

# РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 10

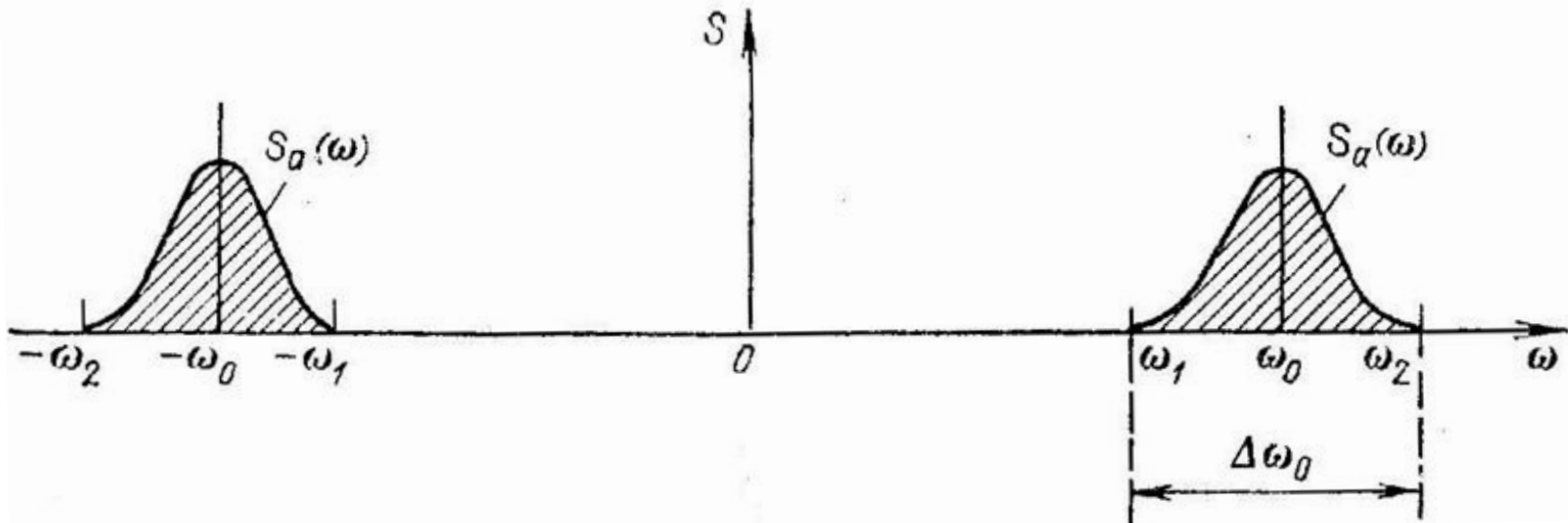
Доцент Трухин М.П.

## 5. Узкополосные сигналы

**Узкополосные сигналы** - это особый класс радиотехнических сигналов с ограниченным спектром, которые возникают на выходе частотно-избирательных цепей и устройств.

По определению, сигнал называется **узкополосным**, если его **спектральная плотность отлична от нуля лишь в пределах частотных интервалов шириной  $\Pi$** , образующих окрестности точек  $\pm \omega_0$  . причем должно выполняться условие

$$\Pi/\omega_0 \ll 1.$$



## 5.1. Математическая модель узкополосного сигнала

Если  $f_1(t)$  — низкочастотный сигнал, спектр которого сосредоточен в окрестности нулевой частоты, то колебание  $s_1(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$  при достаточно большом значении  $\omega_0$  будет обладать всеми необходимыми признаками узкополосного сигнала, поскольку его спектр окажется сконцентрированным в малых окрестностях точек  $\pm \omega_0$ .

Узкополосным будет и сигнал  $s_2(t) = f_2(t) \sin \omega_0 t$ , отличающийся фазой «быстрого» сомножителя. Наиболее общую математическую модель узкополосного сигнала можно получить, составив линейную комбинацию вида

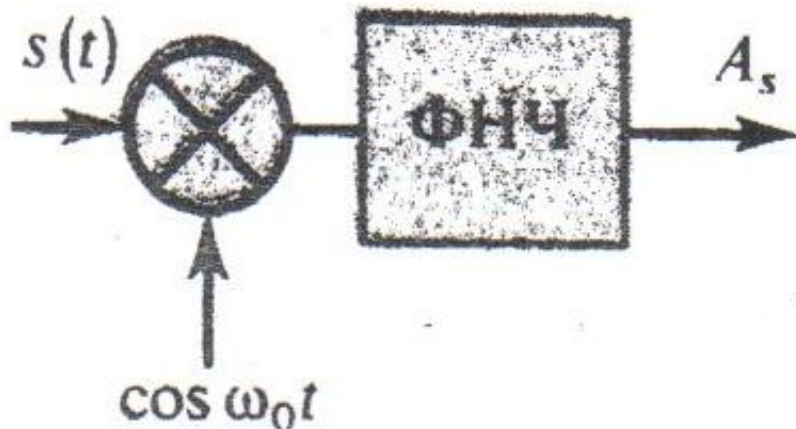
$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Обе входящие сюда функции времени  $A_s(t)$  и  $B_s(t)$  являются низкочастотными в том смысле, что их относительные изменения за период высокочастотных колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$  достаточно малы. Функцию  $A_s(t)$  принято называть **синфазной амплитудой** узкополосного сигнала  $s(t)$  при заданном значении опорной частоты  $\omega_0$ , а функцию  $B_s(t)$  — его **квадратурной амплитудой**.

## Выделение квадратурных составляющих узкополосного сигнала

Синфазную и квадратурную амплитуды можно выделить аппаратным способом. Действительно, пусть имеется перемножающее устройство, на один из входов которого подан узкополосный сигнал  $s(t)$ , а на другой — вспомогательное колебание, изменяющееся во времени по закону  $\cos \omega_0 t$ . На выходе перемножителя будет получен сигнал

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= A_s(t) \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} A_s(t) + \frac{1}{2} A_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t. \end{aligned}$$



Пропустим выходной сигнал перемножителя через фильтр нижних частот (ФНЧ), подавляющий составляющие с частотами порядка  $2\omega_0$ . Ясно, что с выхода фильтра будет поступать низкочастотное колебание, пропорциональное синфазной амплитуде  $A_s(t)$ .

## 5.2. Комплексное представление узкополосных сигналов

В теории линейных электрических цепей широко применяется метод комплексных амплитуд, согласно которому гармоническое колебание выражается как вещественная или мнимая часть комплексных функций:

$$U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}),$$

$$U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Im}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}).$$

Независящее от времени число  $\dot{U} = U_m e^{j\varphi_0}$  называют **комплексной амплитудой** гармонического колебания.

С физической точки зрения узкополосные сигналы представляют собой **квазигармонические колебания**.

Введем комплексную низкочастотную функцию

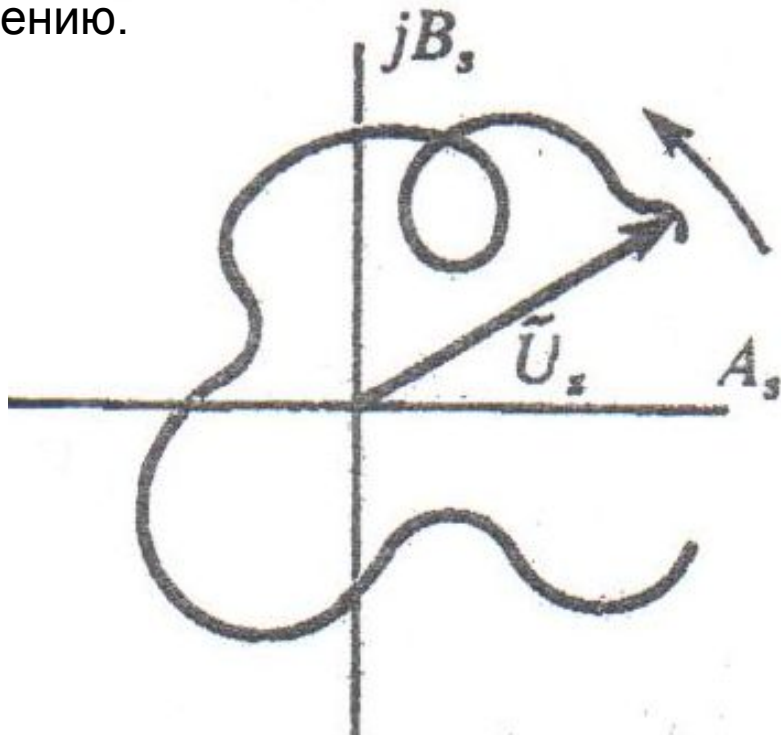
$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

называемую **комплексной огибающей** узкополосного сигнала. Легко непосредственно проверить, что

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}].$$

# Комплексная огибающая узкополосных сигналов

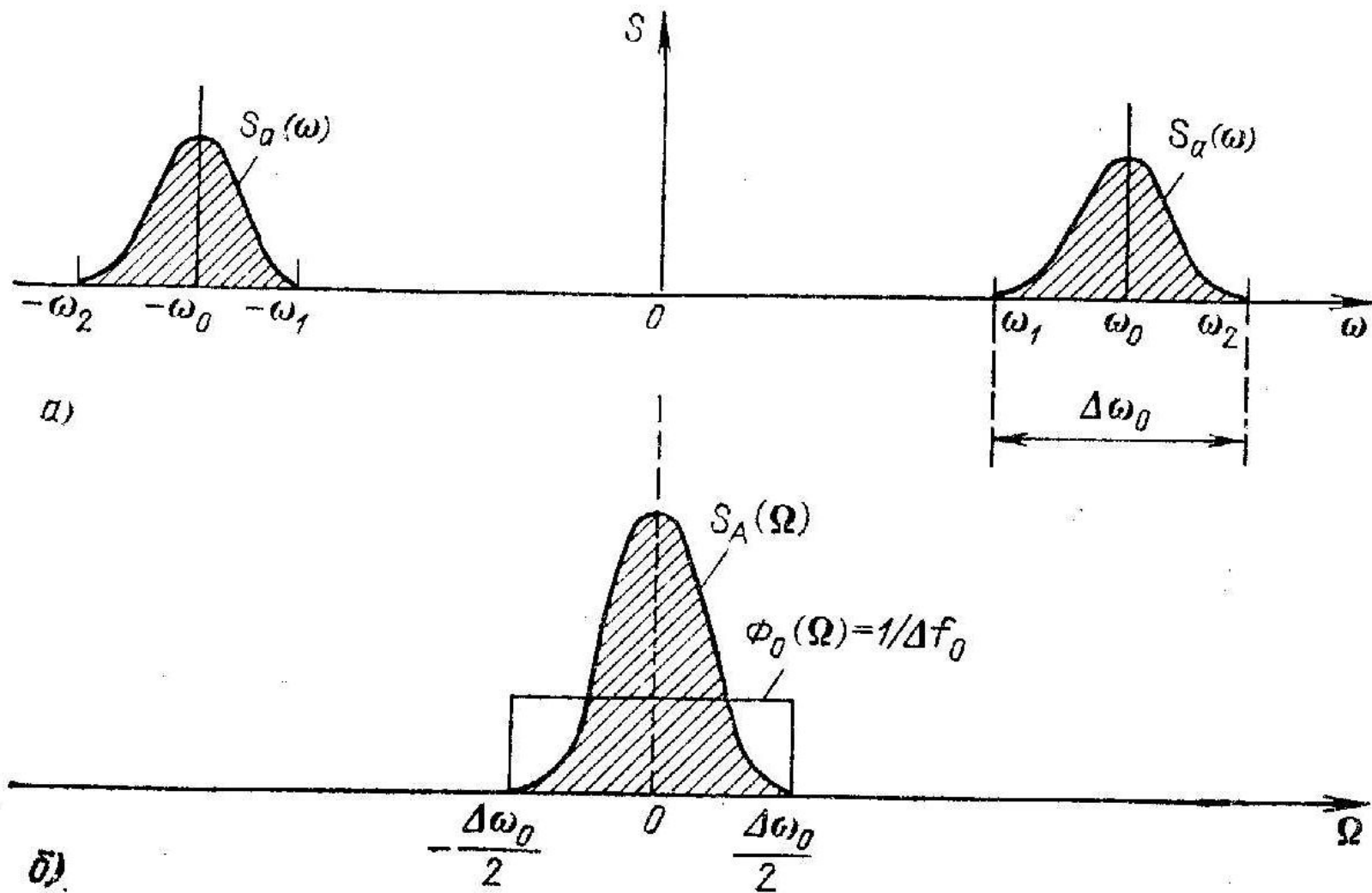
Комплексная огибающая применительно к узкополосному сигналу играет ту же роль, что и комплексная амплитуда по отношению к простому гармоническому колебанию. Однако комплексная огибающая в общем случае зависит от времени - вектор  $\tilde{U}_s(t)$  совершает на комплексной плоскости некоторое движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению.



$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t),$$

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}].$$

# Спектр узкополосного сигнала и его комплексной огибающей



## Пример

Узкополосный сигнал  $s(t)$  при  $t < 0$  и при  $t > 0$  является гармоническим колебанием; в момент времени  $t = 0$  частота сигнала изменяется скачком:

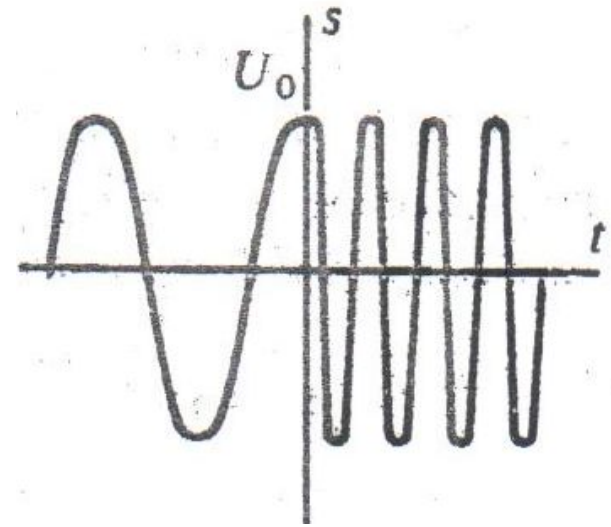
$$s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ U_0 \cos \omega_1 t, & t > 0. \end{cases}$$

Взяв в качестве опорной частоты  $\omega_0$ , получим следующее выражение для комплексной огибающей данного сигнала:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}, & t > 0. \end{cases}$$

Выбор опорной частоты обычно диктуется удобством расчета. Так, например, комплексная огибающая рассматриваемого сигнала относительно опорной частоты  $(\omega_0 + \omega_1)/2$  имеет более сложный вид:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0 \exp \left[ j \frac{(\omega_0 - \omega_1)}{2} t \right], & t < 0, \\ U_0 \exp \left[ j \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{2} t \right], & t > 0. \end{cases}$$





## 5.3. Физическая огибающая, полная фаза и мгновенная частота

Определим комплексную огибающую в показательной форме:.

$$\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp [j\varphi_s(t)].$$

Здесь  $U_s(t)$  — вещественная неотрицательная функция времени, называемая **физической огибающей** (часто, для краткости, просто огибающей),  $\varphi_s(t)$  — медленно изменяющаяся во времени начальная фаза узкополосного сигнала.

Величины  $U_s$ ,  $\varphi_s$  связаны с синфазной и квадратурной амплитудами соотношениями

$$A_s(t) = U_s(t) \cos \varphi_s(t),$$

$$B_s(t) = U_s(t) \sin \varphi_s(t),$$

откуда вытекает еще одна полезная форма записи математической модели узкополосного сигнала:

$$s(t) = U_s(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_s(t)].$$

# Свойства физической огибающей узкополосного сигнала

1. Определим физическую огибающую  $U_s(t)$  через синфазную и квадратурную амплитуды:

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}$$

2. Если вместо частоты  $\omega_0$  взять некоторую частоту  $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega$ , то сигнал  $s(t)$  должен быть представлен в виде

$$s(t) = \operatorname{Re} [\tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t} e^{j\omega'_0 t}]$$

и новое значение комплексной огибающей

$$\tilde{U}'_s(t) = \tilde{U}_s(t) e^{-j\Delta\omega t}.$$

Однако при этом физическая огибающая, являющаяся модулем комплексной огибающей, останется неизменной, поскольку выражение  $\exp(-j\Delta\omega t)$  имеет единичный модуль.

3. Свойство физической огибающей состоит в том, что в каждый момент времени  $|s(t)| < U_a(t)$ .

**Важность понятия огибающей обусловлена тем, что в радиотехнике широко используются специальные устройства — амплитудные детекторы (демодуляторы), способные точно воспроизводить огибающую узкополосного сигнала.**

# Пример

Узкополосный вещественный сигнал  $s(t)$  имеет при  $\omega > 0$  спектральную плотность, несимметричную относительно частоты  $\omega_0$  :

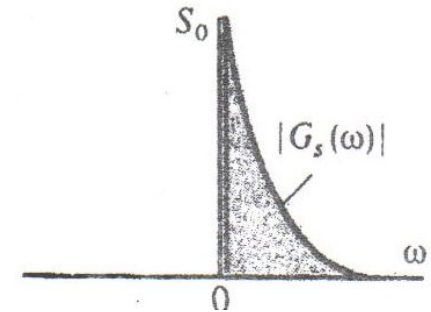
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0, \\ 1/2 S_0 e^{-b(\omega - \omega_0)}, & \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

Спектральная плотность комплексной огибающей:

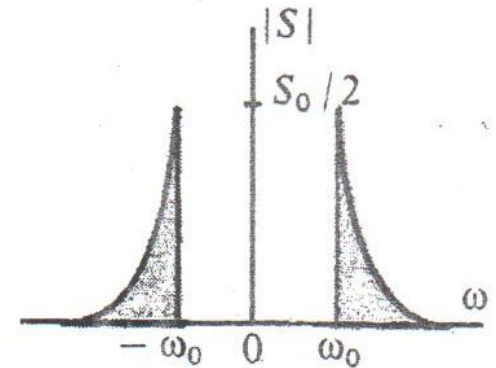
$$G_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ S_0 e^{-b\omega}, & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Используя обратное преобразование Фурье, находим комплексную огибающую

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-b + jt)\omega} d\omega = \frac{S_0}{2\pi(b - jt)}.$$



Несимметричная плотность



Симметричная плотность

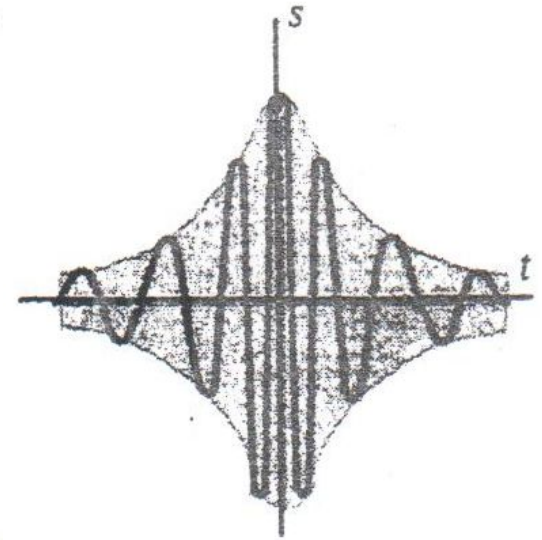
## Пример (продолжение)

Синфазную и квадратурную амплитуды вещественного сигнала найдем, выделив вещественную и мнимую части:

$$A_s(t) = \frac{bS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}; \quad B_s(t) = \frac{tS_0}{2\pi(b^2 + t^2)}.$$

Физическая огибающая рассматриваемого сигнала

$$U_s(t) = |\tilde{U}_s(t)| = \frac{S_0}{2\pi\sqrt{b^2 + t^2}}.$$



Мгновенная частота :

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{b} \right) = \omega_0 + b/(b^2 + t^2),$$

имеет наибольшее значение, равное  $\omega_0 + 1/b$ , в момент времени  $t = 0$ .

Осциллограмма колебания  $s(t)$  представляет собой симметричный импульс с непостоянной во времени частотой заполнения.

## 5.4. Аналитический сигнал

$$z_a(t) = a(t) + ia_1(t)$$

$$Z_a(\omega) = S_a(\omega) + iS_{a_1}(\omega)$$

$$Z_a(\omega) = \begin{cases} 2S_a(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$$

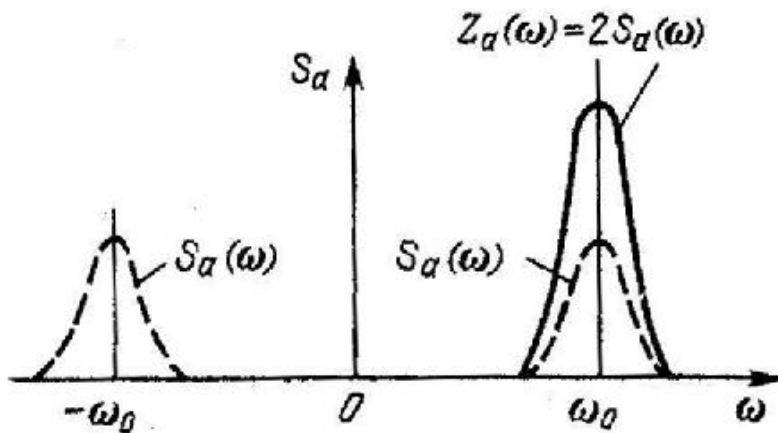
$$z_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

# Аналитический сигнал

1. Произведение аналитического сигнала  $z_a(t)$  на сопряженный ему сигнал  $z_a^*(t)$  равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала  $a(t)$

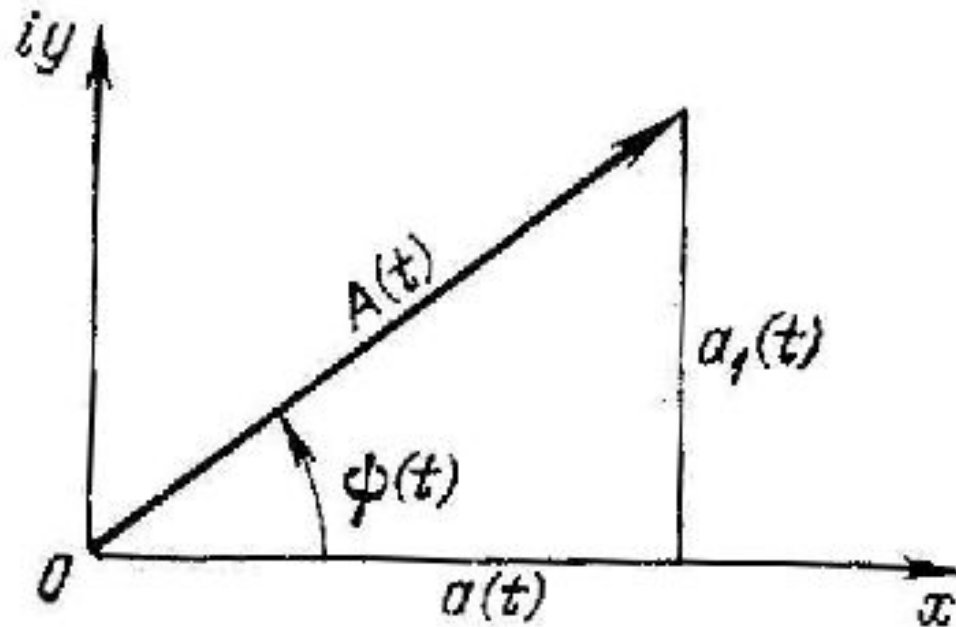
$$z_a(t) z_a^*(t) = [a(t) + ia_1(t)] [a(t) - ia_1(t)] = a^2(t) + a_1^2(t) = A^2(t).$$

Таким образом, модуль аналитического сигнала  $z_a(t)$  равен просто огибающей сигнала  $A(t)$ .



2. Спектральная плотность комплексной огибающей  $A(t)$  совпадает со смещенной на  $\omega_0$  влево спектральной плотностью аналитического сигнала  $z_a(t)$ .

# Аналитический сигнал



Соотношение между амплитудой  
аналитического сигнала и функциями  $a(t)$ ,  $a_1(t)$

Определение частоты по исходному  
и сопряжённому сигналам

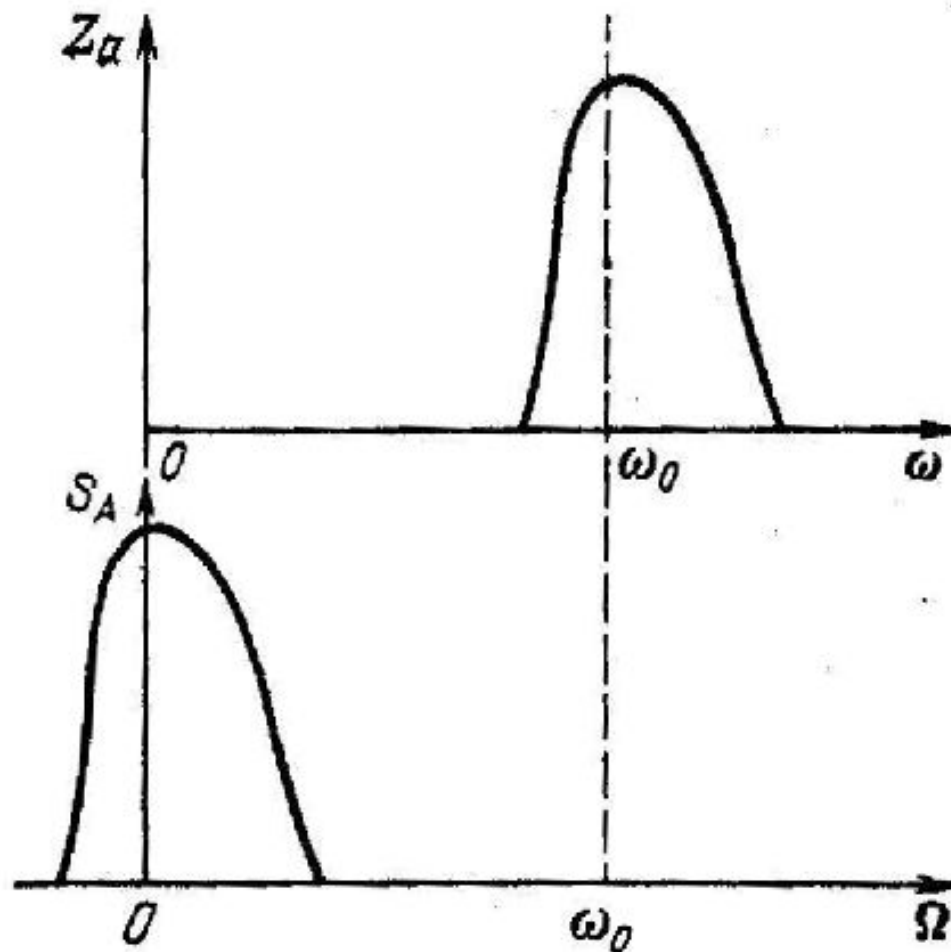
$$S_1(\omega) = -iS(\omega), \quad \omega > 0$$

$$S_1(\omega) = iS(\omega), \quad \omega < 0$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a_1(t)}{a(t)} \right] = \frac{a(t) a_1'(t) - a_1(t) a'(t)}{a^2(t) + a_1^2(t)}$$



# Аналитический сигнал



Соотношение между спектрами  
комплексной огибающей и аналитического сигнала

## 5.5. Аналитический сигнал узкополосного процесса

Пусть задан физический сигнал

$$a(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t)$$

и требуется определить соответствующий ему аналитический сигнал  $z_a(t)$ . Исходя из общего выражения для сопряженной функции  $a_1(t)$  можно написать

$$z_a(t) = A(t) \cos \psi(t) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\tau) \cos \psi(\tau)}{\tau - t} dt.$$

Точное определение  $a_1(t)$  при сложной функции  $A(\tau) \cos \psi(\tau)$  является трудной задачей, которую можно обойти, если исходный сигнал  $a(t)$ , является достаточно узкополосным процессом. Можно показать, что в этом случае

$$a_1(t) = A(t) \sin \psi(t) = A(t) \sin [\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0].$$

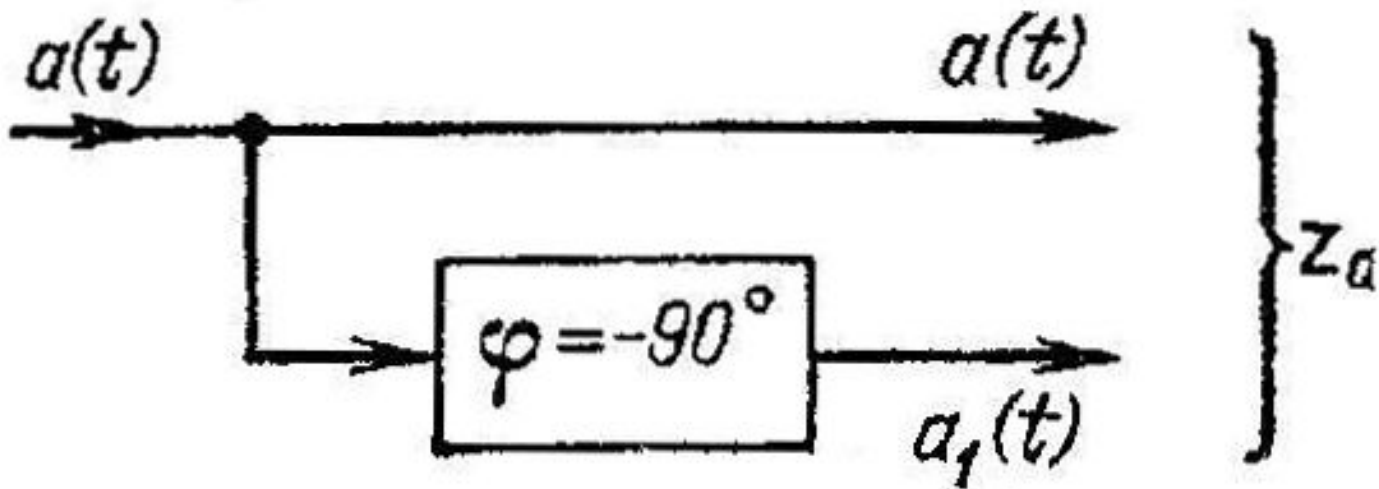
Таким образом, аналитический сигнал можно записать в следующем виде:

$$z_a(t) = A(t) e^{i\psi(t)} = A(t) e^{i[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0]} = \mathbf{A}(t) e^{i\omega_0 t},$$

где

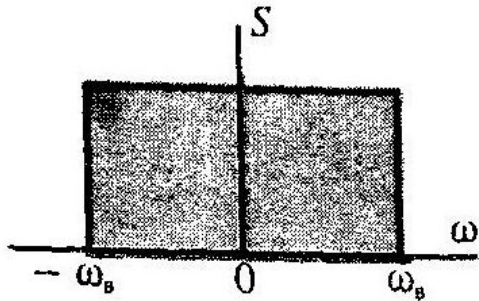
$$\mathbf{A}(t) = A(t) e^{i[\theta(t) + \theta_0]}$$

Формирование аналитического сигнала,  
соответствующего заданному вещественному сигналу



# Пример

аналитический сигнал



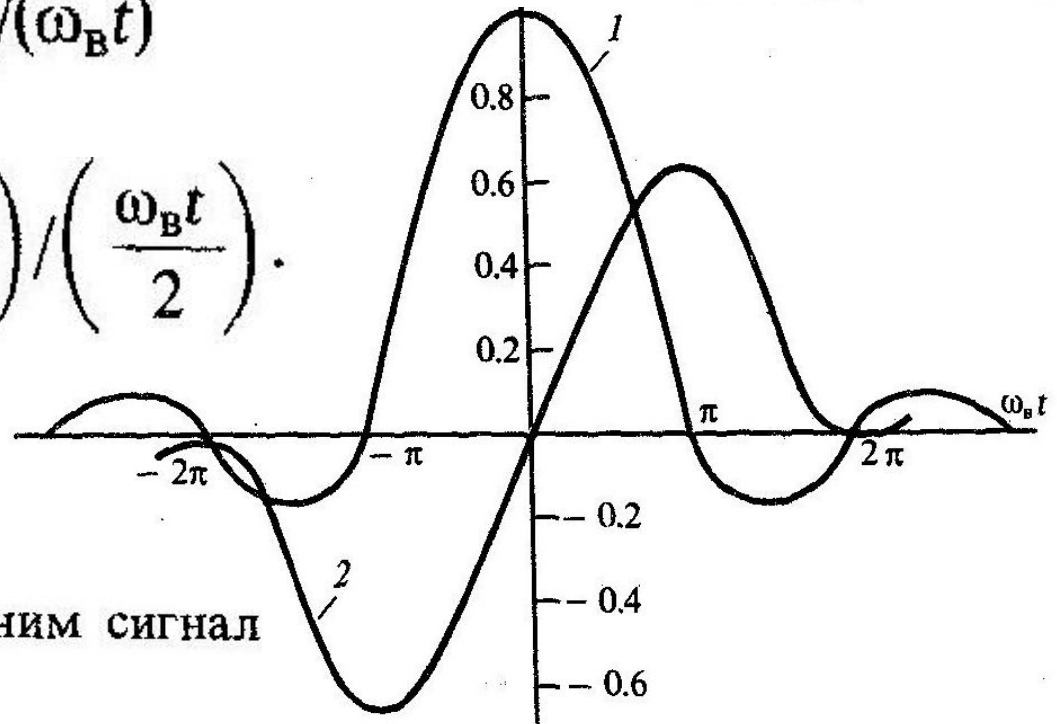
$$z_s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{j\pi t} (e^{j\omega_B t} - 1)$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \sin(\omega_B t) / (\omega_B t)$$

идеальный низкочастотный сигнал

$$\hat{s}(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \sin^2\left(\frac{\omega_B t}{2}\right) / \left(\frac{\omega_B t}{2}\right)$$



сопряженный с ним сигнал

## 5.6. Корреляционная функция аналитического сигнала

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [e^{-i\omega_0\tau} B_A(\tau)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A^*(t+\tau) dt \right]$$

В частности, при  $\tau = 0$  получаем

$$B_a(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(t) dt = \frac{1}{2} B_z(0),$$

$B_a(0) = \mathcal{E}$ , энергия аналитического сигнала равна удвоенной энергии исходного действительного сигнала.

## 5.7. Дискретизация узкополосного сигнала

$$a(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)],$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t) \varphi_n(t) \cos [\omega_0 t + \theta(n\Delta t)] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t) \frac{\sin \pi \Delta f_0 (t - n\Delta t)}{\pi \Delta f_0 (t - n\Delta t)} \cos [\omega_0 t + \theta(n\Delta t)] \end{aligned}$$

**Благодарю за внимание!**