

Статистический анализ случайных погрешностей.

Систематической погрешностью называется погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся во времени при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайной погрешностью измерения называется погрешность, которая при многократном измерении одного и того же значения не остается постоянной.

71, 72, 72, 73, 71

$$x_{\text{наил}} = \bar{x} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = 71,8.$$

В более общем случае предположим, что мы производим N измерений величины x (используя одну и ту же аппаратуру и метод измерения) и получаем N значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_N.$$

И на этот раз наилучшей оценкой величины x обычно будет среднее значение от x_1, \dots, x_N , т. е.

$$x_{\text{наил}} = \bar{x},$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \\ &= \frac{\sum x_i}{N}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_i x_i = \sum x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

Стандартное отклонение результатов измерений x_1, \dots, x_N — это оценка *средней погрешности результатов измерений* x_1, \dots, x_N , которое определяется следующим образом.

Если принять, что среднее \bar{x} — это наилучшая оценка величины x , то естественно рассмотреть разность $x_i - \bar{x} = d_i$. Эта разность, часто называемая *отклонением* (или остатком) x_i от \bar{x} , показывает, *насколько результат i -го измерения x_i отличается от среднего значения \bar{x} .*

Вычисление отклонений

Номер измерения i	Измеренное значение x_i	Отклонение $d_i = x_i - \bar{x}$
1	71	-0,8
2	72	0,2
3	72	0,2
4	73	1,2
5	71	-0,8
	<u> </u>	<u> </u>
	$\bar{x} = 71,8$	$\bar{d} = 0,0$

Если мы теперь извлечем квадратный корень из полученного результата, то получим величину, которая измеряется в тех же единицах, что и сама величина x . Это число называется *стандартным отклонением* x_1, \dots, x_N и обозначается σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Вычисление стандартного отклонения

Номер измерения i	Измеренное значение x_i	Отклонение $d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	71	—0,8	0,64
2	72	0,2	0,04
3	72	0,2	0,04
4	73	1,2	1,44
5	71	—0,8	0,64
	$\bar{x} = 71,8$		$\sum d_i^2 = 2,80$

Суммируя числа d_i^2 и деля сумму на 5, мы получим величину σ_x^2 (часто называемую *дисперсией* измерений):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum d_i^2 = \frac{2,80}{5} = 0,56.$$

Извлекая квадратный корень, находим стандартное отклонение

$$\sigma_x \approx 0,7.$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Стандартное отклонение среднее

Если x_1, \dots, x_N — результаты N измерений одной и той же величины x , то, как мы видели, наша наилучшая оценка величины x есть их среднее \bar{x} .

То стандартным отклонением среднего называется величина и обозначается

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}.$$

$$(\text{значение } x) = x_{\text{наил}} \pm \delta x,$$

где $x_{\text{наил}} = \bar{x}$ (\bar{x} — среднее от x_1, \dots, x_N), а δx — стандартное отклонение среднего

$$\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}.$$

проведено 10 измерений для первой пружины и получены следующие значения k (в ньютонах на метр):

86, 85, 84, 89, 86, 88, 88, 85, 83, 85,

$$\bar{k} = 85,9 \text{ Н/м} \quad \sigma_k = 1,9 \text{ Н/м} \approx \\ \approx 2 \text{ Н/м.}$$

стандартное отклонение среднего

$$\sigma_{\bar{k}} = \sigma_k / \sqrt{10} = 0,6 \text{ Н/м,}$$

и наш окончательный результат, основанный на этих десяти измерениях, для коэффициента упругости пружины будет равен

$$k = 85,9 \pm 0,6 \text{ Н/м.}$$

Задача

<i>l</i>	24,25; 24,26; 24,22; 24,28; 24,24
	24,25; 24,22; 24,26; 24,23; 24,24
<i>b</i>	50,36; 50,35; 50,41; 50,37; 50,36
	50,32; 50,39; 50,38; 50,36; 50,38

$$\begin{aligned} A &= (24,245 \text{ MM} \pm 0,025 \%) \cdot (50,368 \text{ MM} \pm 0,016 \%) = \\ &= 1221,17 \text{ MM}^2 \pm 0,03 \% = 1221,2 \pm 0,4 \text{ MM}^2. \end{aligned}$$

Систематические ошибки

период таких колебаний равен $T = 2\pi \sqrt{m/k}$. Таким образом, измеряя T и m , мы можем найти k по формуле

$$k = 4\pi^2 m / T^2.$$

$$k = 13,16 \pm 0,06 \text{ Н/м.}$$

статистический анализ различных значений k приводит к следующей случайной составляющей δk :

$$\delta k_{\text{сл}} = \sigma_{\bar{k}} = 0,06 \text{ Н/м.}$$

Пусть нам известно, что весы, используемые для измерения m , и часы, используемые для измерения T , имеют систематические погрешности 1 и 0,5% соответственно. Теперь мы можем найти систематическую составляющую погрешности δk методом расчета ошибок в косвенных измерениях

$$\begin{aligned}\frac{\delta k_{\text{сист}}}{k} &= \sqrt{\left(\frac{\delta m_{\text{сист}}}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta T_{\text{сист}}}{T}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + 1} \% = 1,4 \%\end{aligned}$$

$$\delta k_{\text{сист}} = (13,16 \text{ Н/м}) \cdot 0,014 = 0,18 \text{ Н/м.}$$

$$\begin{aligned}\delta k &= \sqrt{(\delta k_{\text{сл}})^2 + (\delta k_{\text{сист}})^2} = \\ &= \sqrt{(0,06)^2 + (0,18)^2} \approx 0,2 \text{ Н/м.}\end{aligned}$$