

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 10

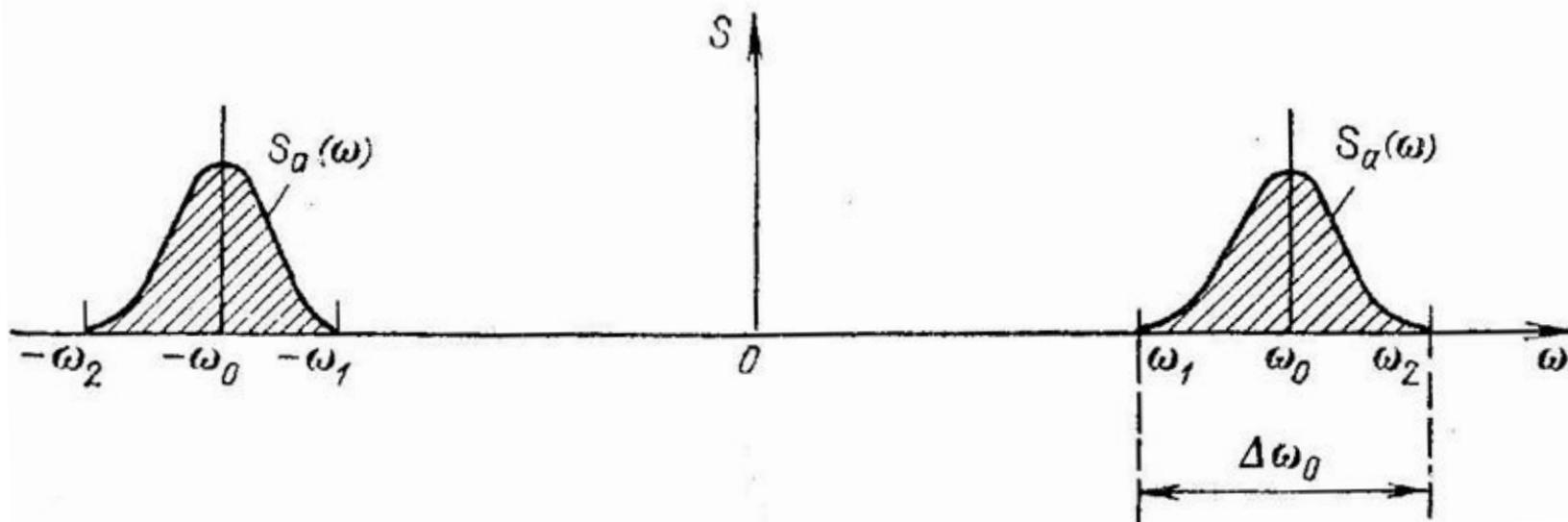
Доцент Трухин М.П.

5. Узкополосные сигналы

Узкополосные сигналы - это особый класс радиотехнических сигналов с ограниченным спектром, которые возникают на выходе частотно-избирательных цепей и устройств.

По определению, сигнал называется **узкополосным**, если его **спектральная плотность отлична от нуля лишь в пределах частотных интервалов шириной Π** , образующих окрестности точек $\pm \omega_0$. причем должно выполняться условие

$$\Pi/\omega_0 \ll 1.$$



5.1. Математическая модель узкополосного сигнала

Если $f_1(t)$ — низкочастотный сигнал, спектр которого сосредоточен в окрестности нулевой частоты, то колебание $s_1(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$ при достаточно большом значении ω_0 будет обладать всеми необходимыми признаками узкополосного сигнала, поскольку его спектр окажется сконцентрированным в малых окрестностях точек $\pm \omega_0$.

Узкополосным будет и сигнал $s_2(t) = f_2(t) \sin \omega_0 t$, отличающийся фазой «быстрого» сомножителя. Наиболее общую математическую модель узкополосного сигнала можно получить, составив линейную комбинацию вида

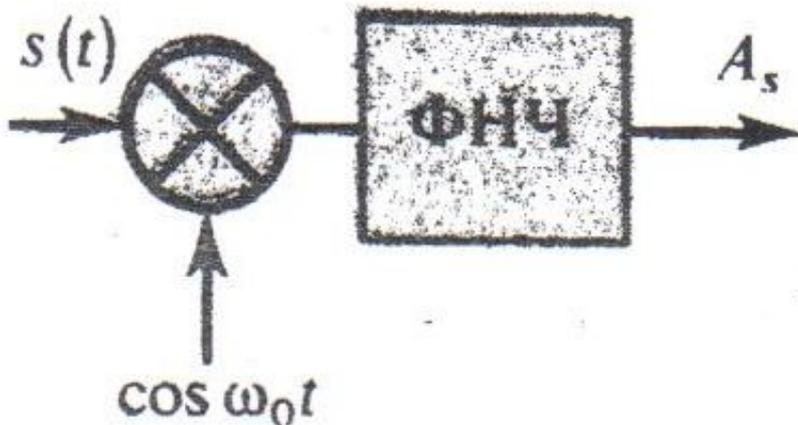
$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Обе входящие сюда функции времени $A_s(t)$ и $B_s(t)$ являются низкочастотными в том смысле, что их относительные изменения за период высокочастотных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ достаточно малы. Функцию $A_s(t)$ принято называть **синфазной амплитудой** узкополосного сигнала $s(t)$ при заданном значении опорной частоты ω_0 , а функцию $B_s(t)$ — его **квадратурной амплитудой**.

Выделение квадратурных составляющих узкополосного сигнала

Синфазную и квадратурную амплитуды можно выделить аппаратным способом. Действительно, пусть имеется перемножающее устройство, на один из входов которого подан узкополосный сигнал $s(t)$, а на другой — вспомогательное колебание, изменяющееся во времени по закону $\cos \omega_0 t$. На выходе перемножителя будет получен сигнал

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= A_s(t) \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} A_s(t) + \frac{1}{2} A_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t. \end{aligned}$$



Пропустим выходной сигнал перемножителя через фильтр нижних частот (ФНЧ), подавляющий составляющие с частотами порядка $2\omega_0$. Ясно, что с выхода фильтра будет поступать низкочастотное колебание, пропорциональное синфазной амплитуде $A_s(t)$.

5.2. Комплексное представление узкополосных сигналов

В теории линейных электрических цепей широко применяется метод комплексных амплитуд, согласно которому гармоническое колебание выражается как вещественная или мнимая часть комплексных функций:

$$U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}),$$

$$U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Im}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}).$$

Независящее от времени число $\dot{U} = U_m e^{j\varphi_0}$ называют **комплексной амплитудой** гармонического колебания.

С физической точки зрения узкополосные сигналы представляют собой **квазигармонические колебания**.

Введем комплексную низкочастотную функцию

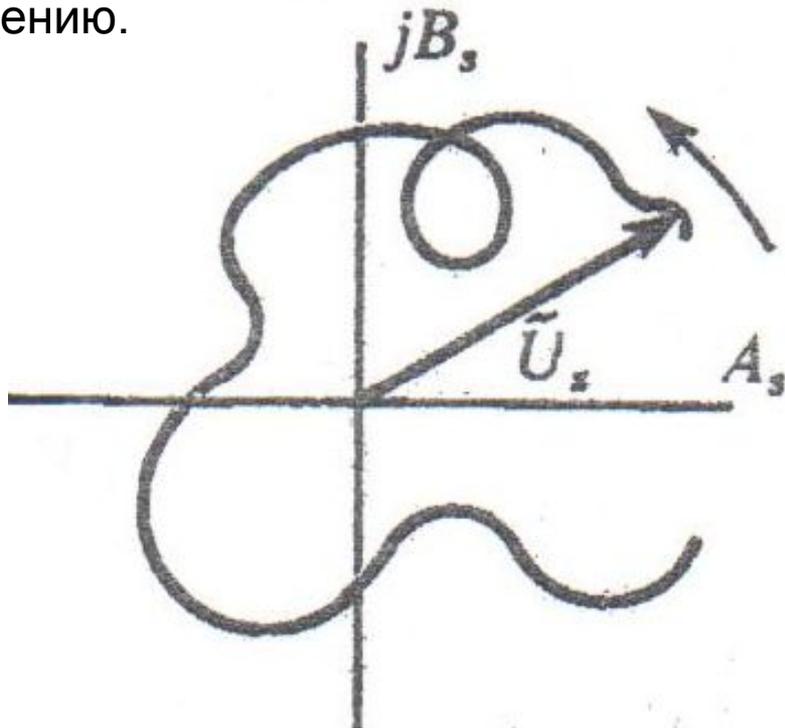
$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

называемую **комплексной огибающей** узкополосного сигнала. Легко непосредственно проверить, что

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}].$$

Комплексная огибающая узкополосных сигналов

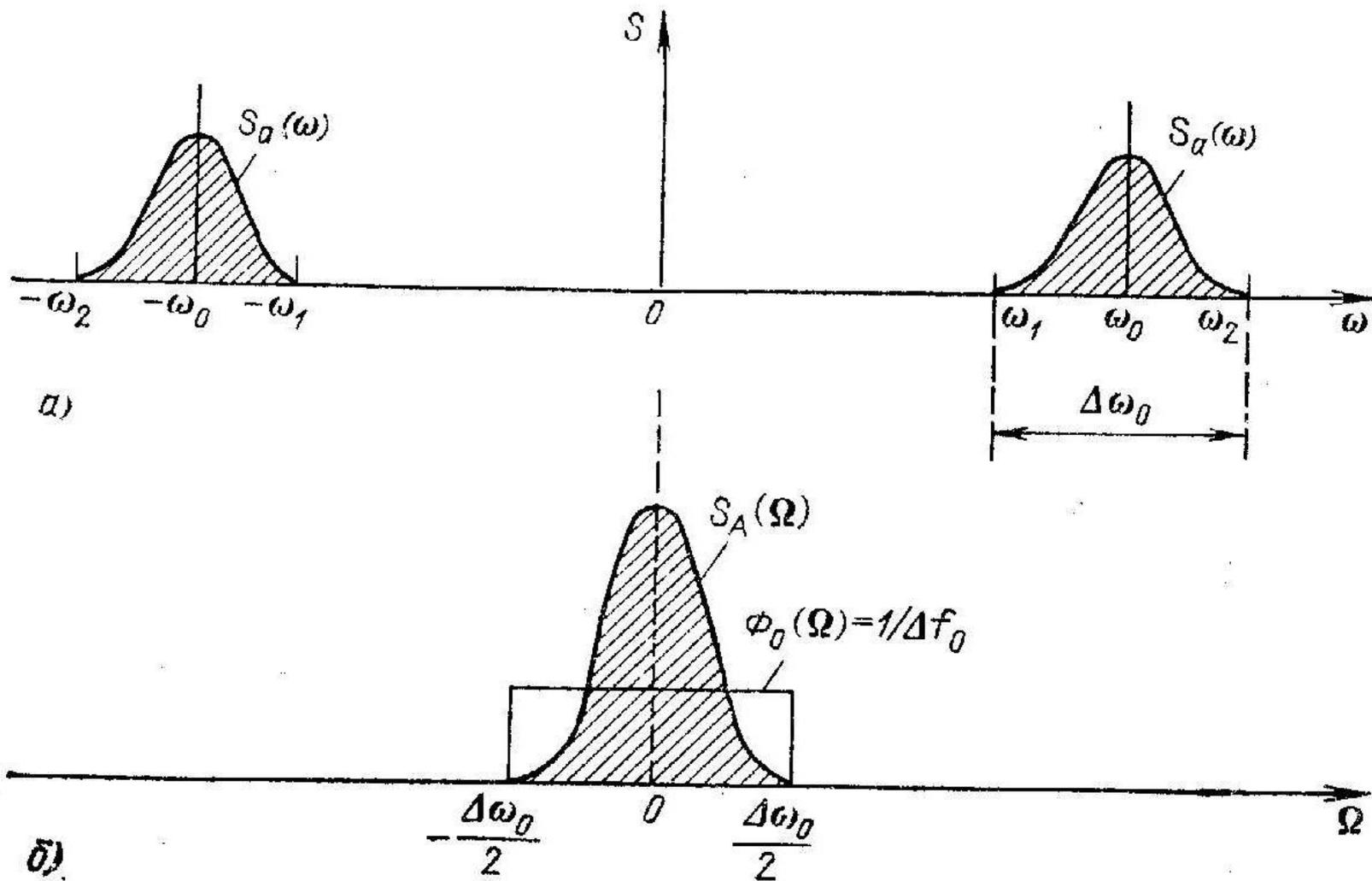
Комплексная огибающая применительно к узкополосному сигналу играет ту же роль, что и комплексная амплитуда по отношению к простому гармоническому колебанию. Однако комплексная огибающая в общем случае зависит от времени - вектор $\tilde{U}_s(t)$ совершает на комплексной плоскости некоторое движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению.



$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}].$$

Спектр узкополосного сигнала и его комплексной огибающей



Пример

Узкополосный сигнал $s(t)$ при $t < 0$ и при $t > 0$ является гармоническим колебанием; в момент времени $t = 0$ частота сигнала изменяется скачком:

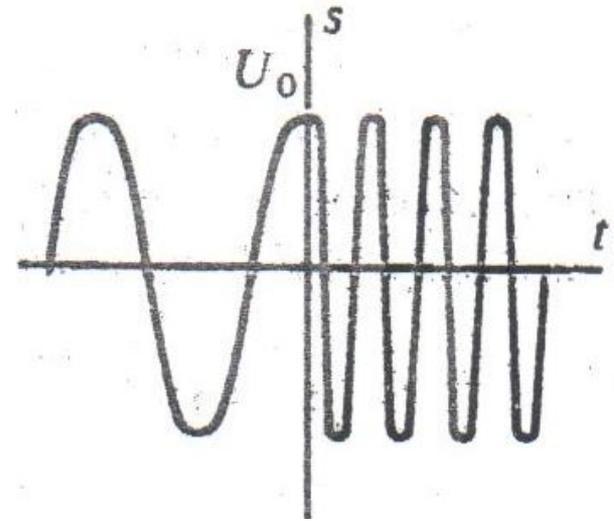
$$s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ U_0 \cos \omega_1 t, & t > 0. \end{cases}$$

Взяв в качестве опорной частоты ω_0 , получим следующее выражение для комплексной огибающей данного сигнала:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}, & t > 0. \end{cases}$$

Выбор опорной частоты обычно диктуется удобством расчета. Так, например, комплексная огибающая рассматриваемого сигнала относительно опорной частоты $(\omega_0 + \omega_1)/2$ имеет более сложный вид:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0 \exp \left[j \frac{(\omega_0 - \omega_1)}{2} t \right], & t < 0, \\ U_0 \exp \left[j \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{2} t \right], & t > 0. \end{cases}$$



5.3. Физическая огибающая, полная фаза и мгновенная частота

Определим комплексную огибающую в показательной форме:.

$$\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp [j\varphi_s(t)].$$

Здесь $U_s(t)$ — вещественная неотрицательная функция времени, называемая **физической огибающей** (часто, для краткости, просто огибающей), $\varphi_s(t)$ — медленно изменяющаяся во времени начальная фаза узкополосного сигнала.

Величины U_s , φ_s связаны с синфазной и квадратурной амплитудами соотношениями

$$A_s(t) = U_s(t) \cos \varphi_s(t),$$

$$B_s(t) = U_s(t) \sin \varphi_s(t),$$

откуда вытекает еще одна полезная форма записи математической модели узкополосного сигнала:

$$s(t) = U_s(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_s(t)].$$

Свойства физической огибающей узкополосного сигнала

1. Определим физическую огибающую $U_s(t)$ через синфазную и квадратурную амплитуды:

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}$$

2. Если вместо частоты ω_0 взять некоторую частоту $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega$, то сигнал $s(t)$ должен быть представлен в виде

$$s(t) = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t} e^{j\omega'_0 t}]$$

и новое значение комплексной огибающей

$$\tilde{U}'_s(t) = \tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t}.$$

Однако при этом физическая огибающая, являющаяся модулем комплексной огибающей, останется неизменной, поскольку выражение $\exp(-j\Delta\omega t)$ имеет единичный модуль.

3. Свойство физической огибающей состоит в том, что в каждый момент времени $|s(t)| < U_a(t)$.

Важность понятия огибающей обусловлена тем, что в радиотехнике широко используются специальные устройства — амплитудные детекторы (демодуляторы), способные точно воспроизводить огибающую узкополосного сигнала.

Пример

Узкополосный вещественный сигнал $s(t)$ имеет при $\omega > 0$ спектральную плотность, несимметричную относительно частоты ω_0 :

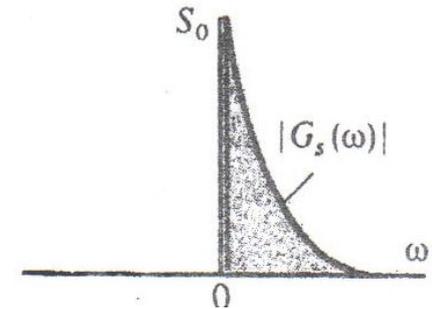
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0, \\ 1/2 S_0 e^{-b(\omega - \omega_0)}, & \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

Спектральная плотность комплексной огибающей:

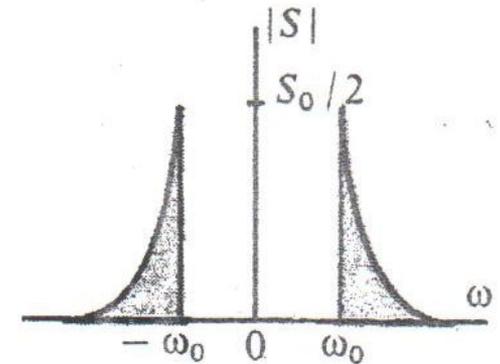
$$G_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ S_0 e^{-b\omega}, & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Используя обратное преобразование Фурье, находим комплексную огибающую

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-b+jt)\omega} d\omega = \frac{S_0}{2\pi(b-jt)}.$$



Несимметричная плотность



Симметричная плотность

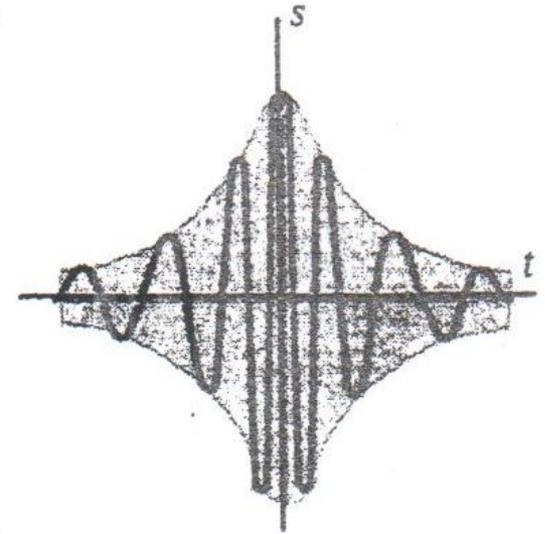
Пример (продолжение)

Синфазную и квадратурную амплитуды вещественного сигнала найдем, выделив вещественную и мнимую части:

$$A_s(t) = \frac{bS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}; \quad B_s(t) = \frac{tS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}.$$

Физическая огибающая рассматриваемого сигнала

$$U_s(t) = |\tilde{U}_s(t)| = \frac{S_0}{2\pi\sqrt{b^2 + t^2}}.$$



Мгновенная частота :

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{b} \right) = \omega_0 + b/(b^2 + t),$$

имеет наибольшее значение, равное $\omega_0 + 1/b$, в момент времени $t = 0$.

Осциллограмма колебания $s(t)$ представляет собой симметричный импульс с непостоянной во времени частотой заполнения.

5.4. Аналитический сигнал

$$z_a(t) = a(t) + ia_1(t)$$

$$Z_a(\omega) = S_a(\omega) + iS_{a_1}(\omega)$$

$$Z_a(\omega) = \begin{cases} 2S_a(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$$

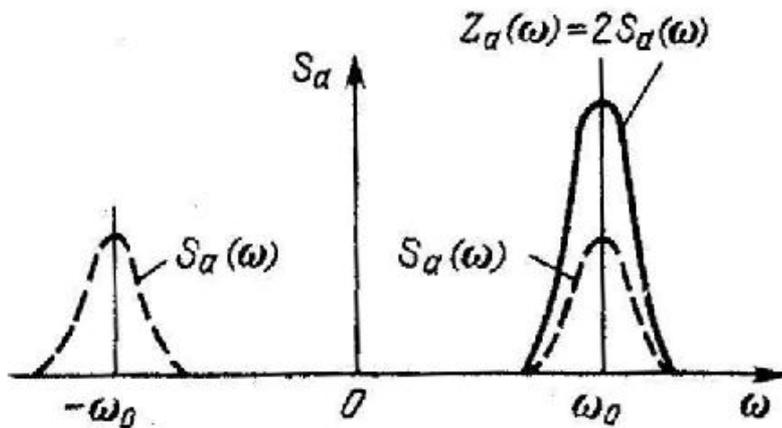
$$z_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Аналитический сигнал

1. Произведение аналитического сигнала $z_a(t)$ на сопряженный ему сигнал $z_a^*(t)$ равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала $a(t)$

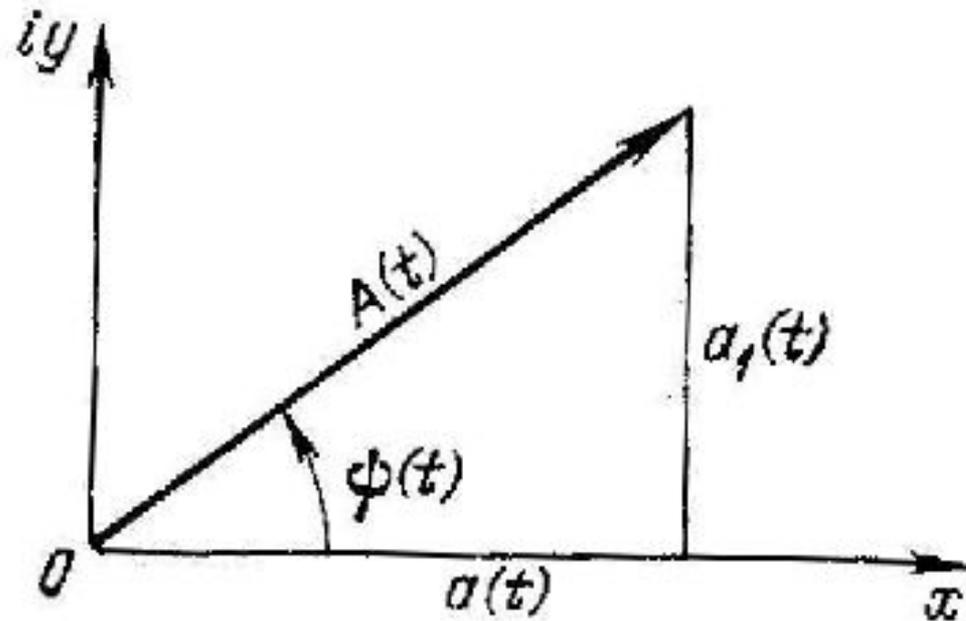
$$z_a(t) z_a^*(t) = [a(t) + ia_1(t)] [a(t) - ia_1(t)] = a^2(t) + a_1^2(t) = A^2(t).$$

Таким образом, модуль аналитического сигнала $z_a(t)$ равен просто огибающей сигнала $A(t)$.



2. Спектральная плотность комплексной огибающей $A(t)$ совпадает со смещенной на ω_0 влево спектральной плотностью аналитического сигнала $z_a(t)$.

Аналитический сигнал



Соотношение между амплитудой
аналитического сигнала и функциями $a(t)$, $a_1(t)$

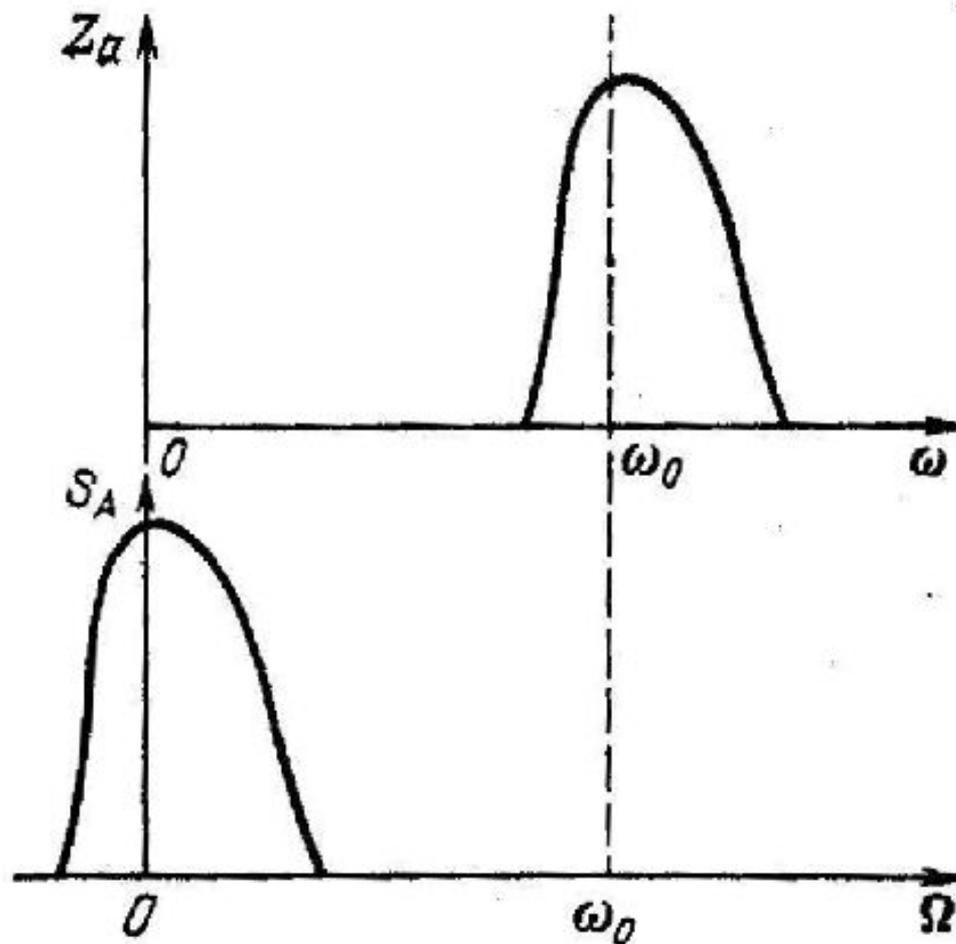
Определение частоты по исходному
и сопряжённому сигналам

$$S_1(\omega) = -iS(\omega), \quad \omega > 0.$$

$$S_1(\omega) = iS(\omega), \quad \omega < 0$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\operatorname{arctg} \frac{a_1(t)}{a(t)} \right] = \frac{a(t) a_1'(t) - a_1(t) a'(t)}{a^2(t) + a_1^2(t)}$$

Аналитический сигнал



Соотношение между спектрами
комплексной огибающей и аналитического сигнала

5.5. Аналитический сигнал узкополосного процесса

Пусть задан физический сигнал

$$a(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t)$$

и требуется определить соответствующий ему аналитический сигнал $z_a(t)$. Исходя из общего выражения для сопряженной функции $a_1(t)$ можно написать

$$z_a(t) = A(t) \cos \psi(t) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\tau) \cos \psi(\tau)}{\tau - t} dt.$$

Точное определение $a_1(t)$ при сложной функции $A(\tau) \cos \psi(\tau)$ является трудной задачей, которую можно обойти, если исходный сигнал $a(t)$, является достаточно узкополосным процессом. Можно показать, что в этом случае

$$a_1(t) = A(t) \sin \psi(t) = A(t) \sin [\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0].$$

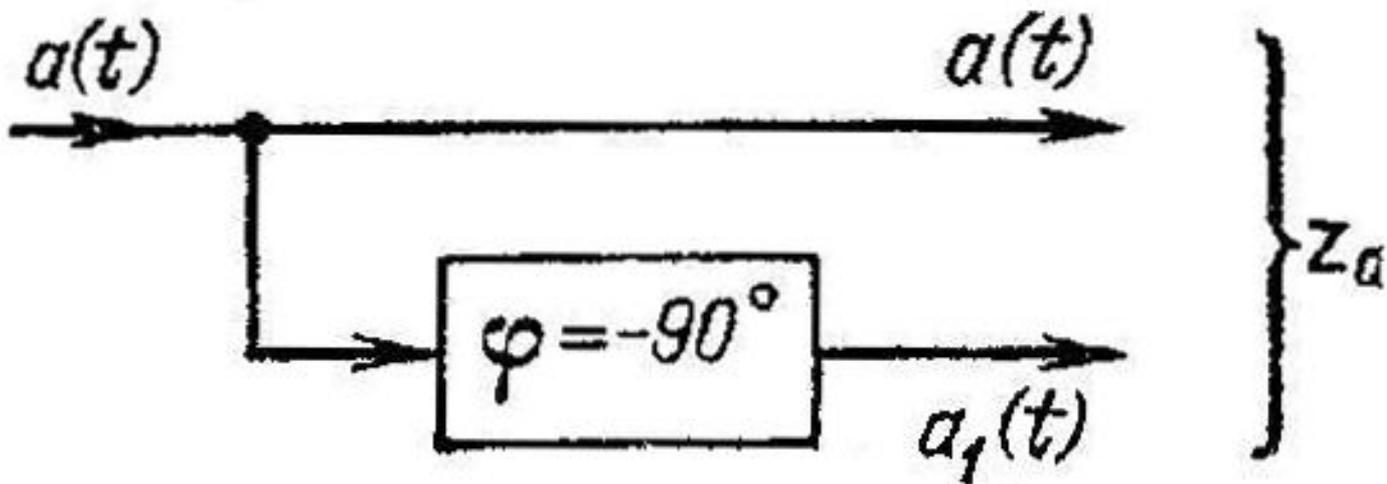
Таким образом, аналитический сигнал можно записать в следующем виде:

$$z_a(t) = A(t) e^{i\psi(t)} = A(t) e^{i[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0]} = \mathbf{A}(t) e^{i\omega_0 t},$$

где

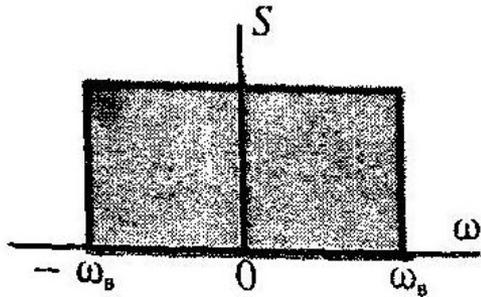
$$\mathbf{A}(t) = A(t) e^{i[\theta(t) + \theta_0]}$$

Формирование аналитического сигнала,
соответствующего заданному вещественному сигналу



Пример

аналитический сигнал



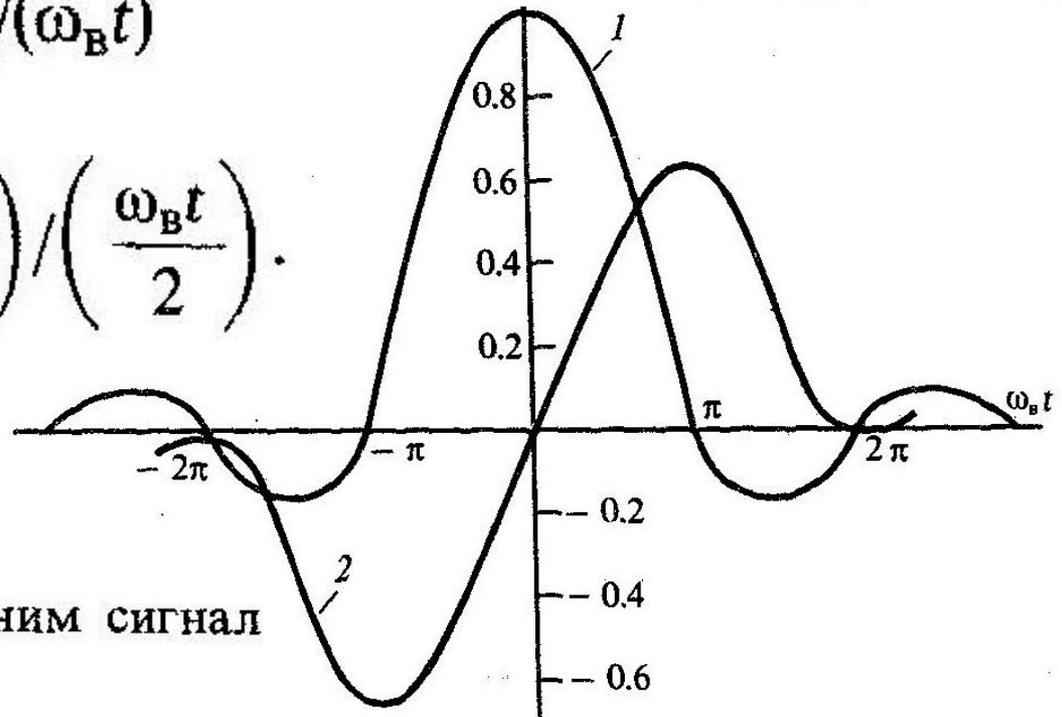
$$z_s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{j\pi t} (e^{j\omega_B t} - 1)$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \sin(\omega_B t) / (\omega_B t)$$

идеальный низкочастотный сигнал

$$\hat{s}(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \sin^2\left(\frac{\omega_B t}{2}\right) / \left(\frac{\omega_B t}{2}\right)$$



сопряженный с ним сигнал

5.6. Корреляционная функция аналитического сигнала

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [e^{-i\omega_0\tau} B_A(\tau)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A^*(t+\tau) dt \right]$$

В частности, при $\tau = 0$ получаем

$$B_a(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(t) dt = \frac{1}{2} B_z(0),$$

$B_a(0) = \mathcal{E}$, энергия аналитического сигнала равна удвоенной энергии исходного действительного сигнала.

5.7. Дискретизация узкополосного сигнала

$$a(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)],$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t) \varphi_n(t) \cos [\omega_0 t + \theta(n\Delta t)] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t) \frac{\sin \pi \Delta f_0 (t - n\Delta t)}{\pi \Delta f_0 (t - n\Delta t)} \cos [\omega_0 t + \theta(n\Delta t)] \end{aligned}$$

Благодарю за внимание!