Статистический анализ случайных погрешностей.

Систематической погрешностью называется погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся во времени при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайной погрешностью измерения называется погрешность, которая при многократном измерении одного и того же значения не остается постоянной.

$$71,\ 72,\ 72,\ 73,\ 71$$

$$x_{\text{наил}} = \bar{x} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = 71{,}8.$$

В более общем случае предположим, что мы производим N измерений величины x (используя одну и ту же аппаратуру и метод измерения) и получаем N значений:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N.$$

И на этот раз наилучшей оценкой величины x обычно будет среднее значение от $x_1, \ldots, x_N$, т. е.

$$x_{\text{нанл}} = \bar{x},$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} =$$

$$= \frac{\sum x_i}{N}.$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i} x_i = \sum x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_N,$$

Стандартное отклонение результатов измерений $x_1, \ldots, x_N$ — это оценка *средней погрешности результатов измерений* $x_1, \ldots$ $\ldots, x_N$, которое определяется следующим образом.

Если принять, что среднее $\bar{x}$ — это наилучшая оценка величины x, то естественно рассмотреть разность $x_i - \bar{x} = d_i$. Эта разность, часто называемая *отклонением* (или остатком) x_i от $\bar{x}$, показывает, *насколько результат i-го измерения x_i отличается от среднего значения $\bar{x}$.*

Вычислеиие отклоиений

Номер нзмерения i	Измереиное значение x_i	Отклонение $d_i = x_i - \bar{x}$
1	71	−0,8
2	72	0,2
3	72	0,2
4	73	1,2
5	71	−0,8
	$\bar{x} = 71,8$	$\bar{d} = 0,0$

Если мы теперь извлечем квадратный корень из полученного результата, то получим величину, которая измеряется в тех же единицах, что и сама величина x. Это число называется *стандартным отклонением* $x_1, \ldots, x_N$ и обозначается σ_x:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Вычисление стандартного отклонения

Номер измерения i	Измеренное значение x_i	Отклонение $d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	71	−0,8	0,64
2	72	0,2	0,04
3	72	0,2	0,04
4	73	1,2	1,44
5	71	−0,8	0,64
	$\bar{x} = 71{,}8$		$\sum d_i^2 = 2{,}80$

Суммируя числа d_i^2 и деля сумму на 5, мы получим величину σ_x^2 (часто называемую *дисперсией* измерений):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum d_i^2 = \frac{2,80}{5} = 0,56.$$

Извлекая квадратный корень, находим стандартное отклонение

$$\sigma_x \approx 0,7.$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Стандартное отклонение среднее

Если $x_1, \ldots, x_N$ — результаты N измерений одной и той же величины x, то, как мы видели, наша наилучшая оценка величины x есть их среднее $\bar{x}$.

То стандартным отклонением среднего называется величина и обозначается

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}.$$

$$(\text{значение } x) = x_{\text{наил}} \pm \delta x,$$

где $x_{\text{наил}} = \bar{x}$ ($\bar{x}$ — среднее от $x_1, \ldots, x_N$), а δx — стандартное отклонение среднего

$$\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}.$$

проведено 10 измерений для первой пружины и получены следующие значения k (в ньютонах на метр):

86, 85, 84, 89, 86, 88, 88, 85, 83, 85,

$$\bar{k} = 85{,}9 \text{ Н/м} \qquad \sigma_k = 1{,}9 \text{ Н/м} \approx \approx 2 \text{ Н/м}.$$

стандартное отклонение среднего

$$\sigma_{\bar{k}} = \sigma_k / \sqrt{10} = 0{,}6 \text{ Н/м},$$

и наш окончательный результат, основанный на этих десяти измерениях, для коэффициента упругости пружины будет равен

$$k = 85{,}9 \pm 0{,}6 \text{ Н/м}.$$

Задача

l	24,25; 24,26; 24,22; 24,28; 24,24 24,25; 24,22; 24,26; 24,23; 24,24
b	50,36; 50,35; 50,41; 50,37; 50,36 50,32; 50,39; 50,38; 50,36; 50,38

$$A = (24{,}245\ \text{мм} \pm 0{,}025\ \%) \cdot (50{,}368\ \text{мм} \pm 0{,}016\ \%) =$$
$$= 1221{,}17\ \text{мм}^2 \pm 0{,}03\ \% = 1221{,}2 \pm 0{,}4\ \text{мм}^2.$$

Систематические ошибки

период таких колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Таким образом, измеряя T и m, мы можем найти k по формуле

$$k = 4\pi^2 m/T^2.$$

$$k = 13,16 \pm 0,06 \ \text{Н/м}.$$

статистический анализ различных значений k приводит к следующей случайной составляющей δk:

$$\delta k_{\text{сл}} = \sigma_{\bar{k}} = 0,06 \ \text{Н/м}.$$

Пусть нам известно, что весы, используемые для измерения m, и часы, используемые для измерения T, имеют систематические погрешности 1 и 0,5% соответственно. Теперь мы можем найти систематическую составляющую погрешности δk методом расчета ошибок в косвенных измерениях

$$\frac{\delta k_{\text{сист}}}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta m_{\text{сист}}}{m}\right)^2 + \left(2\,\frac{\delta T_{\text{сист}}}{T}\right)^2} = \\ = \sqrt{1+1}\,\% = 1{,}4\ \%$$

$$\delta k_{\text{сист}} = (13{,}16\ \text{Н/м}) \cdot 0{,}014 = 0{,}18\ \text{Н/м}.$$

$$\delta k = \sqrt{(\delta k_{\text{сл}})^2 + (\delta k_{\text{сист}})^2} = \\ = \sqrt{(0{,}06)^2 + (0{,}18)^2} \approx 0{,}2\ \text{Н/м}.$$