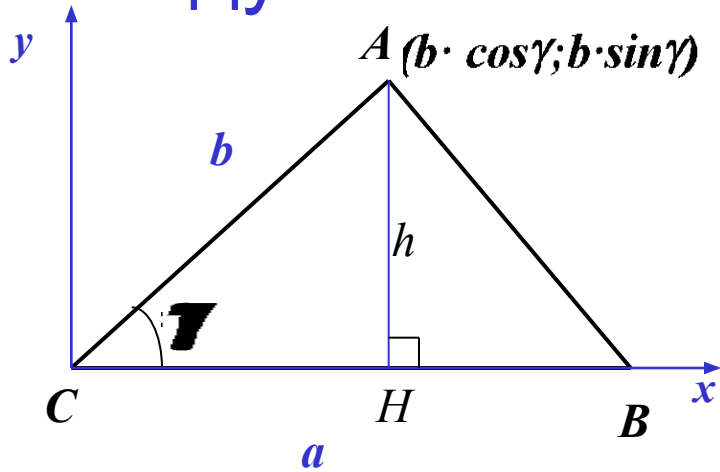


Теорема о площади треугольника

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



Дано: $\triangle ABC$, $BC=a$, $CA=b$, $\angle C=\gamma$

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$

Доказательство:

Введём прямоугольную систему координат, тогда координаты точки $A (b \cos \gamma; b \sin \gamma)$

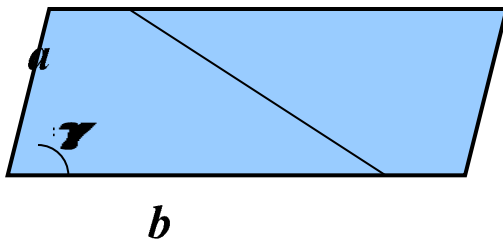
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

$$h = b \cdot \sin \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Следствие 1

- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними



$$S_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

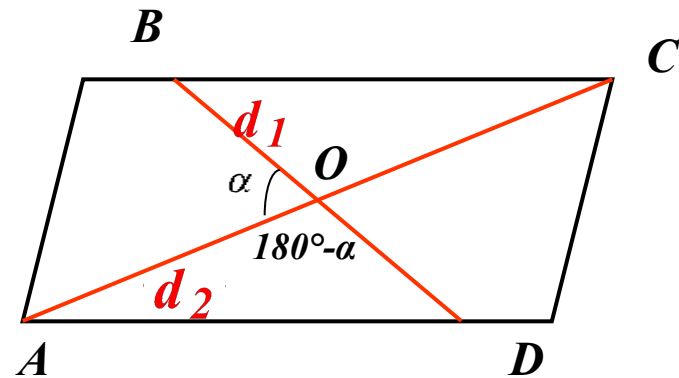
- (докажите самостоятельно)

Диагональ параллелограмма, делит его на два равновеликих

треугольника : $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$, $S_{\text{пар}} = a b \sin \gamma$

Следствие 2

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними



Дано: $ABCD$ - параллелограмм,
 $BD=d_1, AC=d_2, \angle AOB=\alpha$

Доказать: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

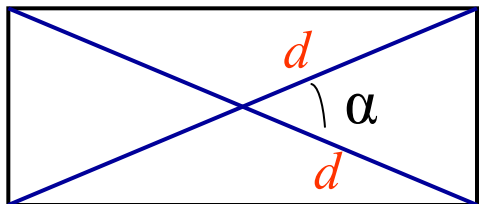
Доказательство:

$$\text{По свойству параллелограмма } S_{AOB} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha,$$

$$S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha,$$

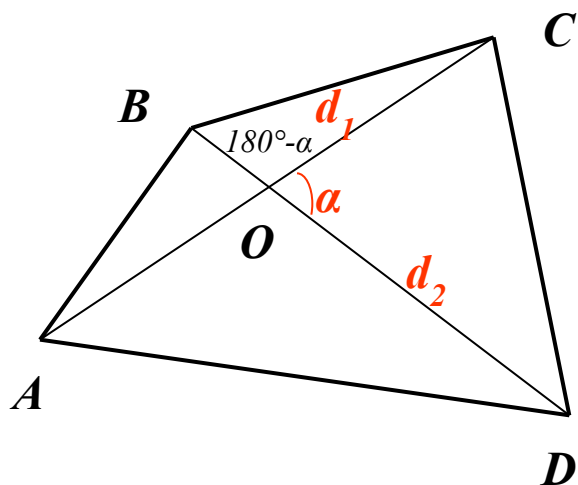
$$\text{т.к. } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad \text{Значит, } S_{\text{пар}} = 4 \cdot S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \sin \alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \alpha$$

Площадь прямоугольника



$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$$

Площадь произвольного четырёхугольника



Дано: $ABCD$ - 4-угольник,

$$BD=d_1, AC=d_2, \angle COD=\alpha$$

Доказать: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha$$

$$S_{COB} = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin \alpha$$

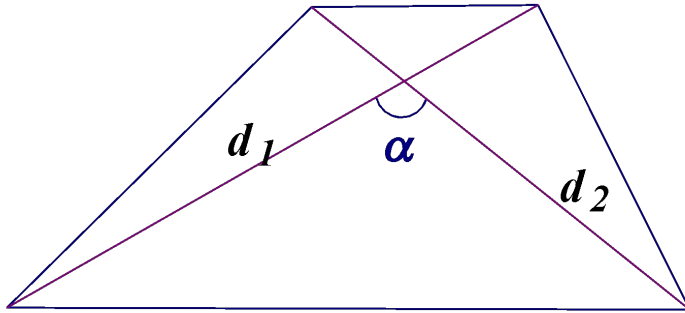
$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin \alpha + \\ &+ \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} BO \cdot \sin \alpha \cdot (AO + OC) + \frac{1}{2} DO \cdot \sin \alpha \cdot (AO + OC) \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot \sin \alpha \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

Площадь трапеции

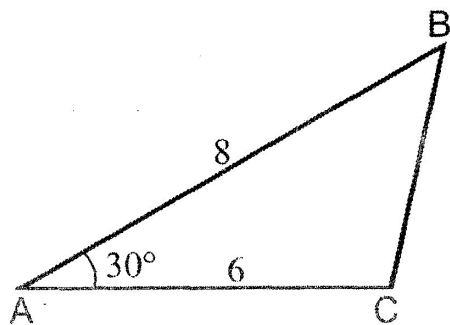


$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

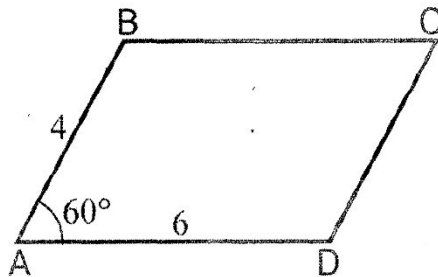
Задания по готовым чертежам

Вычислите площадь

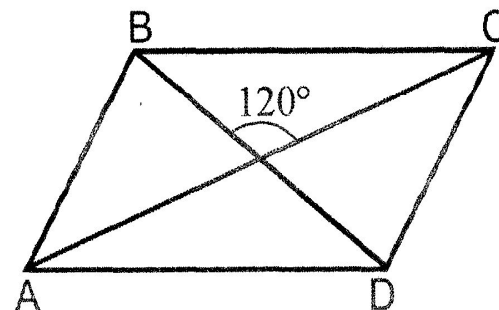
№ 1.



№ 2.

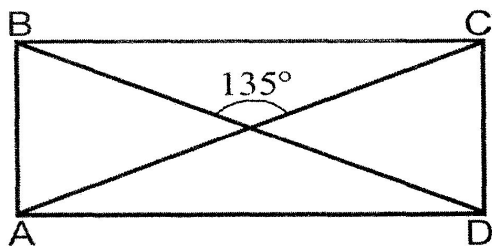


№3.



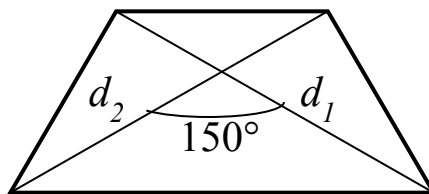
$ABCD$ – параллелограмм.
 $BD = 6, AC = 10$.

№4

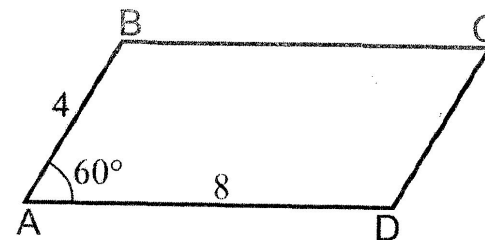


$ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

№5



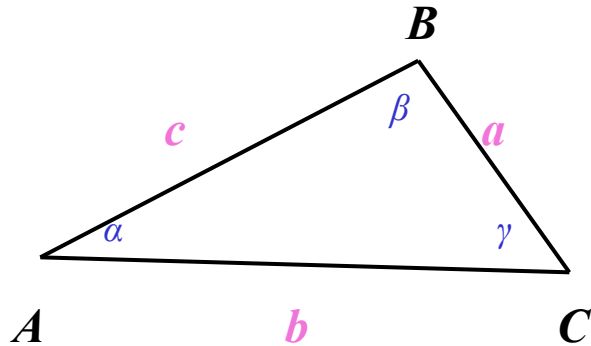
№6



Найти: высоты
параллелограмма

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



Дано: $\triangle ABC, AB=c, BC=a, AC=b$

Доказать: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} c b \sin \alpha \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} c a \sin \beta \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} c b \sin \alpha = \frac{1}{2} c a \sin \beta \Rightarrow b \sin \alpha = a \sin \beta \quad \left| : (\sin \alpha \cdot \sin \beta) \right.$$

следовательно, $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$

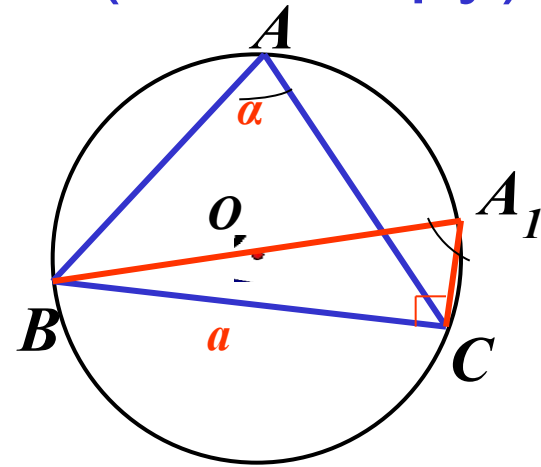
$$\left. \begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} c b \sin \alpha \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} c b \sin \alpha = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \Rightarrow c \sin \alpha = a \sin \gamma \quad \left| : (\sin \alpha \cdot \sin \gamma) \right.$$

следовательно, $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$

Значит, $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

Следствие 1

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам (диаметру) описанной окружности.



Дано: $\omega(O; R), \Delta ABC, BC = a, \angle A = \alpha$

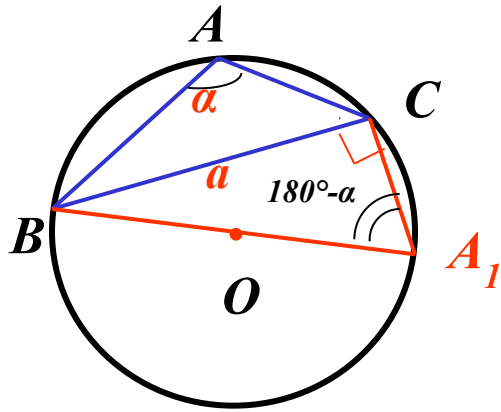
Доказать: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

Доказательство: 1 случай

Рассмотрим остроугольный треугольник

- 1) Проведём диаметр BA_1
- 2) $\Delta BCA_1: \angle C = 90^\circ$ (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр)
- 3) $\angle A = \angle A_1 = \alpha$ (по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу),
значит, $\sin \angle A = \sin \angle A_1 = \sin \alpha$
- 4) $\Delta BCA_1: \angle C = 90^\circ, \sin \angle A_1 = \frac{BC}{BA_1}$, т.е. $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, отсюда $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$

2 случай $\triangle ABC$ - тупоугольный (докажите самостоятельно)



Следствие 2

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
- a, b, c – стороны треугольника,
 R – радиус окружности, описанной около треугольника .

(докажите самостоятельно, используя теорему о площади треугольника и следствие из теоремы синусов)

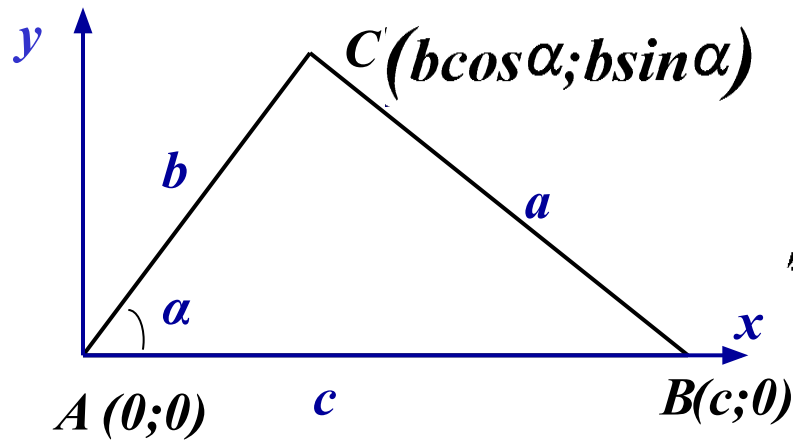
$$S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

Значит,

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=c$, $AC=b$,
 $CB=a$, $\angle A=\alpha$

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Доказательство:

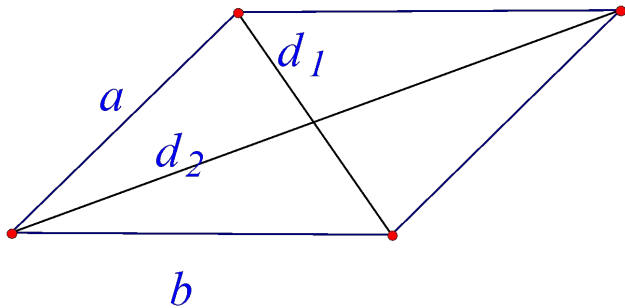
Введём прямоугольную систему координат

По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$\begin{aligned}
 BC^2 = a^2 &= (b \cos \alpha - c)^2 + b^2 \sin^2 \alpha = \underline{b^2 \cos^2 \alpha} - 2bc \cos \alpha + c^2 + \underline{b^2 \sin^2 \alpha} = \\
 &= b^2 (\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1) + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Докажите самостоятельно , используя теорему косинусов , следующее утверждение:

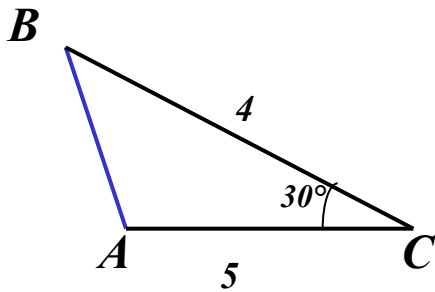
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

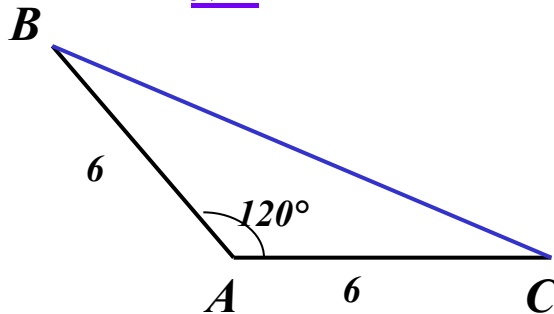
Задания по ГОТОВЫМ чертежам

№1



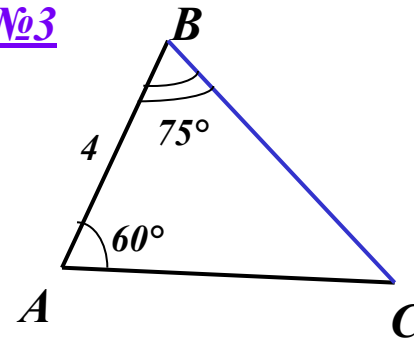
Найти: AB

№2



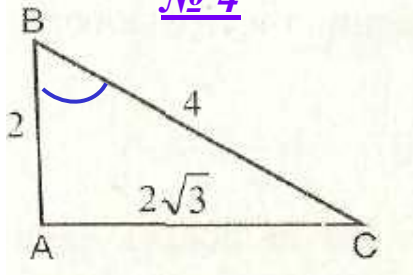
Найти: BC

№3



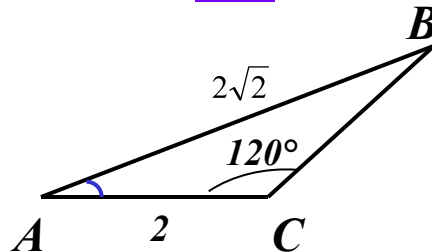
Найти: BC

№4



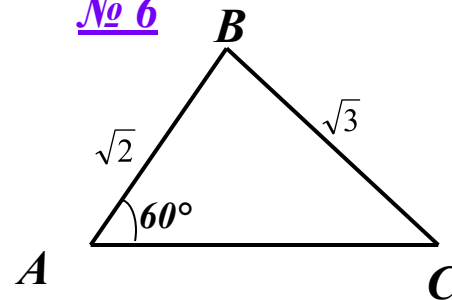
Найти: $\angle B$.

№5



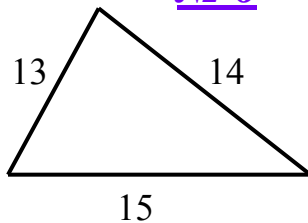
Найти: $\angle A$.

№6



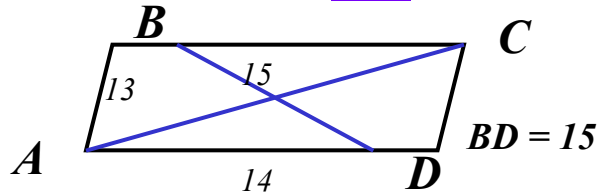
Найти: $\angle B$ и R (радиус описанной окружности)

№6



Найти: R (радиус описанной окружности)

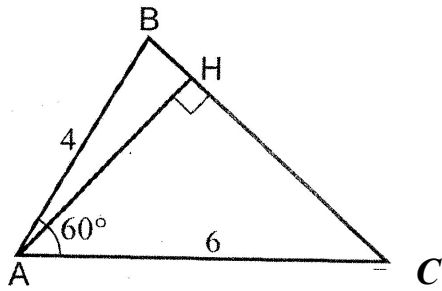
№7



Найти: AC

Задания по ГОТОВЫМ чертежам

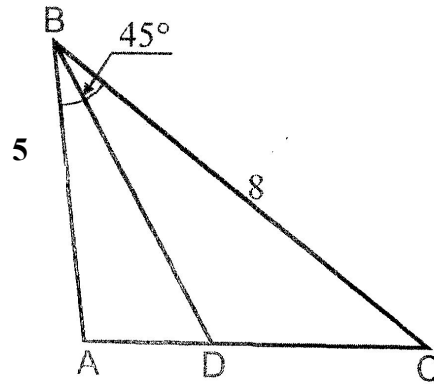
№1



$BC = 2\sqrt{7}$

Найти : AH

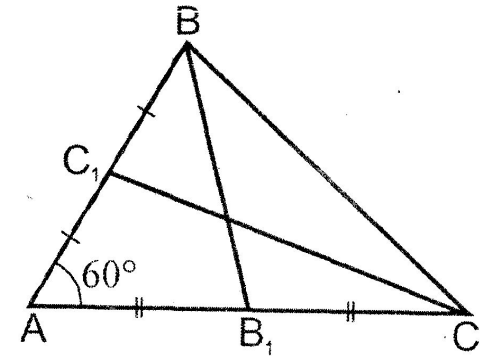
№2



BD - биссектриса

Найти : S_{ABD} , S_{BDC}

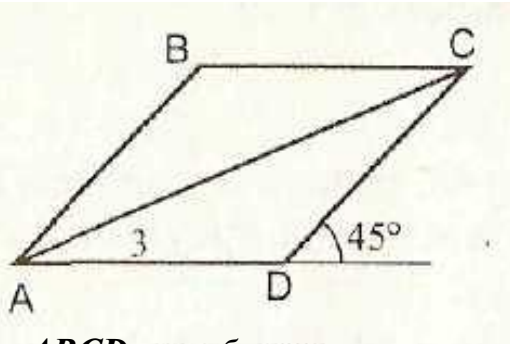
№3



$AB = 10, AC = 14.$

Найти : S_{B_1OC}

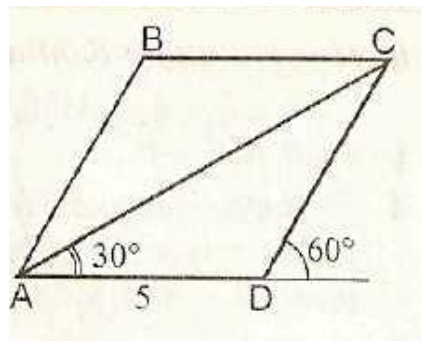
№4



$ABCD$ - ромб

Найти : AC

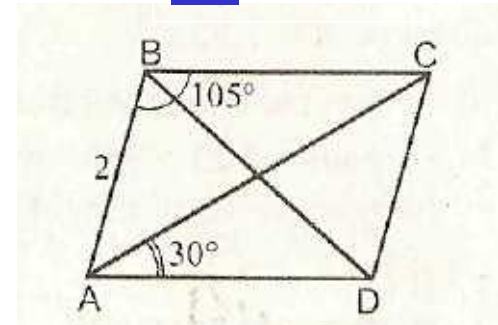
№5



$ABCD$ - параллелограмм

Найти : AC

№6



$ABCD$ - параллелограмм

Найти : BC