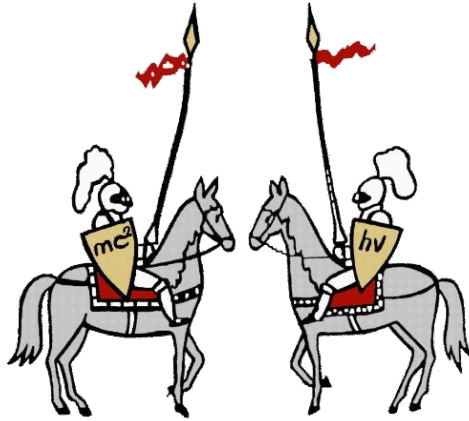


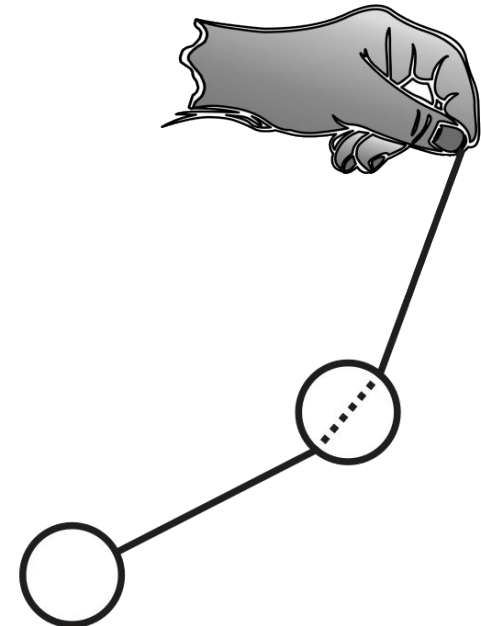
# 9. Шарики на нити



Докладчик - Хорошко Илья

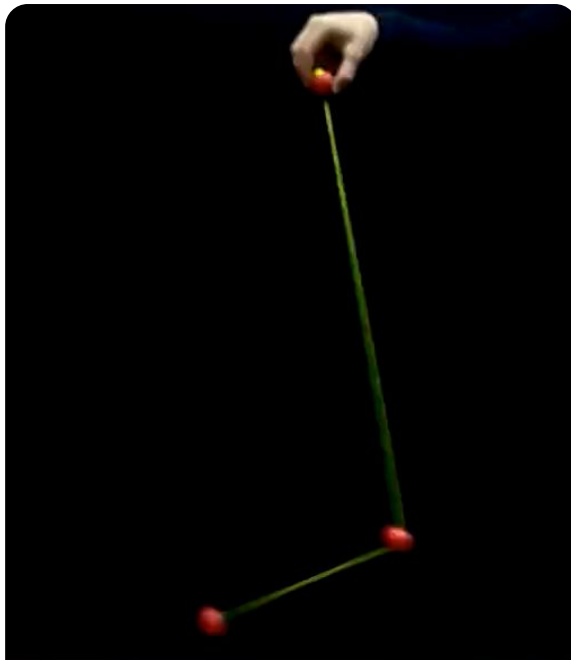


*Наденьте шарик со сквозным отверстием на нить так, чтобы он мог свободно двигаться вдоль нити. На конце нити закрепите другой шарик. Если периодически двигать свободный конец нити, то можно наблюдать сложное движение обоих шаров. Исследуйте явление.*

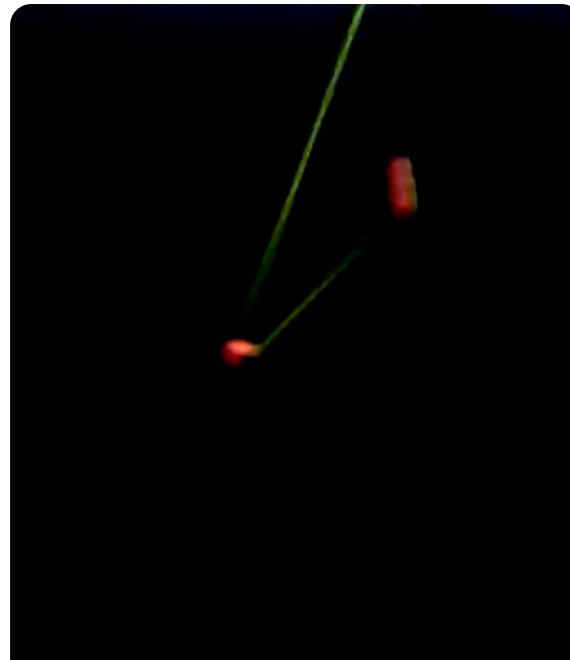


# Демонстрация эффекта

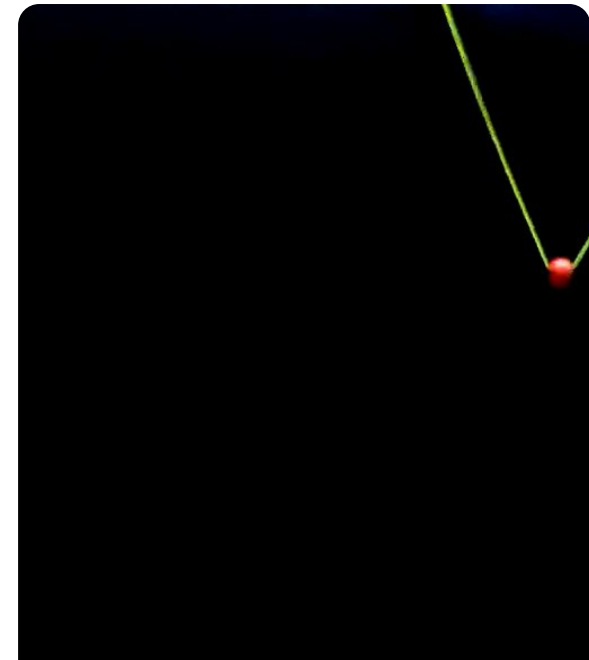
IYPT 2019  
Team 2  
Ukraine



Горизонтальные  
орбиты



Вертикальные  
орбиты



Хаотические  
решения

Предварительная  
часть

# Структура доклада

IYPT 2019  
Team 3  
Ukraine

## Горизонтальные орбиты

*Стационарное решение  
Учёт силы трения  
Экспериментальное изучение*

## Вертикальные орбиты

*Уравнение движения  
Асимптотический анализ  
Экспериментальное изучение*

## Хаотические решения

*Моделирование движения системы*

# Горизонтальные решения

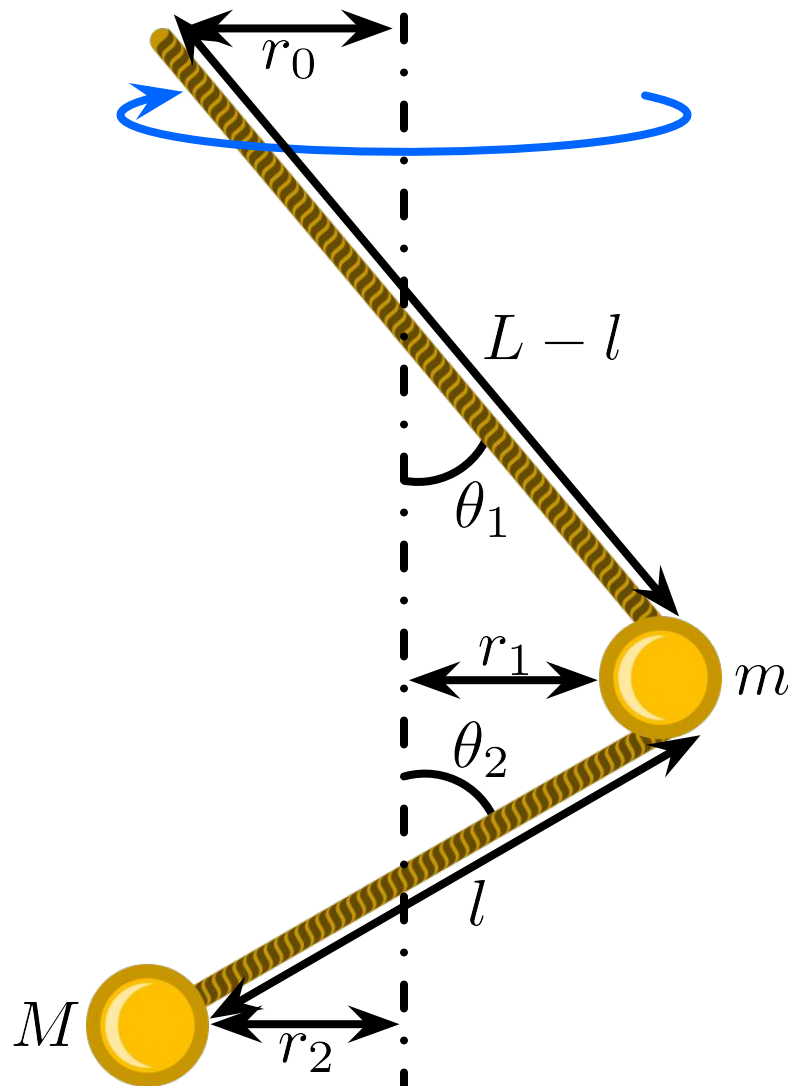
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Геометрия системы

IYPT 2019  
Team 5  
Ukraine



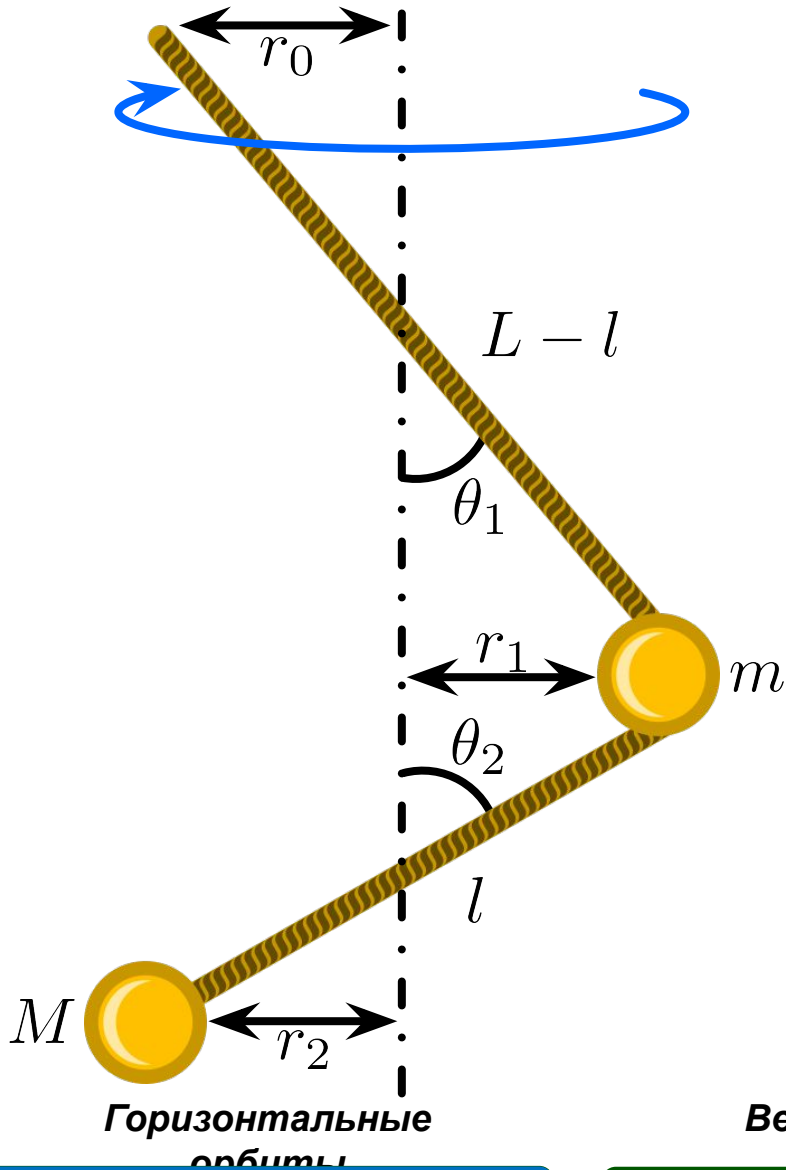
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Геометрия системы

IYPT 2019  
Team 6  
Ukraine



*Из геометрии системы  
следует*

$$\begin{cases} r_1 + r_0 = (L - l) \sin \theta_1 \\ r_1 + r_2 = l \sin \theta_2 \end{cases}$$

*Чтобы описать движение  
системы найдём:  $r_1, r_2, l$*

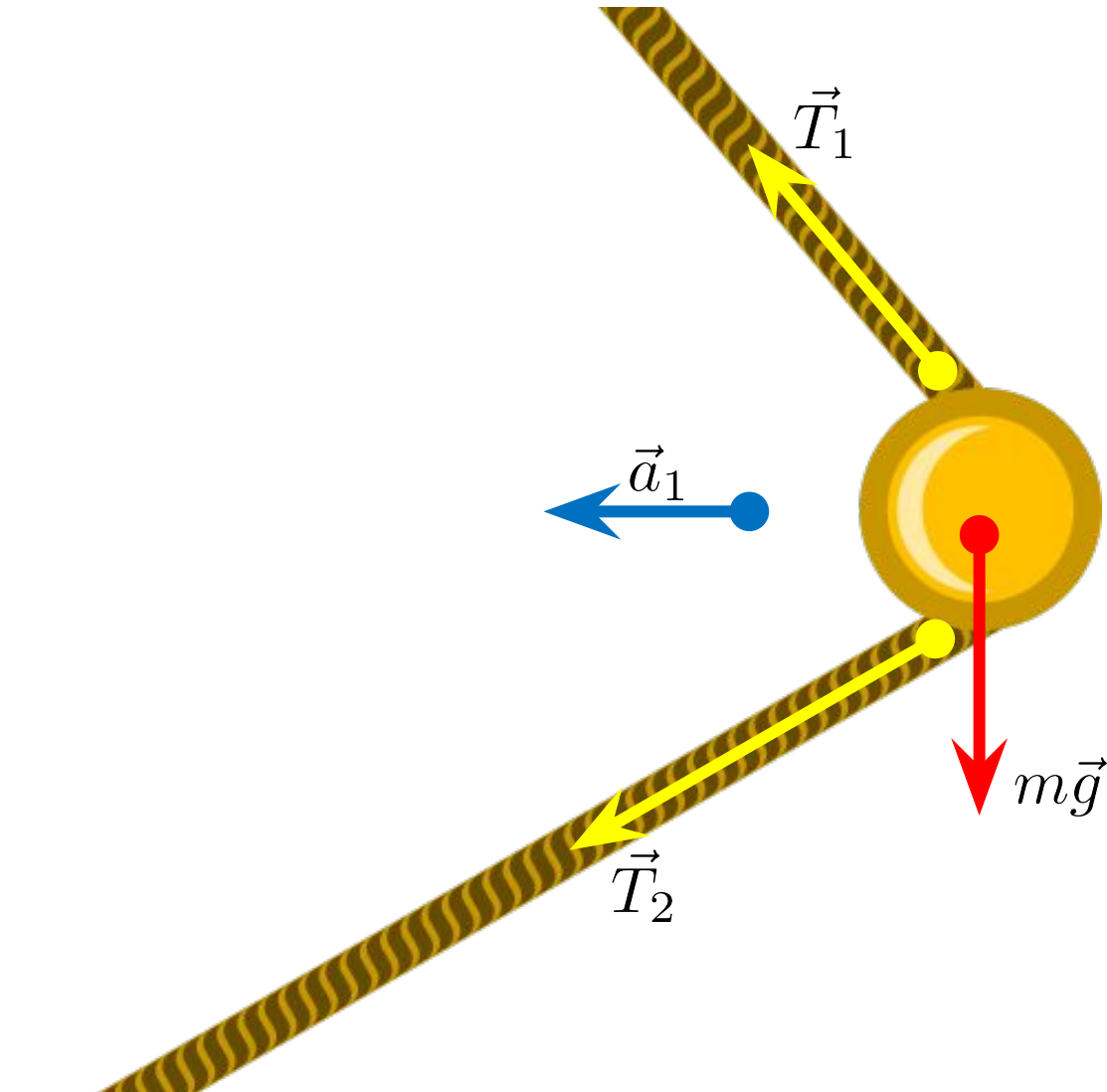
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Анализ сил в системе

IYPT 2019  
Team 7  
Ukraine



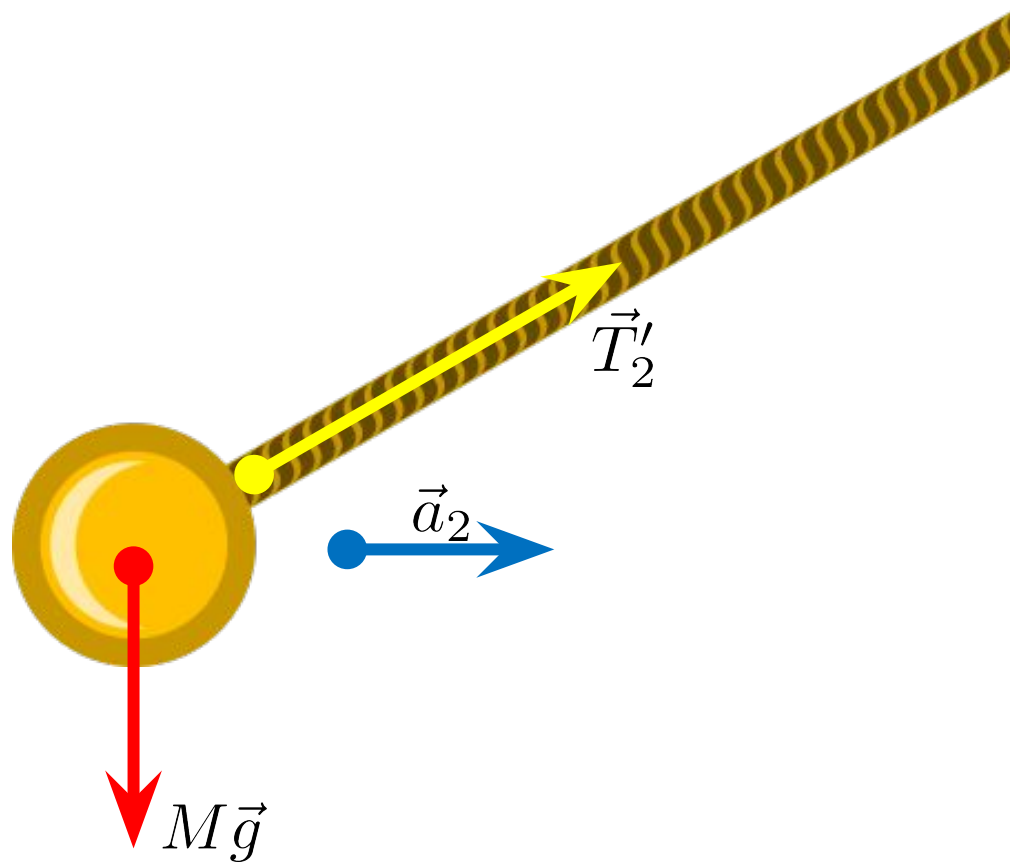
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Анализ сил в системе

IYPT 2019  
Team 8  
Ukraine



Горизонтальные  
орбиты

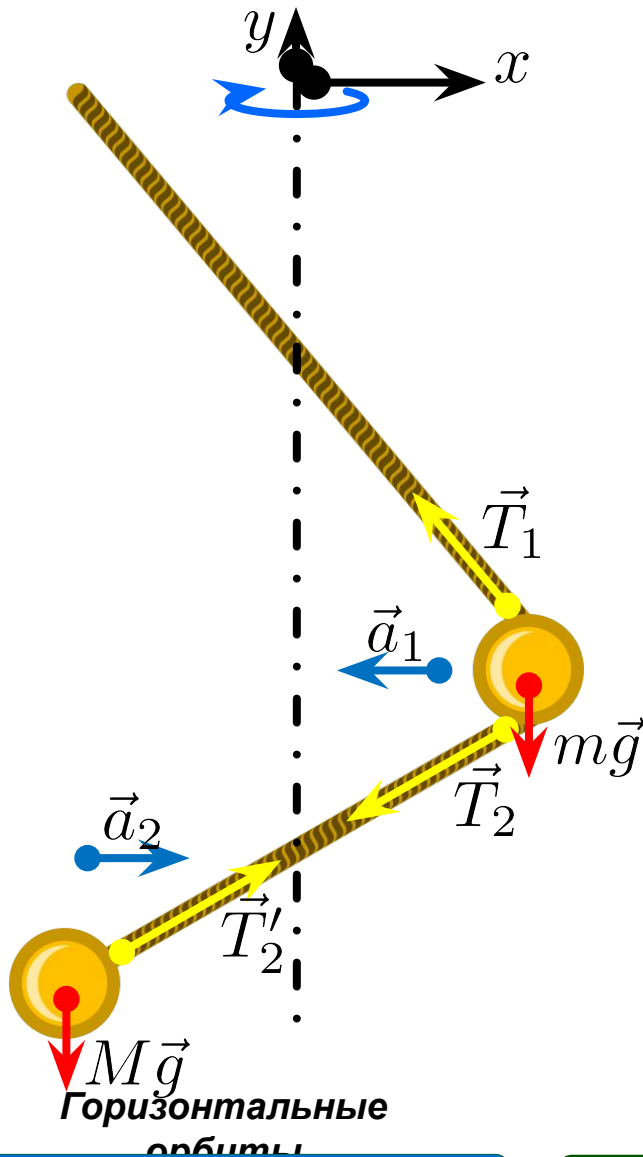
Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения



# Уравнения движения

IYPT 2019  
Team 9  
Ukraine



Второй закон Ньютона для  
обоих шариков

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}_1$$

$$M\vec{g} + \vec{T}'_2 = M\vec{a}_2$$

В проекциях на оси  $y$  и  $x$   
получаем:

$$\begin{cases} -T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 = -m\omega^2 r_1 \\ T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - mg = 0 \\ T_2 \sin \theta_2 = M\omega^2 r_2 \\ T_2 \cos \theta_2 - Mg = 0 \end{cases}$$

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Конечная система уравнений

IYPT 2019  
Team 10  
Ukraine

## Уравнения движения

$$\begin{cases} -T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 = -m\omega^2 r_1 \\ T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - mg = 0 \\ T_2 \sin \theta_2 = M\omega^2 r_2 \\ T_2 \cos \theta_2 - Mg = 0 \end{cases}$$

## Переменные системы

$$\begin{aligned} &T_1, T_2 \\ &l, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \end{aligned}$$

Решаем систему в приближении отсутствия сил трения, тогда силы натяжения нитей считаем равными

## Геометрические условия

$$\begin{cases} r_1 + r_0 = (L - l) \sin \theta_1 \\ r_1 + r_2 = l \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$T_1 = T_2$$

Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Численное решение

IYPT 2019  
Team 11  
Ukraine



Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Численное решение

IYPT 2019  
Team 12  
Ukraine

Friction.nb \* - Wolfram Mathematica 11.3

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[ ]:= Solve[{mg == N1 + N2, μ1 N1  $\frac{d}{2}$  + N2  $\left(\frac{L}{2} - x\right)$  == μ2  $\frac{N2 d}{2}$  + N1  $\left(\frac{L}{2} + x\right)$ }, {N1, N2}];
```

```
In[ ]:= μ[v_] := Tanh[v] (a + α (v - Tanh[v] v0)^2)
```

```
μ1[v_] := μ[ω r - v]
```

```
μ2[v_] := μ[ω r + v]
```

```
N1[t_] :=  $\frac{mg (L - 2x[t] - d μ2[x'[t]])}{2L - d μ1[x'[t]] - d μ2[x'[t]]}$ ;
```

```
N2[t_] :=  $\frac{mg (L + 2x[t] - d μ1[x'[t]])}{2L - d μ1[x'[t]] - d μ2[x'[t]]}$ ;
```

```
eq = m x''[t] - μ1[x'[t]] N1[t] + μ2[x'[t]] N2[t];
```

```
In[ ]:= param = {a → 0.7, α → 0.0003, v0 → 60, L → 0.075, d → 0.01, ω → 120, r → 0.06, m → 0.1, g → 9.81};
```

```
In[ ]:= style = {AxesStyle → Directive[Gray, 10], PlotTheme → "Detailed", Frame → True, LabelStyle → Directive[43, FontFamily → "Century"],  
FrameStyle → Directive[Thickness[0.002], Darker[Darker[Gray]]], FrameTicksStyle → Directive[43, Darker[Darker[Gray]]], FontFamily → "Century",  
AspectRatio →  $\frac{1}{1.8}$ , ImageSize → {1280}};
```

```
In[ ]:= s = NDSolve[{eq == 0, x[0] == 0.1, x'[0] == 0} /. param, x, {t, 0, 300}, PrecisionGoal → 20]
```

```
Out[ ]:= {{x → InterpolatingFunction[  
Domain: {{0., 300.}}  
Output: scalar  
]]}}
```

```
In[ ]:= ListPlot[Table[{t1,  $\left(x[t]^2 - (x'[t])^2 \left(\frac{x[t]}{x''[t]}\right)\right)$  /. s[[1]] /. t → t1}, {t1, 0.53, 300, 0.6}], Evaluate[style], Joined → True, PlotStyle → Directive[Red, Thickness[0.003]],  
PlotRange → {Automatic, {0, 1.6}}
```



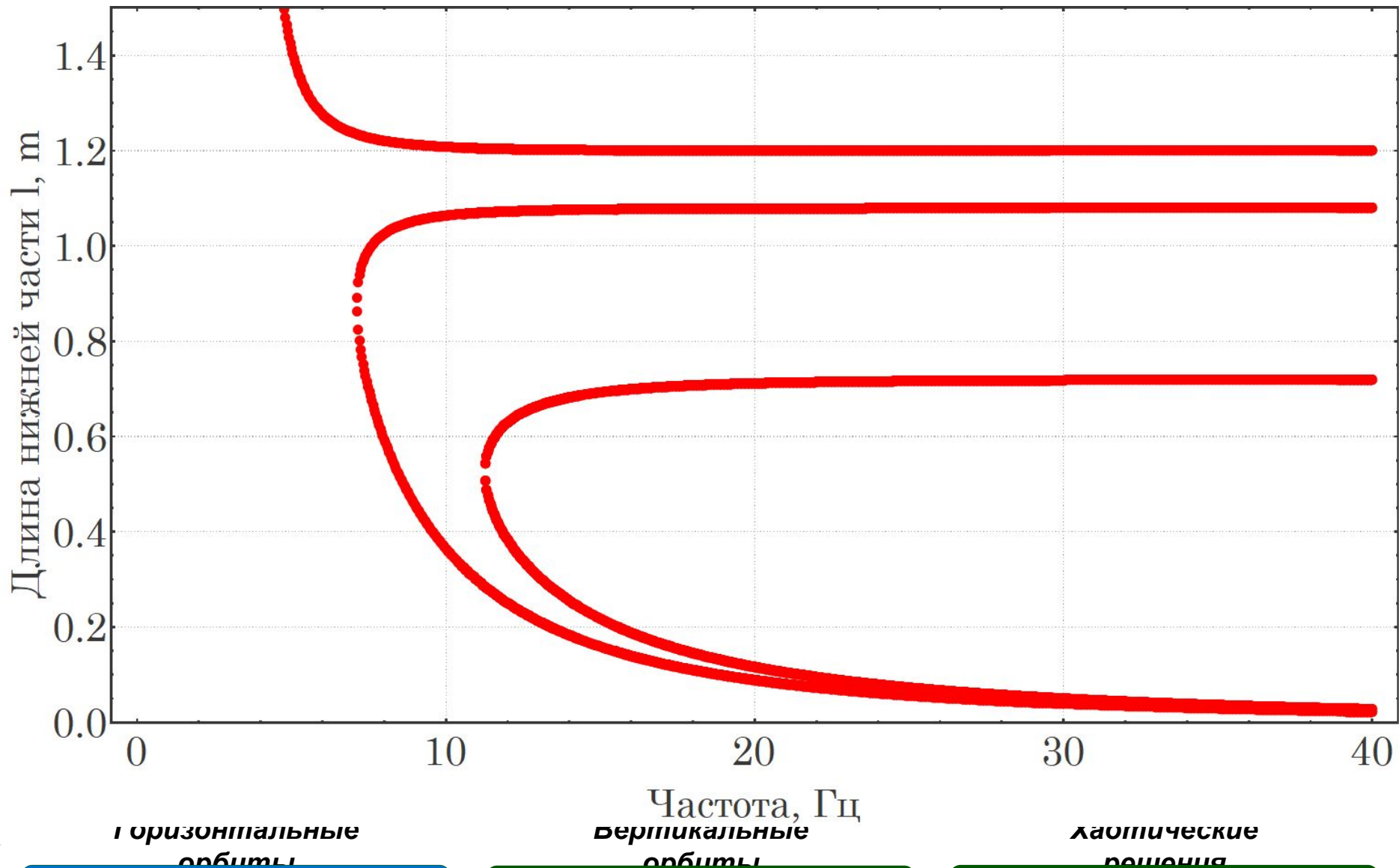
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

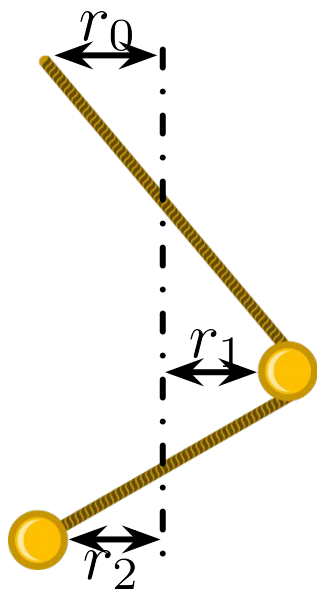
# Численное решение

IYPT 2019  
Team 13  
Ukraine



# Проверка на устойчивость

IYPT 2019  
Team 14  
Ukraine



Горизонтальные  
отклонения:  
 $r_1 = (L - l) \sin \theta_1$   
 $r_2 = r_1 + l \sin \theta_2$

Вертикальные  
отклонения:  
 $z_1 = l \cos \theta_1$   
 $z_2 = z_1 + l \cos \theta_2$

Кинетическая  
энергия:  
 $W_k = \frac{1}{2} (m \omega^2 r_1^2 + M \omega^2 r_2^2)$

Потенциальная  
энергия:  
 $W_p = -g (m z_1 + M z_2)$

Пишем функцию Лагранжа для нашей системы

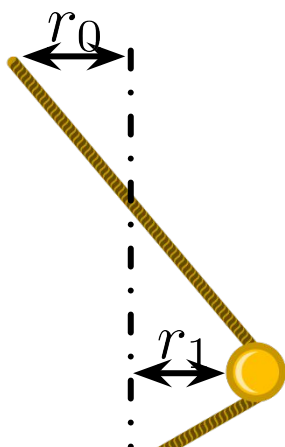
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Проверка на устойчивость

IYPT 2019  
Team 15  
Ukraine



Горизонтальные  
отклонения:  
 $r_1 = (L - l) \sin \theta_1$   
 $r_2 = r_1 + l \sin \theta_2$

Вертикальные  
отклонения:  
 $z_1 = l \cos \theta_1$   
 $z_2 = z_1 + l \cos \theta_2$

Кинетическая  
энергия:  
 $W_k = \frac{1}{2} (m\omega^2 r_1^2 + M\omega^2 r_2^2)$

Потенциальная  
энергия:  
 $W_p = -g (mz_1 + Mz_2)$

Условия равновесия

системы:  $\frac{\partial E}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial l} = 0$

Выпуклость энергии вблизи точки равновесия говорит об устойчивости  
данного положения

Эффективная  
энергия:  $U_{eff} = E$

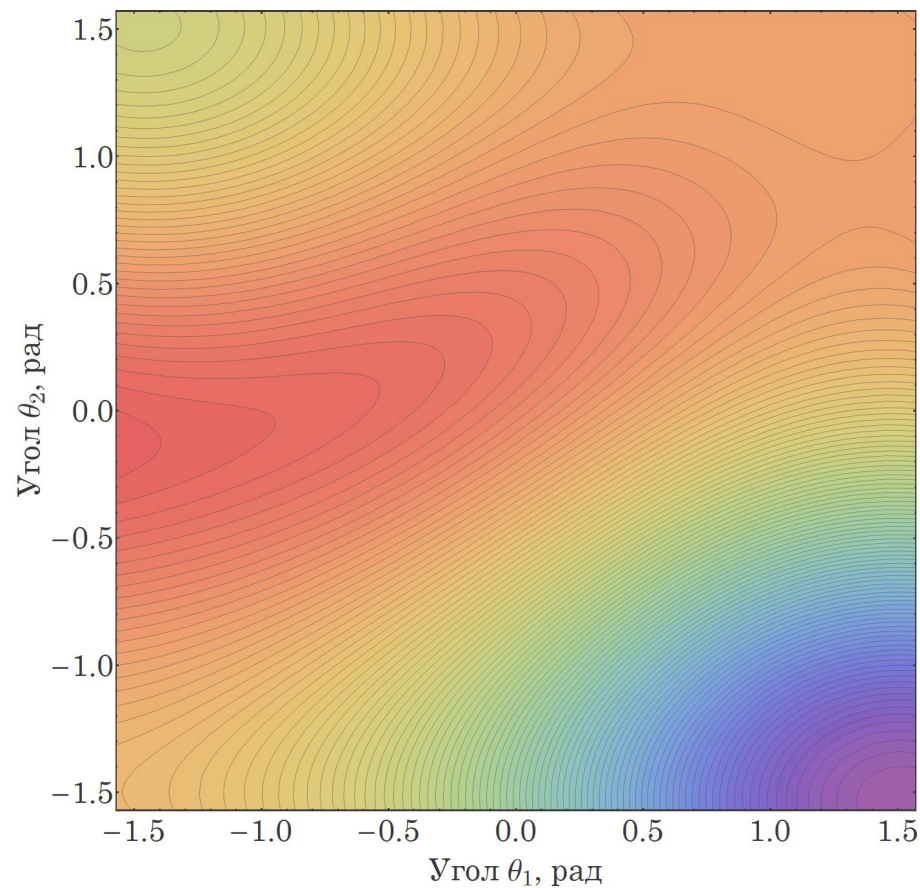
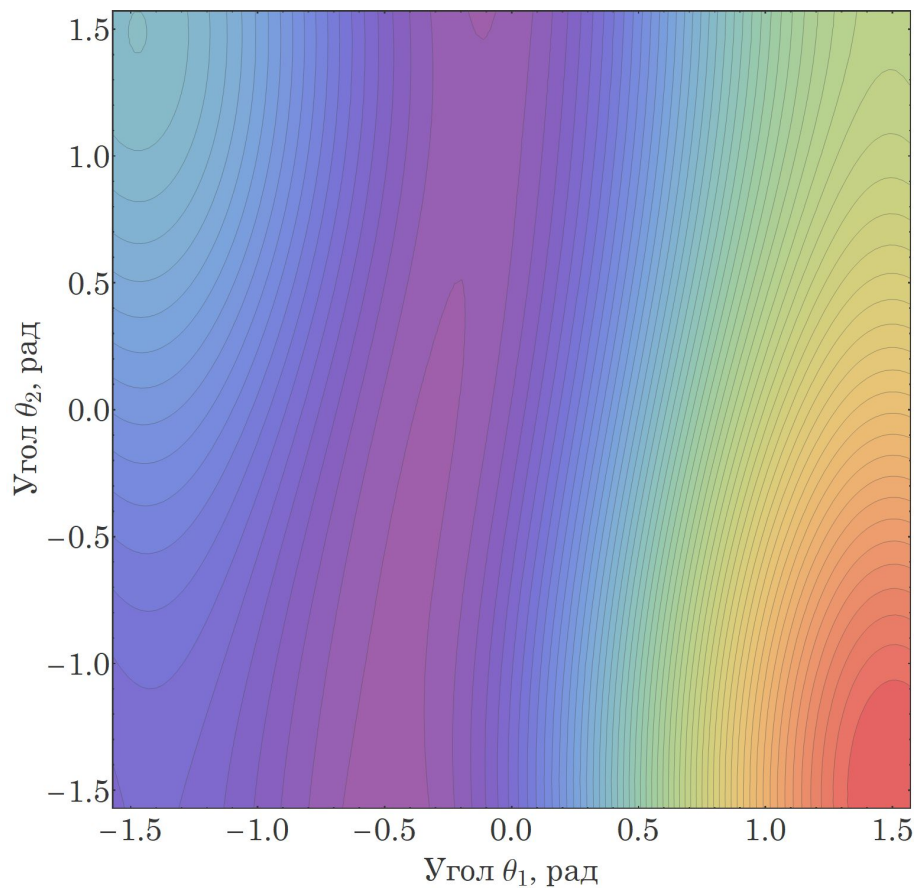
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Устойчивые решения

IYPT 2019  
Team 16  
Ukraine



-25

-20

-15

-10

-5

**Горизонтальные  
орбиты**

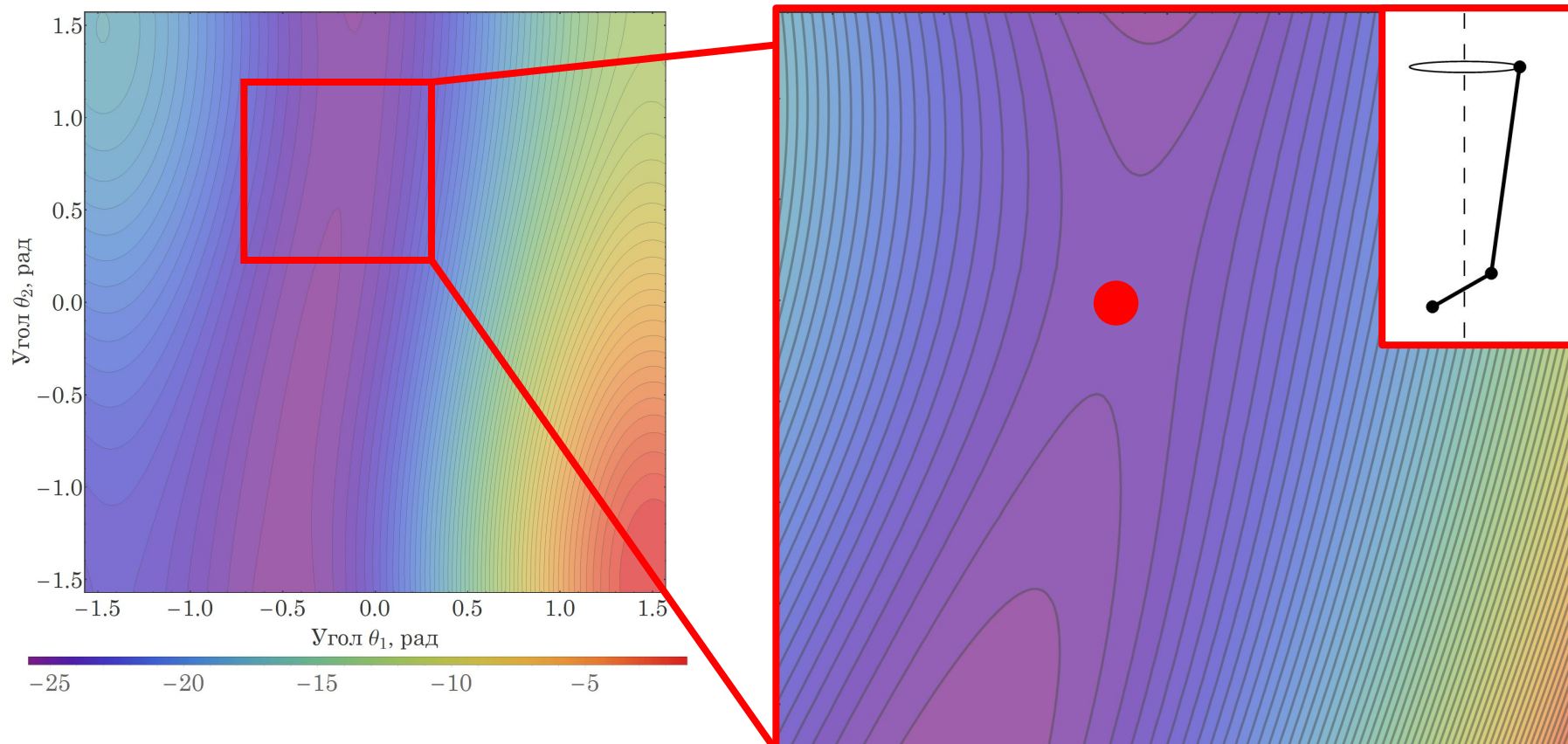
**Вертикальные  
орбиты**

**Хаотические  
решения**



# Устойчивые решения

IYPT 2019  
Team 17  
Ukraine



**Седловая точка**

**Положение неустойчиво**

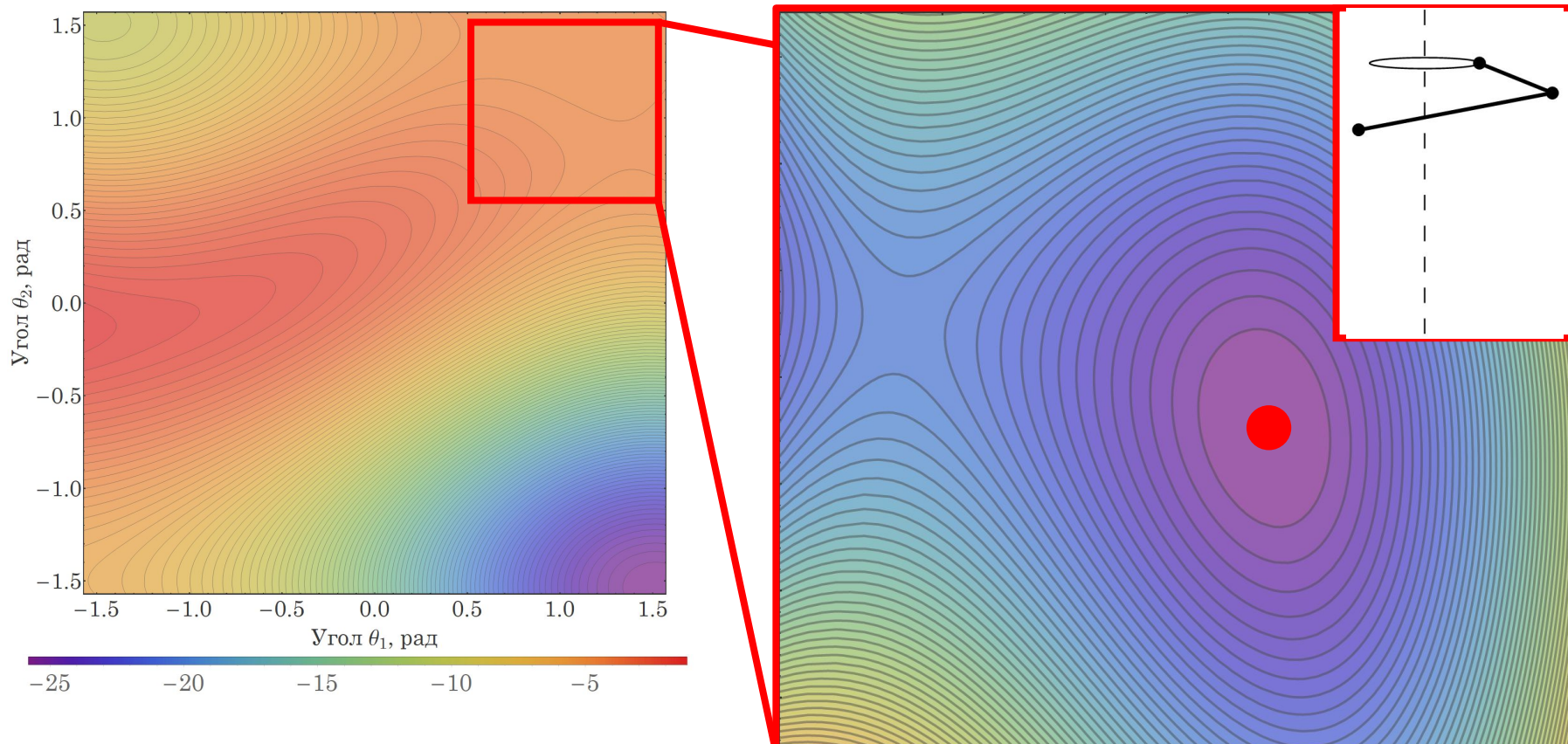
**Горизонтальные  
орбиты**

**Вертикальные  
орбиты**

**Хаотические  
решения**

# Устойчивые решения

IYPT 2019  
Team 18  
Ukraine



**Минимум эффективной энергии**

**Положение устойчиво**

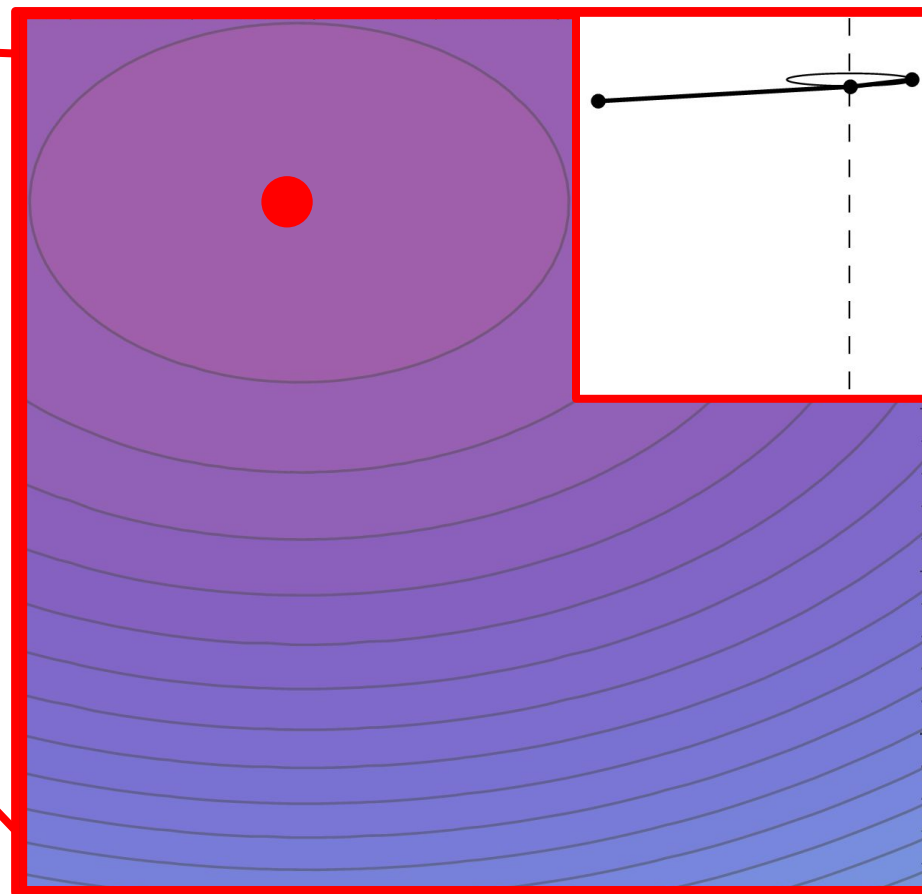
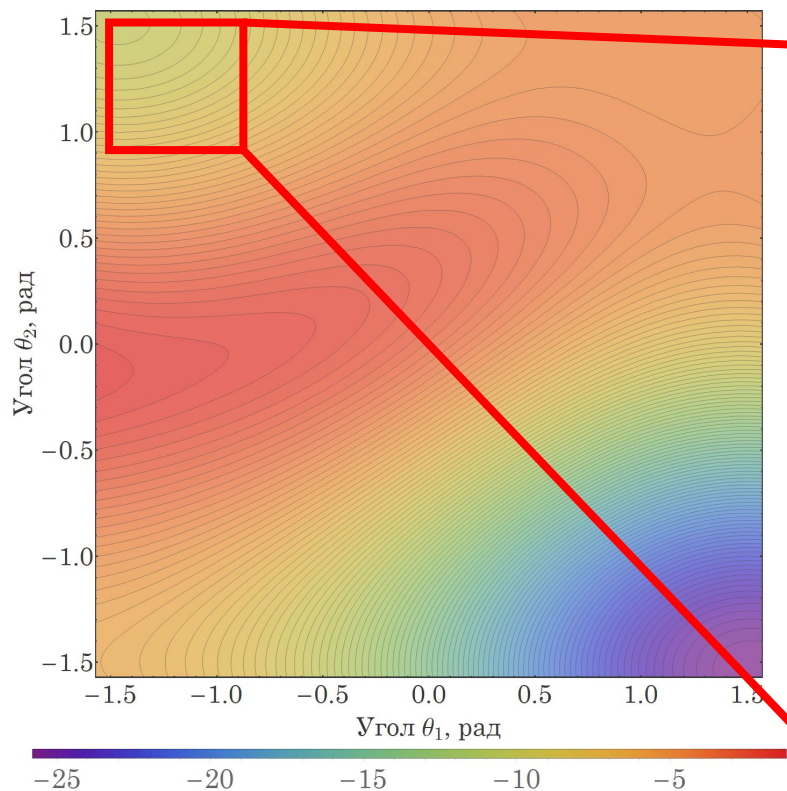
**Горизонтальные  
орбиты**

**Вертикальные  
орбиты**

**Хаотические  
решения**

# Устойчивые решения

IYPT 2019  
Team 19  
Ukraine



**Минимум эффективной**

**Положение устойчиво**

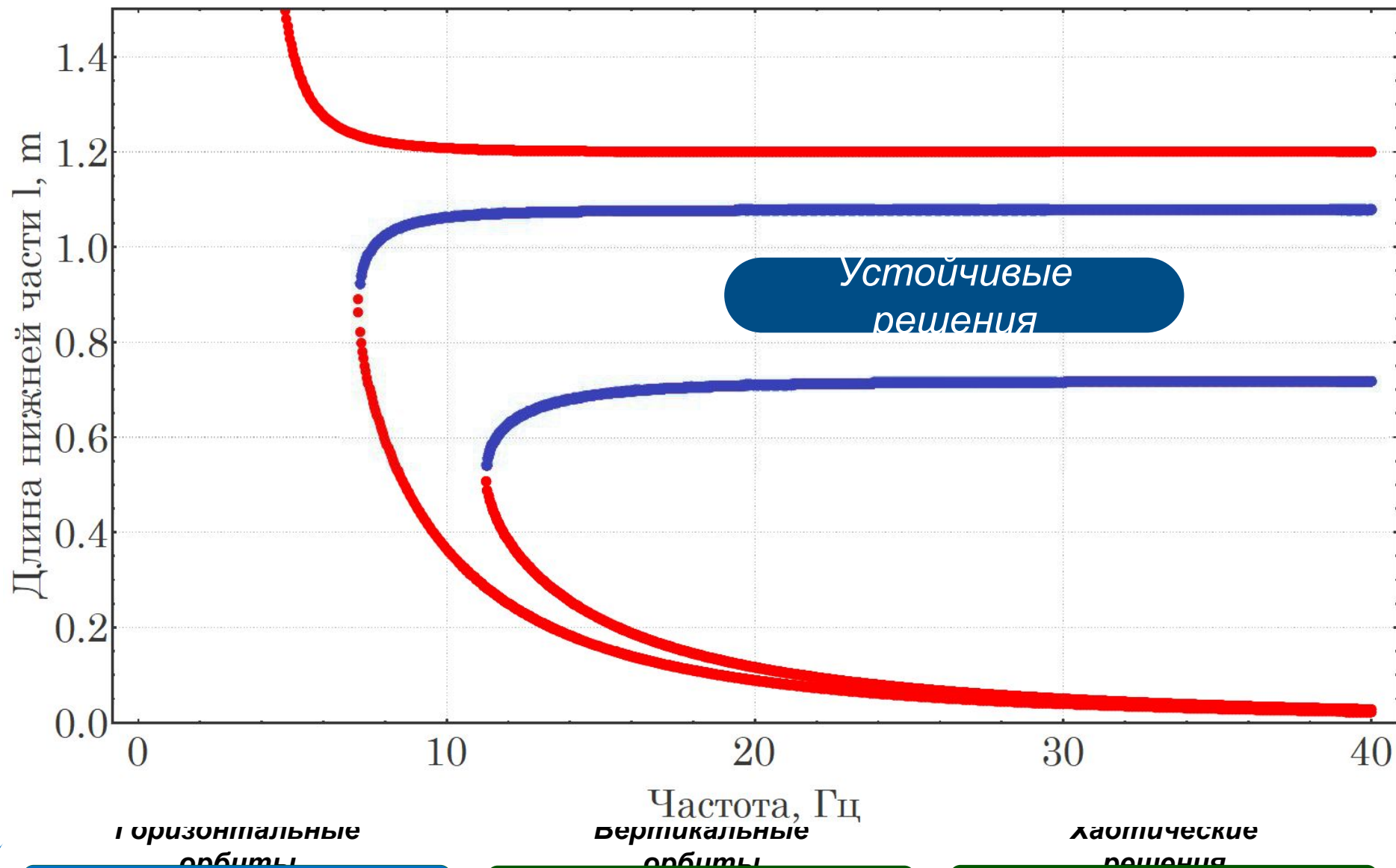
**Горизонтальные  
орбиты**

**Вертикальные  
орбиты**

**Хаотические  
решения**

# Устойчивые решения

IYPT 2019  
Team 20  
Ukraine



# Сила трения в системе

IYPT 2019  
Team 21  
Ukraine

## Уравнения движения

$$\begin{cases} -T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 = -m\omega^2 r_1 \\ T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - mg = 0 \\ T_2 \sin \theta_2 = M\omega^2 r_2 \\ T_2 \cos \theta_2 - Mg = 0 \end{cases}$$

## Переменные системы

$$\begin{aligned} &T_1, T_2 \\ &l, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \end{aligned}$$

Решаем систему в приближении отсутствия сил трения, тогда силы натяжения нитей считаем равными

## Геометрические условия

$$\begin{cases} r_1 + r_0 = (L - l) \sin \theta_1 \\ r_1 + r_2 = l \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$T_2 = T_1 e^{-\mu(\pi - \theta_1 - \theta_2)}$$

Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Решение с учётом сил трения

IYPT 2019  
Team 22  
Ukraine

Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

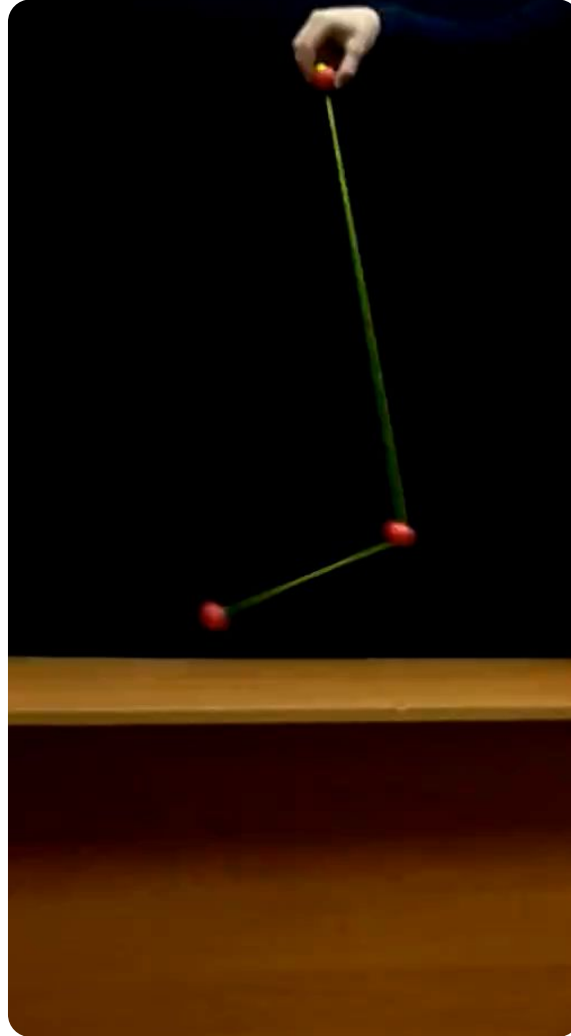
Хаотические  
решения

# Экспериментальная проверка

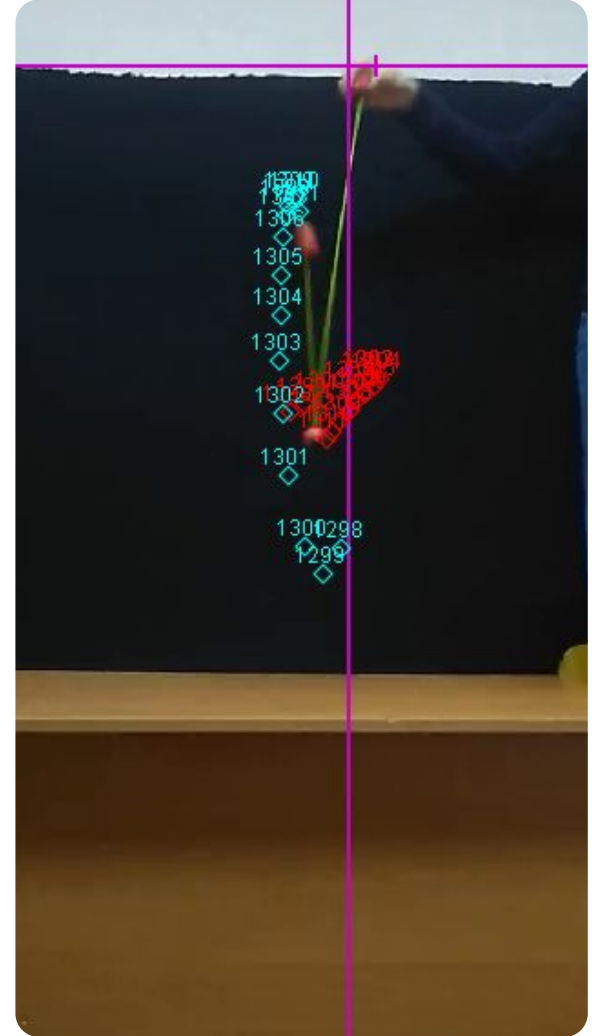
IYPT 2019  
Team 23  
Ukraine



Горизонтальные  
орбиты



Вертикальные  
орбиты



Хаотические  
орбиты

# Экспериментальная проверка

IYPT 2019  
Team 24  
Ukraine

Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения



# Вертикальные орбиты

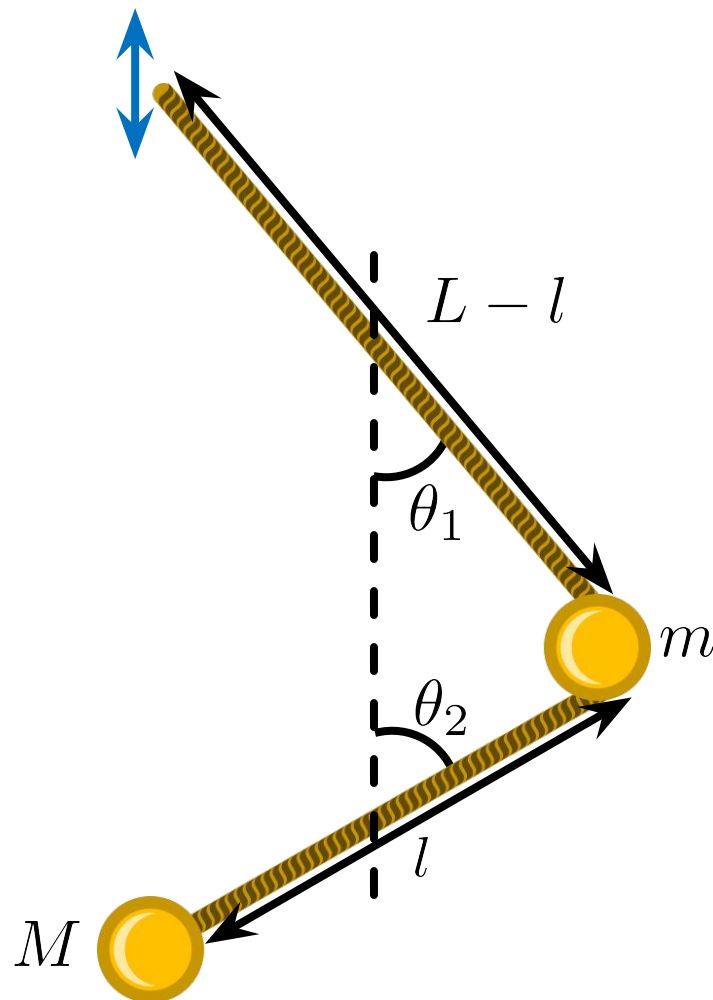
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Геометрия системы

IYPT 2019  
Team 26  
Ukraine



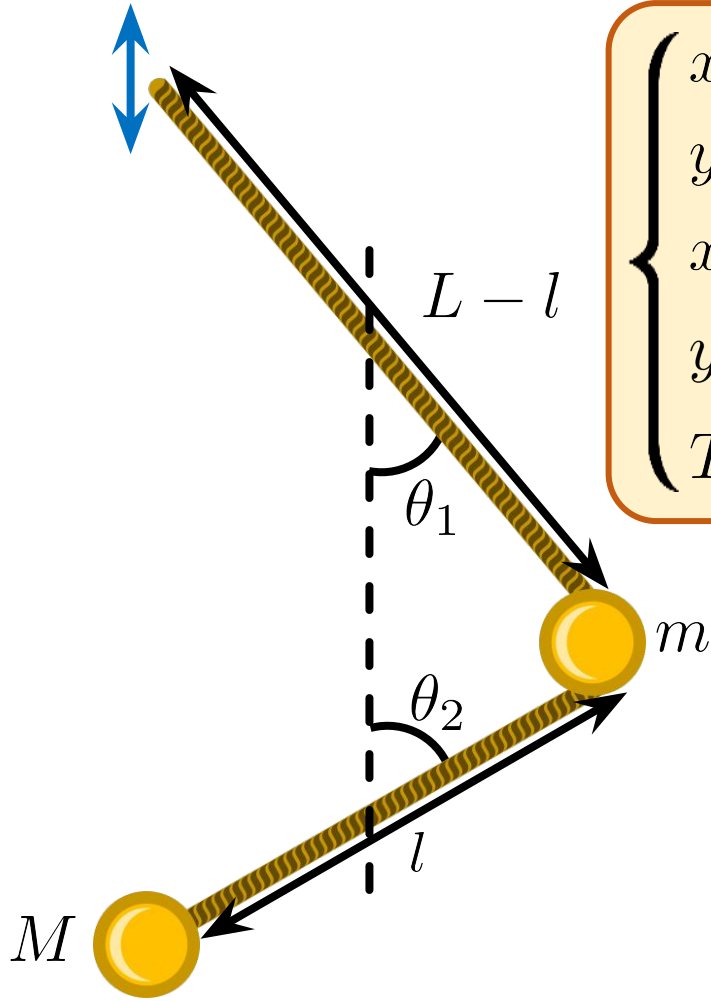
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Геометрия системы

IYPT 2019  
Team 27  
Ukraine



$$\begin{cases} x_1 = -l \sin \theta_1 \\ y_1 = -l \cos \theta_1 + A \sin \omega t \\ x_2 = -l \sin \theta_1 + (L - l) \sin \theta_2 \\ y_2 = -l \cos \theta_1 - (L - l) \cos \theta_2 + A \sin \omega t \\ T_2 = T_1 e^{-\mu(\pi - \theta_1 - \theta_2)} \end{cases}$$

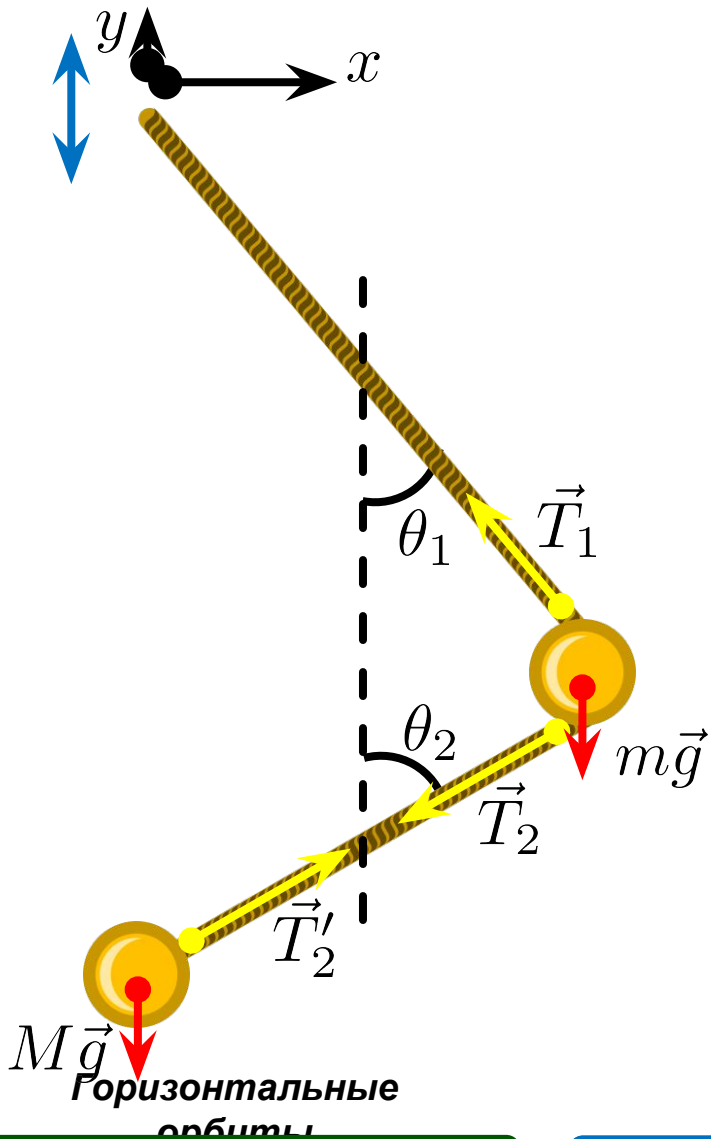
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Уравнения движения

IYPT 2019  
Team 28  
Ukraine



Второй закон Ньютона для  
обоих шариков

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}_1$$

$$M\vec{g} + \vec{T}'_2 = M\vec{a}_2$$

В проекциях на оси  $y$  и  $x$   
получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \\ m\ddot{y}_1 = T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - mg \\ M\ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \\ M\ddot{y}_2 = T_2 \cos \theta_2 - Mg \end{cases}$$

Горизонтальные  
орбиты

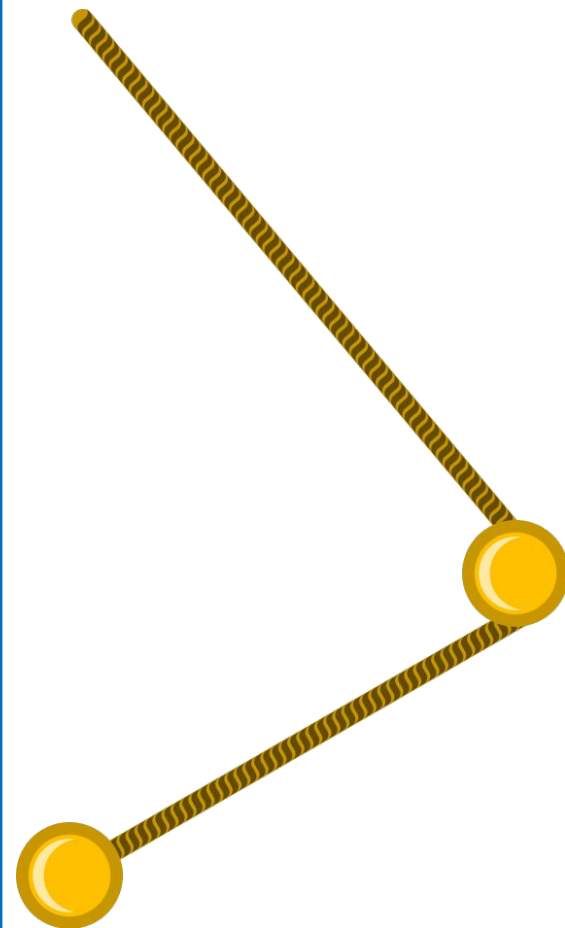
Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Полная система уравнений

IYPT 2019  
Team 29  
Ukraine

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \\ m\ddot{y}_1 = T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - mg \\ M\ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \\ M\ddot{y}_2 = T_2 \cos \theta_2 - Mg \\ x_1 = -l \sin \theta_1 \\ y_1 = -l \cos \theta_1 + A \sin \omega t \\ x_2 = -l \sin \theta_1 + (L - l) \sin \theta_2 \\ y_2 = -l \cos \theta_1 - (L - l) \cos \theta_2 + A \sin \omega t \\ T_2 = T_1 e^{-\mu(\pi - \theta_1 - \theta_2)} \end{array} \right.$$



Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Численное решение

IYPT 2019  
Team 30  
Ukraine

*Горизонтальные  
орбиты*

*Вертикальные  
орбиты*

*Хаотические  
решения*

# Экспериментальная проверка

IYPT 2019  
Team 31  
Ukraine

Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Хаотические решения

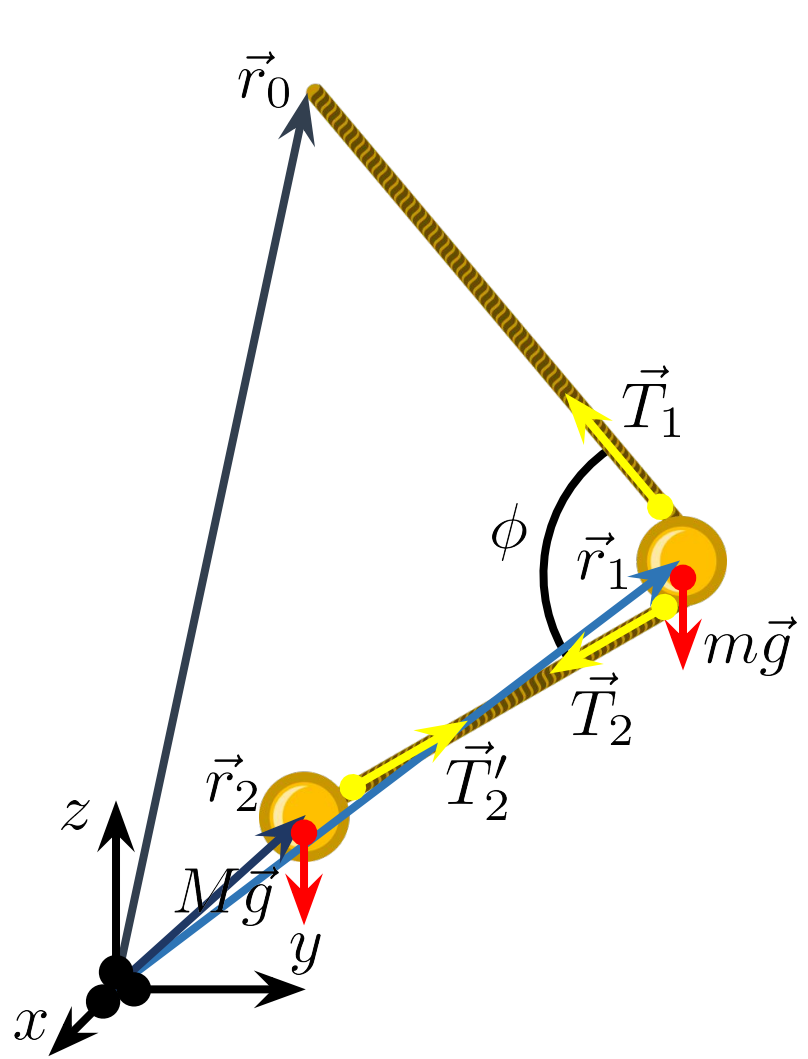
Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения



# Хаотические движения



Горизонтальные  
орбиты

Вертикальные  
орбиты

Хаотические  
решения

# Что-то теоретическое...

IYPT 2019  
Team 34  
Ukraine

*Горизонтальные  
орбиты*

*Вертикальные  
орбиты*

*Хаотические  
решения*

# Что-то экспериментальное...

IYPT 2019  
Team 35  
Ukraine

*Горизонтальные  
орбиты*

*Вертикальные  
орбиты*

*Хаотические  
решения*

# 9. Шарики на нити

IYPT 2019  
Team 36  
Ukraine

*Наденьте шарик со сквозным отверстием на нить так, чтобы он мог свободно двигаться вдоль нити. На конце нити закрепите другой шарик. Если периодически двигать свободный конец нити, то можно наблюдать сложное движение обоих шаров. Исследуйте явление.*

## Вертикальные орбиты

- *Качественное и теоретическое изучение динамики движения системы*
- *Изучение устойчивости решений*
- *Экспериментальное изучение*

*Результаты и  
выводы*

# 9. Шарики на нити

IYPT 2019  
Team 37  
Ukraine

*Наденьте шарик со сквозным отверстием на нить так, чтобы он мог свободно двигаться вдоль нити. На конце нити закрепите другой шарик. Если периодически двигать свободный конец нити, то можно наблюдать сложное движение обоих шаров. Исследуйте явление.*

## Горизонтальные орбиты

- *Теоретическое изучение динамики движения системы*
- *Экспериментальная проверка решений*

*Результаты и выводы*

# 9. Шарики на нити

IYPT 2019  
Team 38  
Ukraine

*Наденьте шарик со сквозным отверстием на нить так, чтобы он мог свободно двигаться вдоль нити. На конце нити закрепите другой шарик. Если периодически двигать свободный конец нити, то можно наблюдать сложное движение обоих шаров. Исследуйте явление.*

## Хаотические решения

- *Универсальная теоретическая модель для численной симуляции движения системы*

*Результаты и  
выводы*

Докладчик – Хорошко Илья

**Спасибо за внимание!**

