Дистанционный урок

«Производная: определение и основные формулы »

алгебра и начала анализа
11 класс

Содержание:

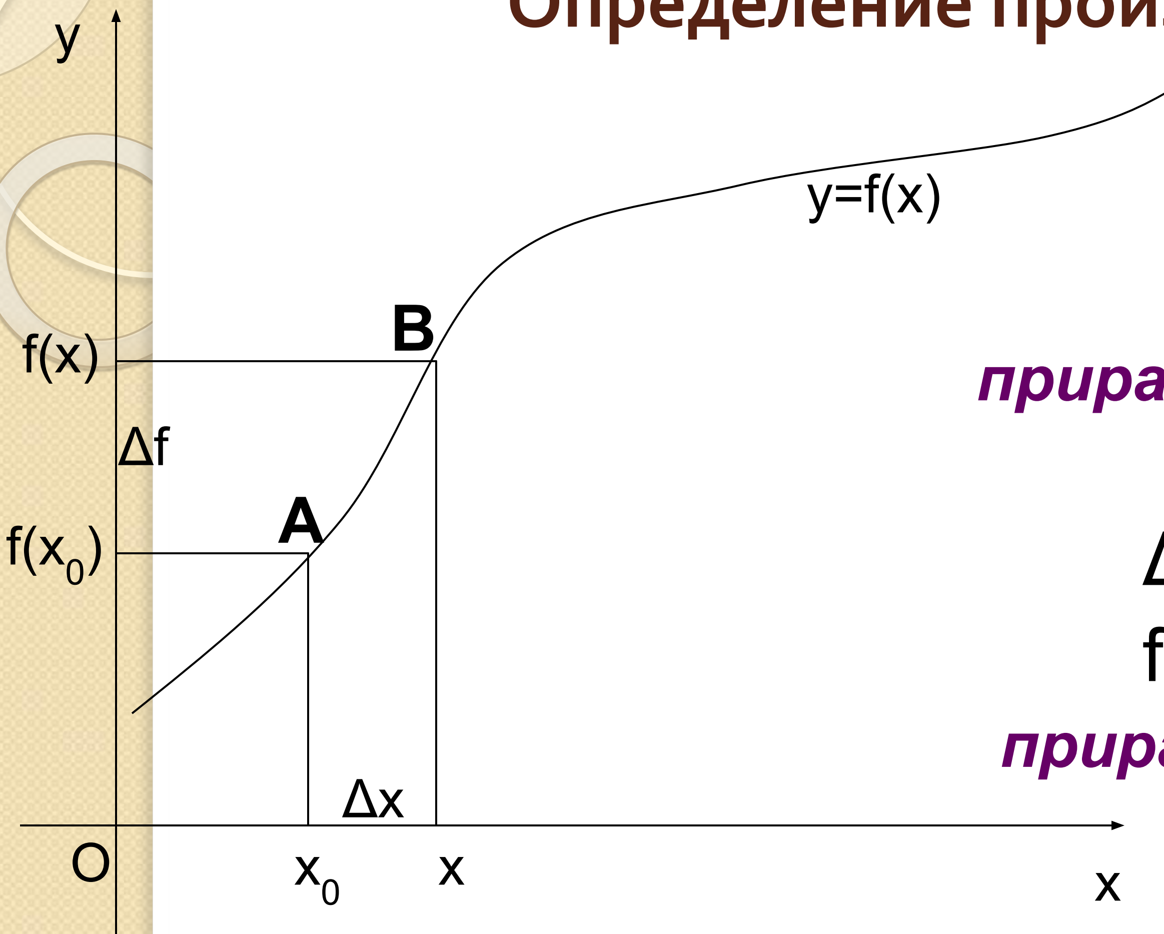
Цели и задачи

Цель: познакомиться с одним из важных элементов математического анализа – производной: ее определением, физическим смыслом, а также освоить аппарат нахождения производной различных функций.

Задачи:

1. Знать определение производной;
2. Знать и уметь применять правила дифференцирования;
3. Знать и уметь применять формулы для вычисления производных элементарных функций.

Определение производной



$$\Delta x = x - x_0$$
$$x = x_0 + \Delta x$$

приращение аргумента

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$
$$f(x) = f(x_0) + \Delta f$$

приращение функции

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

разностное отношение

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение при $\Delta x \to 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{при\ \Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Физический смысл производной

Если тело движется по прямой и за время Δt его координата изменяется на Δx, то

$$V_{ср}(\Delta t) = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{t(x_0 + \Delta x) - t(x_0)}{\Delta x}$$

- средняя скорость движения тела за Δt

Таким образом, **физический смысл производной – это мгновенная скорость**

Правила дифференцирования

Если функция *y = f(x)* имеет производную, то она называется ***дифференцируемой***; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Пусть *f(x)* , *g(x)* – дифференцируемые функции, *C* – постоянная.

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Основные формулы производных

$$(c)' = 0$$

$$x' = 1$$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left((kx+b)^n\right)' = n \cdot (kx+b)^{n-1} \cdot k$$

Примеры взятия производной

$$(8)' = 0 \qquad (\pi)' = 0 \qquad (5x)' = 5 \qquad (-3,4x)' = -3,4$$

$$\left(x^6\right)' = 6x^5 \qquad \left(x^{100}\right)' = 100x^{99}$$

$$\left(x^{-7}\right)' = -7x^{-8} \qquad \left(x^{-100}\right)' = -100x^{-101}$$

$$\left(\sqrt{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \left(3x^{\frac{-1}{4}}\right)' = \frac{-3}{4}x^{\frac{-5}{4}} = \frac{-3}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

Производные элементарных функций

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Производная сложной функции

Пусть *f(x)* , *g(x)* – дифференцируемые функции. Тогда:

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

Пример:

$$\left(\sin\left(4x^5-3x^2\right)\right)' = \sin'\left(4x^5-3x^2\right)\cdot\left(4x^5-3x^2\right)' =$$

$$= \cos\left(4x^5-3x^2\right)\cdot\left(20x^4-6x\right)$$

Задания для закрепления материала

Найдите производные, используя образцы.

Образец: $(2x)' = 2; \quad (5x+1)' = 5; \quad (3x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

$(4x)' = ...$

$(6x+2)' = ...$

$(3-2x)' = ...$

$(2x^4)' = ...$

$(3x^6)' = ...$

Образец: $y = 3e^x; \quad y' = 3e^x$

$$f(x) = e^{3x+1}; \quad f'(x) = e^{3x+1} \cdot (3x+1)' = 3e^{3x+1}$$

$y = 5e^x; \; y' = ...$

$y = e^{2x}; \; y' = ...$

$y = 3e^{4x}; \quad y' = 3(e^{4x})' = ... = ...$

$y = 0,5e^{6x+2}; \; y' = 0,5 \cdot (e^{6x+2})' = 0,5 \cdot e^{..........} \cdot (...........)' = ... = ...$

Образец: $y = 5^{2x+1}; \quad y' = 5^{2x+1} \cdot \ln 5 \cdot (2x+1)' = 2\ln 5 \cdot 5^{2x+1}$

$y = 6^{3-2x}; \;\; y' = ...\cdot \ln ... \cdot (...........)' = ...$

$y = 5 \cdot 2^{3x}; \; y' = ...$

Образец: $f(x) = x^2 + 2^x; \quad f'(x) = (x^2)' + (2^x)' = 2x + 2^x \cdot \ln 2$

$f(x) = 2x^4 + 4^x; \;\; f'(x) = (......)' + (.....)' = ...$

$y = 3x^6 + 5^{2x+1}; \;\; y' = ...$

$y = 4x^5 + 2 \cdot 6^{3-2x}; \;\; y' = ...$

Для каждой из функций, графики которых изображены в верхнем ряду, найдите график ее производной.

Задания для самоанализа

Задание 1. Найдите производные функций:

1. $f(x) = 3x + 5$

2. $f(x) = 4x^2 - 5x^3 + 9x$

3. $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3}$

4. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{7}{x}$

5. $f(x) = \sqrt{x} + 4$

6. $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2x^2} + \sqrt{4x}$

Задание 2. Найдите производные функций:

$$1.\ f(x)=(3x+5)(x-3)$$

$$2.\ f(x)=(x^2-5x)(x^3-x^2)$$

$$3.\ f(x)=\frac{3+x}{x^3}$$

$$4.\ f(x)=\frac{2x^2-5}{x+1}$$

$$5.\ f(x)=(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-2)$$

$$6.\ f(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)4x^2$$