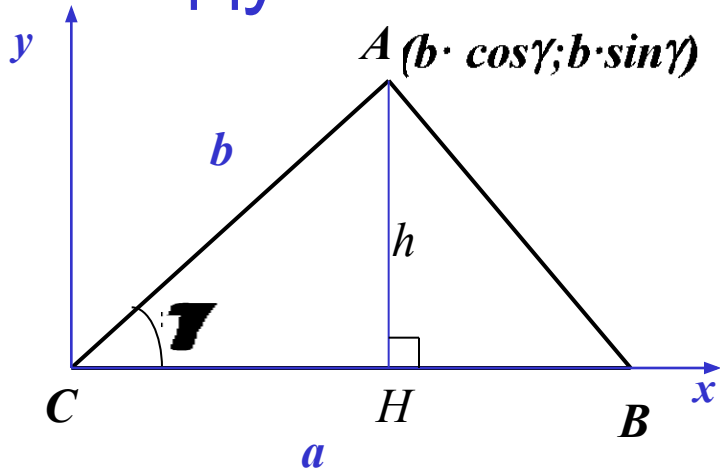


# Теорема о площади треугольника

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC=a$ ,  $CA=b$ ,  $\angle C=\gamma$

Доказать:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$

Доказательство:

Введём прямоугольную систему координат, тогда координаты точки  $A (b \cos \gamma; b \sin \gamma)$

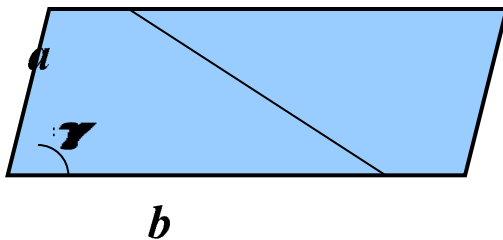
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

$$h = b \cdot \sin \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

# Следствие 1

- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними



$$S_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

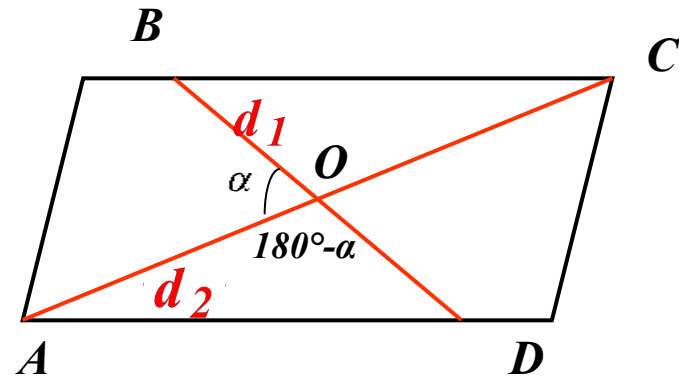
- (докажите самостоятельно)

*Диагональ параллелограмма, делит его на два равновеликих*

*треугольника :  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$  ,  $S_{\text{пар}} = a b \sin \gamma$*

# Следствие 2

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними



Дано:  $ABCD$ - параллелограмм,  
 $BD=d_1, AC=d_2, \angle AOB=\alpha$

Доказать:  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

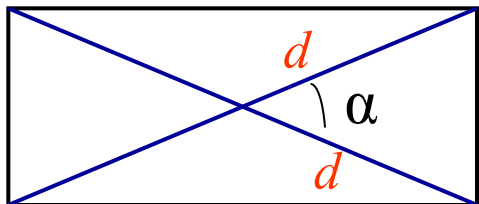
Доказательство:

$$\text{По свойству параллелограмма } S_{AOB} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha,$$

$$S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha,$$

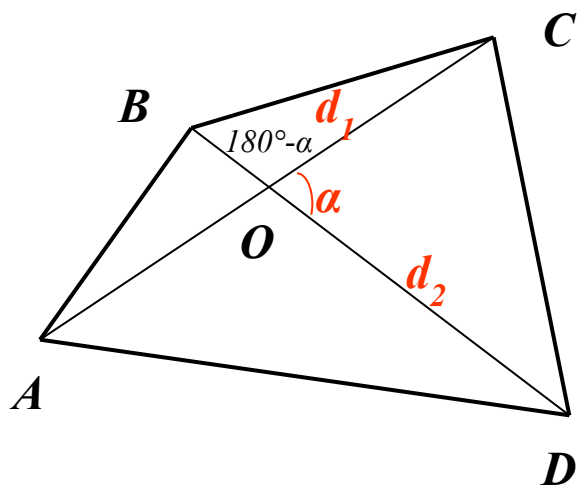
$$\text{т.к. } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad \text{Значит, } S_{\text{пар}} = 4 \cdot S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \alpha$$

# Площадь прямоугольника



$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$$

# Площадь произвольного четырёхугольника



Дано: ABCD- 4-угольник,

$$BD=d_1, AC=d_2, \angle COD=\alpha$$

Доказать:  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha$$

$$S_{COB} = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin \alpha$$

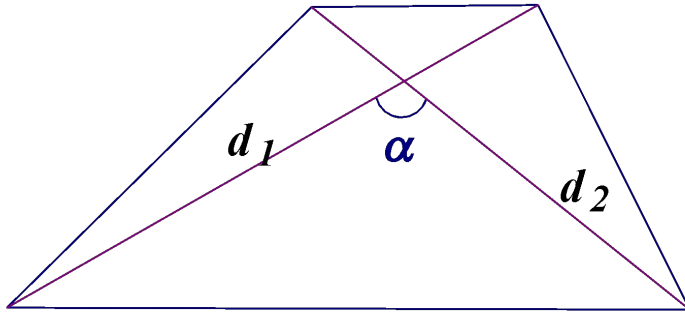
$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin \alpha + \\ &+ \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} BO \cdot \sin \alpha \cdot (AO + OC) + \frac{1}{2} DO \cdot \sin \alpha \cdot (AO + OC) \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot \sin \alpha \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

# Площадь трапеции



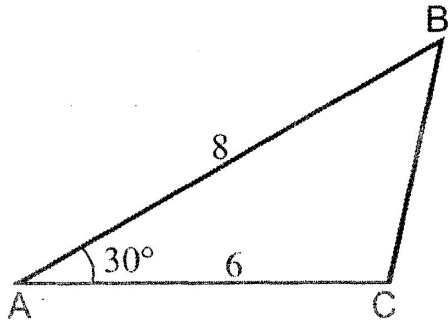
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

# Задания по готовым чертежам

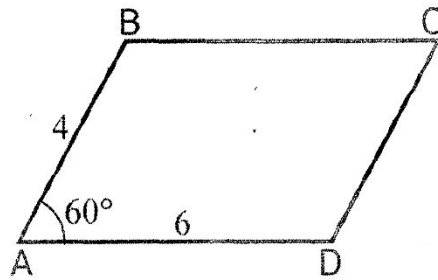


# Вычислите площадь

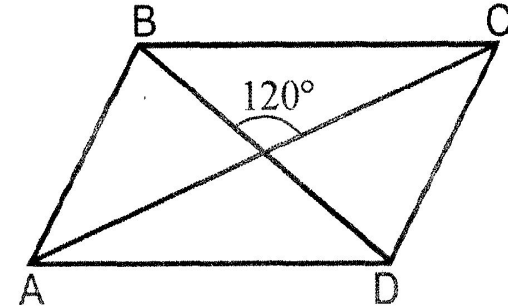
№ 1.



№ 2.

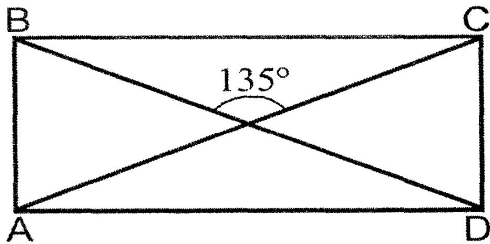


№3.



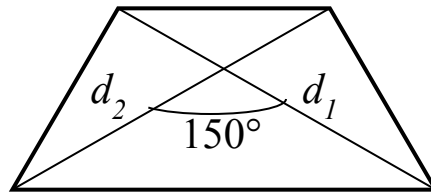
$ABCD$  – параллелограмм.  
 $BD = 6, AC = 10$ .

№4

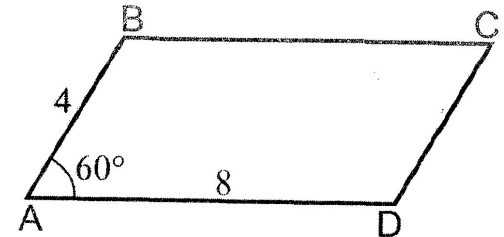


$ABCD$  – прямоугольник.  $AC = 12$ .

№5



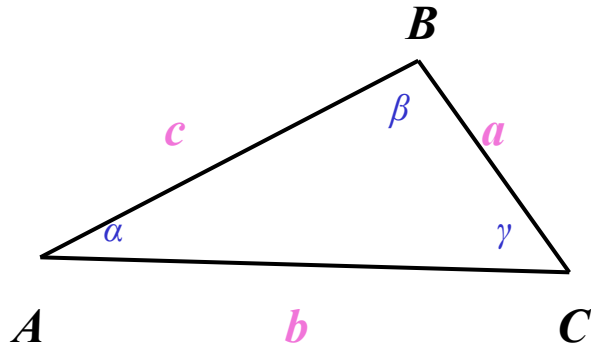
№6



Найти: высоты  
параллелограмма

# Теорема синусов

# Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



Дано:  $\triangle ABC, AB=c, BC=a, AC=b$

Доказать:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} c b \sin \alpha \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} c a \sin \beta \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} c b \sin \alpha = \frac{1}{2} c a \sin \beta \Rightarrow b \sin \alpha = a \sin \beta \quad \left| : (\sin \alpha \cdot \sin \beta) \right.$$

следовательно,  $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$

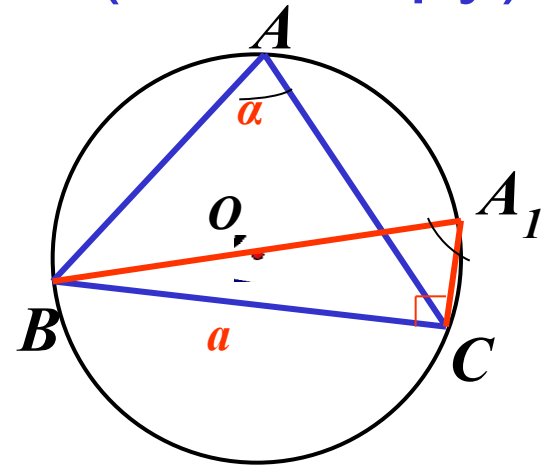
$$\left. \begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} c b \sin \alpha \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} c b \sin \alpha = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \Rightarrow c \sin \alpha = a \sin \gamma \quad \left| : (\sin \alpha \cdot \sin \gamma) \right.$$

следовательно,  $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$

Значит,  $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

# Следствие 1

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам (диаметру) описанной окружности.



Дано:  $\omega(O; R), \Delta ABC, BC = a, \angle A = \alpha$

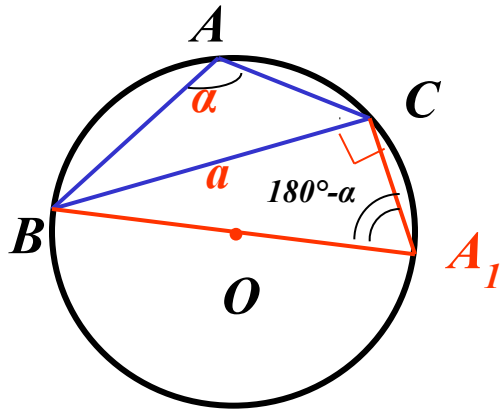
Доказать:  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

Доказательство: 1 случай

*Рассмотрим остроугольный треугольник*

- 1) Проведём диаметр  $BA_1$
- 2)  $\Delta BCA_1: \angle C = 90^\circ$  (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр)
- 3)  $\angle A = \angle A_1 = \alpha$  (по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу),  
значит,  $\sin \angle A = \sin \angle A_1 = \sin \alpha$
- 4)  $\Delta BCA_1: \angle C = 90^\circ, \sin \angle A_1 = \frac{BC}{BA_1}$ , т.е.  $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ , отсюда  $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$

2 случай  $\triangle ABC$ - тупоугольный (докажите самостоятельно)



# Следствие 2

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле  $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
- $a, b, c$  – стороны треугольника,  
 $R$  – радиус окружности, описанной около треугольника .

( докажите самостоятельно, используя теорему о площади треугольника и следствие из теоремы синусов )

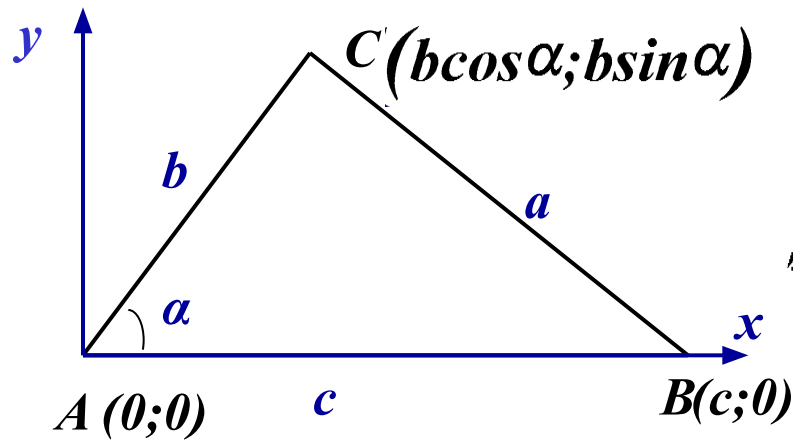
$$S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

Значит,

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

# Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано:  $\Delta ABC$ ,  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  
 $CB=a$ ,  $\angle A=\alpha$

Доказать:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Доказательство:

Введём прямоугольную систему координат

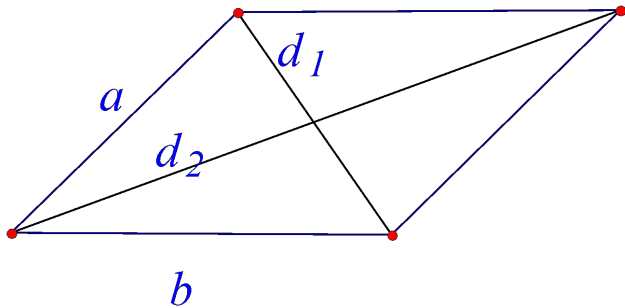
По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$BC^2 = a^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + b^2 \sin^2 \alpha = \underbrace{b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}_{b^2} - 2bc \cos \alpha + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



Докажите самостоятельно , используя теорему косинусов , следующее утверждение:

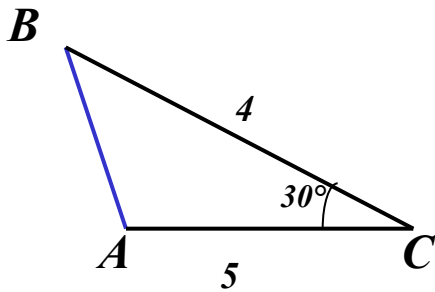
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

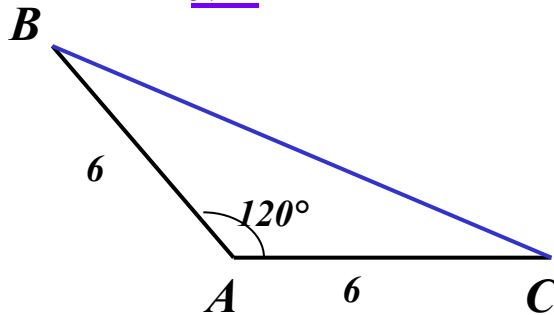
# Задания по ГОТОВЫМ чертежам

№1



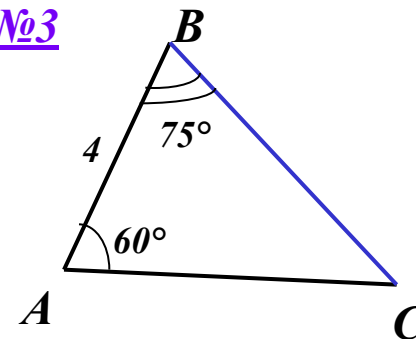
Найти: AB

№2



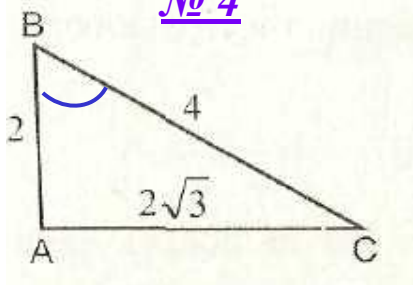
Найти: BC

№3



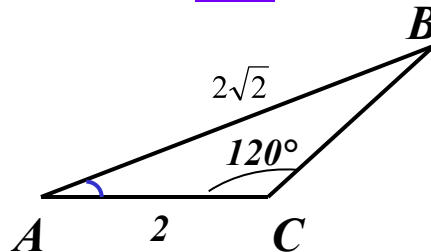
Найти: BC

№4



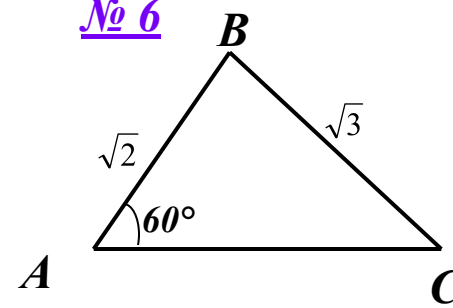
Найти:  $\angle B$ .

№5



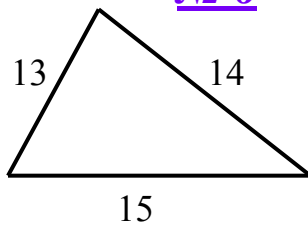
Найти:  $\angle A$ .

№6



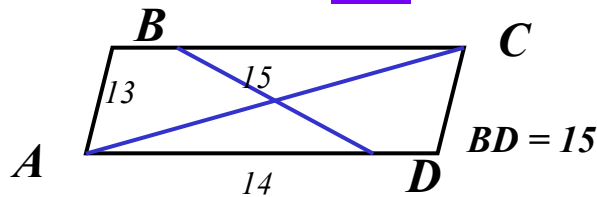
Найти:  $\angle B$  и  $R$  (радиус описанной окружности)

№6



Найти:  $R$  (радиус описанной окружности)

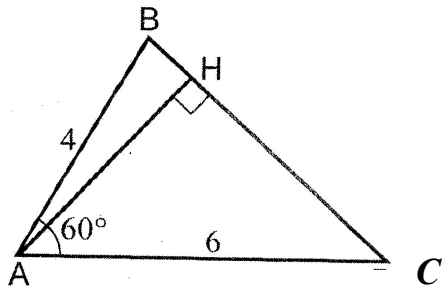
№7



Найти: AC

# Задания по ГОТОВЫМ чертежам

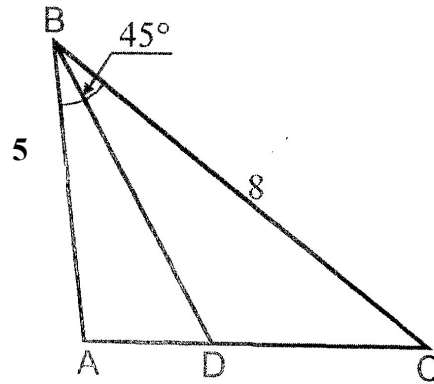
№1



$$BC = 2\sqrt{7}$$

Найти:  $AH$

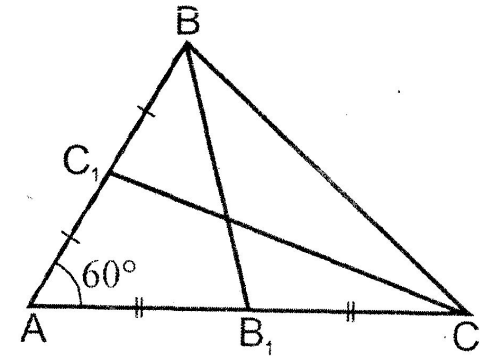
№2



$BD$  - биссектриса

Найти:  $S_{ABD}$ ,  $S_{BDC}$

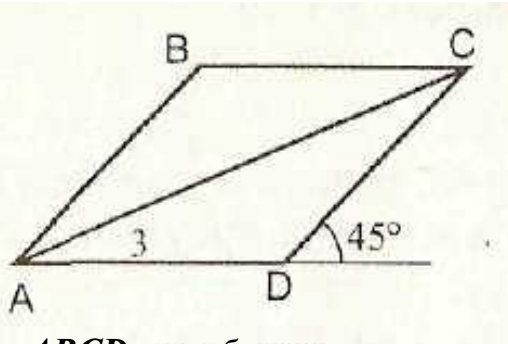
№3



$$AB = 10, AC = 14.$$

Найти:  $S_{B_1OC}$

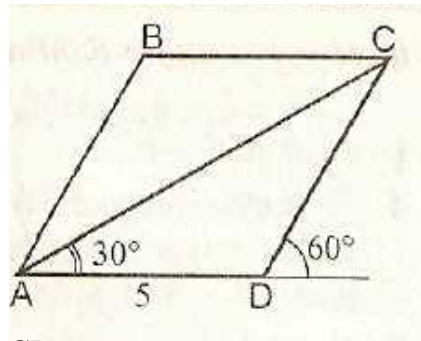
№4



$ABCD$  - ромб

Найти:  $AC$

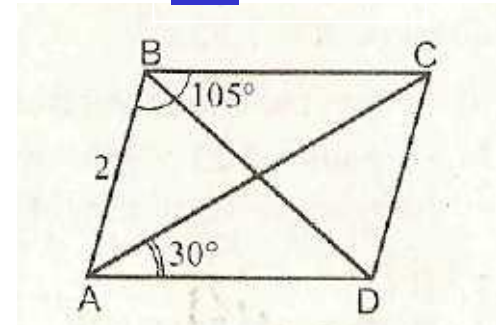
№5



$ABCD$  - параллелограмм

Найти:  $AC$

№6



$ABCD$  - параллелограмм

Найти:  $BC$