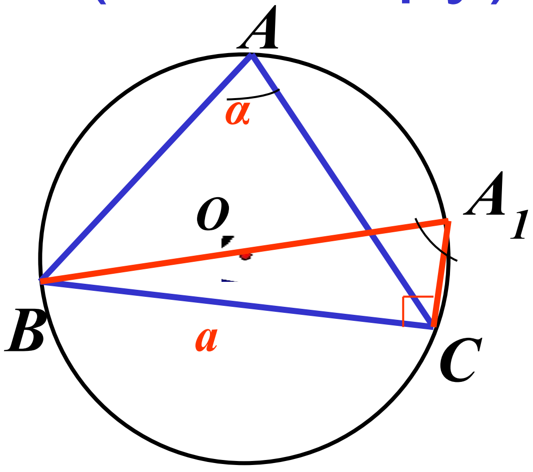
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \Rightarrow c\sin\alpha=a\sin\gamma \;\Big|\; :(\sin\alpha\cdot\sin\gamma),$$

следовательно, $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

Значит, $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$

Следствие 1

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам (диаметру) описанной окружности.



Дано: $\omega(O;R)$, ΔABC, $BC=a$, $\angle A=\alpha$

Доказать: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$

Доказательство: 1 случай

Рассмотрим остроугольный треугольник

1) *Проведём диаметр* BA_1

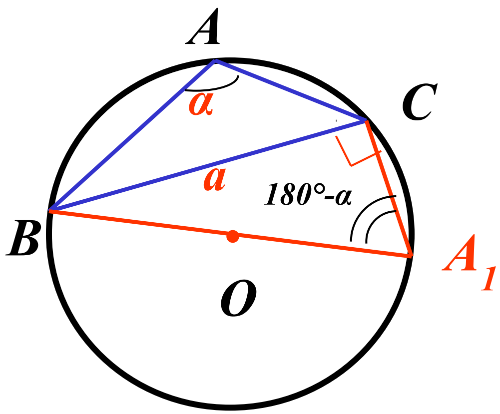
2) $\Delta BCA_1: \angle C=90°$ *(по свойству вписанного угла , опирающегося на диаметр)*

3) $\angle A=\angle A_1=\alpha$ *(по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу),*
значит, $\sin\angle A=\sin\angle A_1=\sin\alpha$

4) $\Delta BCA_1: \angle C=90°$, $\sin\angle A_1=\dfrac{BC}{BA_1}$, *т.е.* $\sin\alpha=\dfrac{a}{2R}$, *отсюда* $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

2 случай

ΔABC- тупоугольный *(докажите самостоятельно)*



Следствие 2

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
- a, b, c – *стороны треугольника*,

R – *радиус окружности ,описанной около треугольника .*

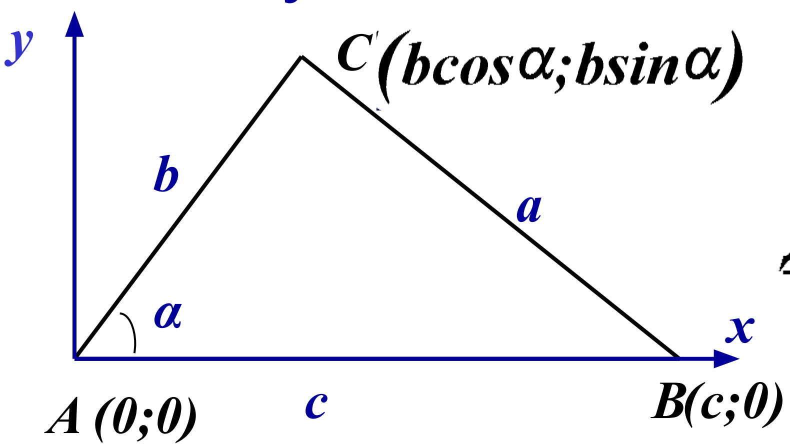
(*докажите самостоятельно, используя теорему о площади треугольника и следствие из теоремы синусов*)

$S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$ $\qquad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ $\qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R}$

Значит, $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано: ΔABC, $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$, $\angle A = \alpha$

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Доказательство:

Введём прямоугльную систему координат

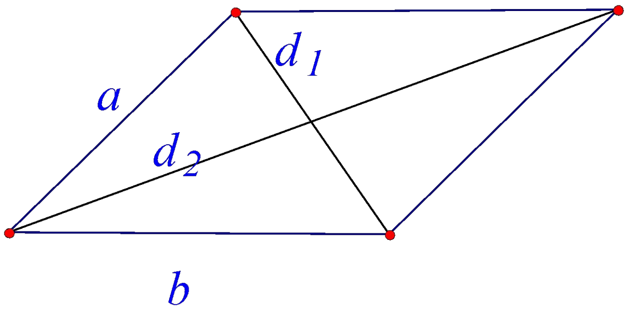
По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$BC^2 = a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + b^2\sin^2\alpha = \underline{b^2\cos^2\alpha} - 2bc\cos\alpha + c^2 + \underline{b^2\sin^2\alpha} =$$

$$= b^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Докажите самостоятельно , используя теорему косинусов , следующее утверждение:

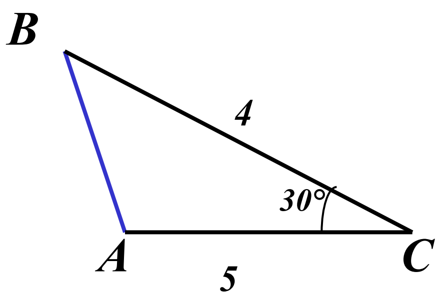
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

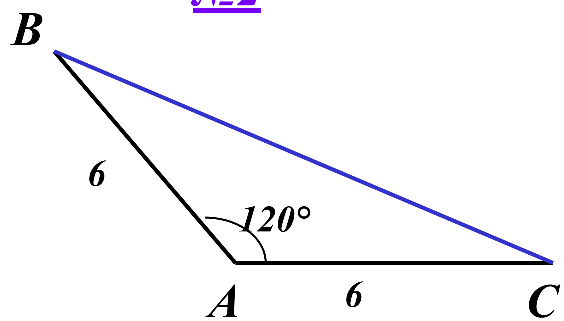
Задания по готовым чертежам

№1



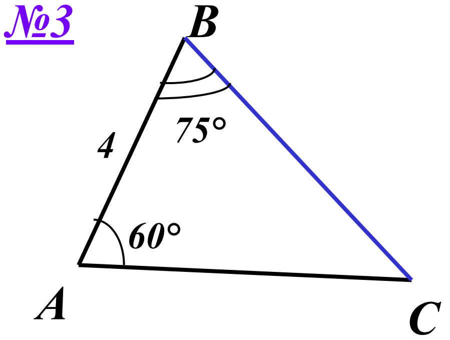
Найти: AB

№2



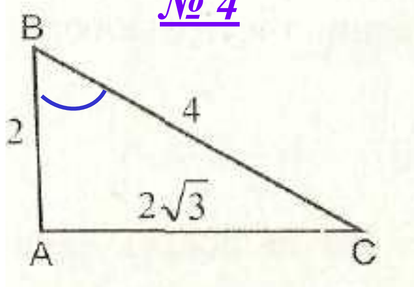
Найти: BC

№3



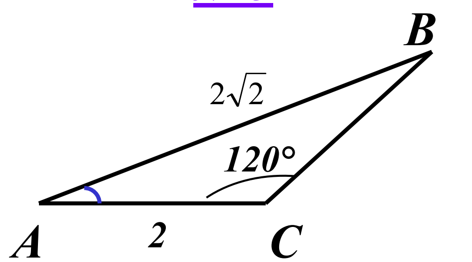
Найти: BC

№ 4



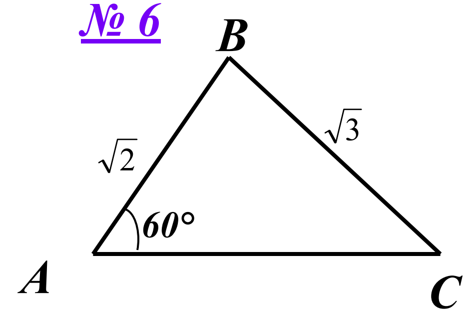
Найти: $\angle B$.

№ 5



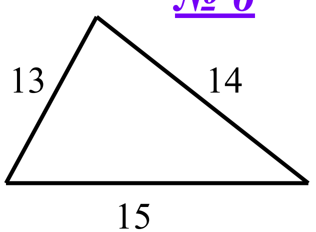
Найти: $\angle A$.

№ 6



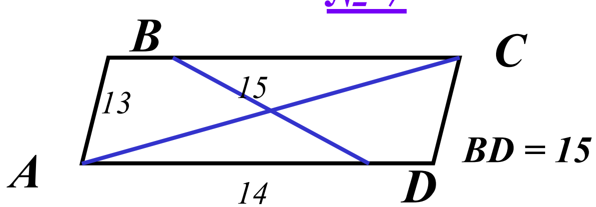
Найти: $\angle$ **B и R**(*радиус описанной окружности*)

№ 6



Найти: R(*радиус описанной окружности*)

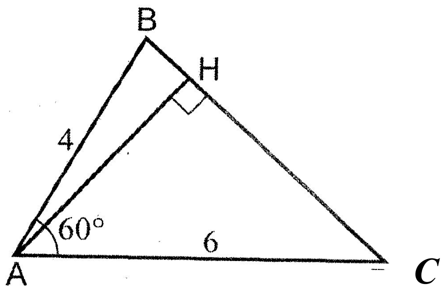
№ 7



Найти: AC

Задания по готовым чертежам

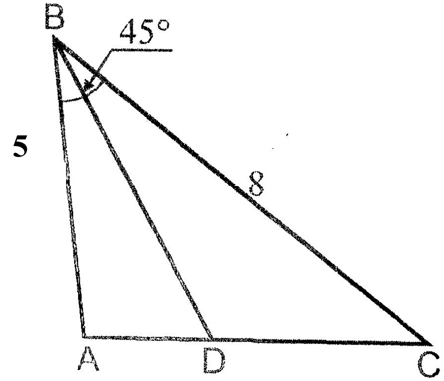
№1



$BC = 2\sqrt{7}$

Найти : AH

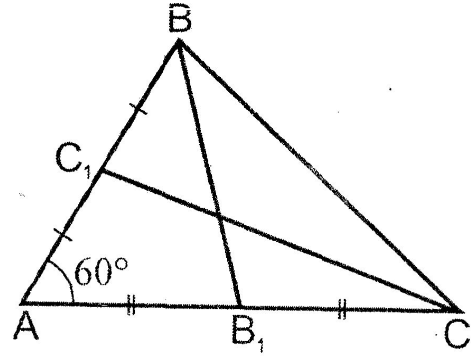
№2



BD- *биссектриса*

Найти : S_{ABD} , S_{BDC}

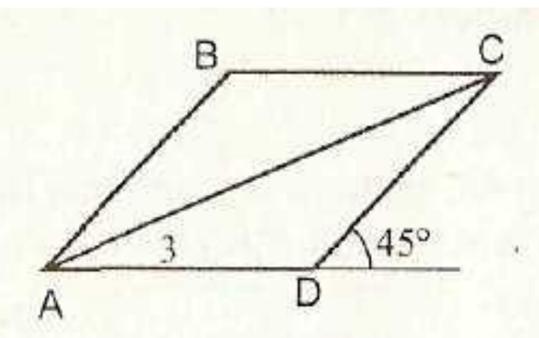
№3



AB=10, AC=14.

Найти: S_{BOC},

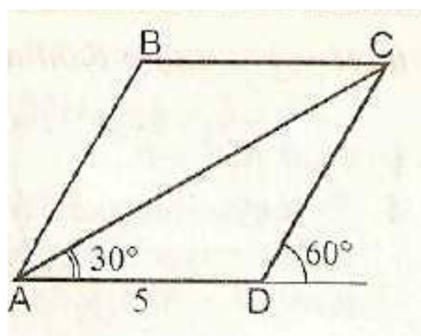
№4



ABCD - *ромб*

Найти : AC

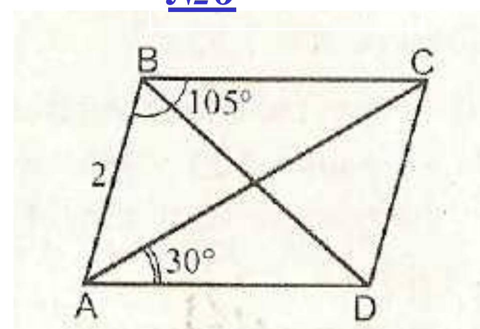
№5



ABCD - *параллелограмм*

Найти : AC

№6



ABCD - *параллелограмм*

Найти : BC