

Алгоритм получения СДНФ

- ◆ привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ.
- ◆ удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
- ◆ из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- ◆ из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- ◆ если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \bar{x}_i$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;
- ◆ если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.
- ◆ Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Алгоритм получения СДНФ

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x \equiv x(y \vee \bar{y}) \equiv xy \vee x\bar{y}$$

$$\begin{aligned} x(\bar{y} \vee z) &\equiv x\bar{y} \vee xz \equiv x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) \equiv |5| \\ &\equiv \boxed{x\bar{y}z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xzy \vee \boxed{xz\bar{y}} \equiv x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz. \end{aligned}$$

Алгоритм получения СКНФ

- ◆ привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ.
- ◆ удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
- ◆ из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- ◆ из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- ◆ если в какой-нибудь дизъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой дизъюнкции член $x_i \wedge \bar{x}_i$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;
- ◆ если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Алгоритм получения СКНФ

$$\begin{aligned}(x \rightarrow y)xy &\equiv (\bar{x} \vee y)xy \equiv (\bar{x} \vee y)(x \vee y\bar{y})(y \vee x\bar{x}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y)(x \vee y)(x \vee \bar{y})(y \vee x)(y \vee \bar{x}) \equiv \\ &\equiv (x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y).\end{aligned}$$

Булевы функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $\phi_0 \equiv 0$ — функция константа 0,
2. $\phi_1 = \underline{x}$ — функция повторения аргумента,
3. $\phi_2 = \overline{x}$ — функция инверсии или отрицания аргумента,
4. $\phi_3 \equiv 1$ — функция константа 1.

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

0 $x \wedge y$ x y $x \vee y$ 1
 КОНСТАНТА 0

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$\overline{y} \quad \overline{x}$$

$$y \rightarrow x \quad x \rightarrow y$$

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$\overline{x \rightarrow y} \quad \overline{x \leftarrow y} \quad x \oplus y \quad \overline{x \downarrow y} \quad x \sim y \quad x | y$$

$$\overline{x \vee y}$$

$$\overline{x \wedge y}$$

отрицание импликации

отрицание обратной импликации

исключающее «или»

(сумма по модулю 2)

отрицание дизъюнкции

(стрелка Пирса)

отрицание конъюнкции

(штрих Шеффера)

1. $x \oplus y = y \oplus x$;

2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,

3. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;

4. $x \oplus x = 0$;

5. $0 \oplus x = x$;

6. $\bar{x} = x \oplus 1$.

Двойственные булевы функции

Функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$$

Пример

Найти двойственные функции

$$(x \wedge y)^* = \overline{\overline{x \wedge y}} = x \vee y$$

$$(x \vee y)^* = \overline{\overline{x \vee y}} = x \wedge y$$

$$(\overline{x})^* = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$$

$$(0)^* = \overline{0} = 1$$

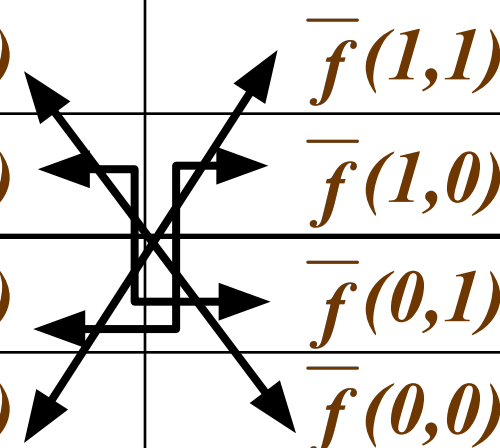
$$(1)^* = \overline{1} = 0$$

Самодвойственные булевы функции

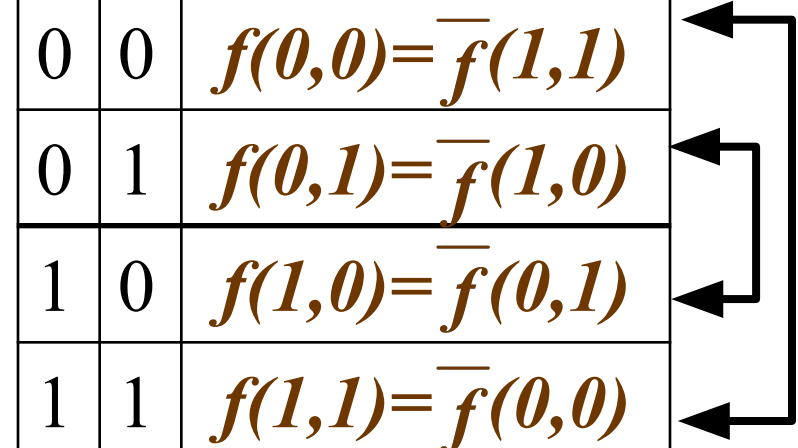
Функция, равная своей двойственной, называется *самодвойственной*.

$$f = f^*$$

x	y	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0)$	$\bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)$	$\bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)$	$\bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)$	$\bar{f}(0,0)$



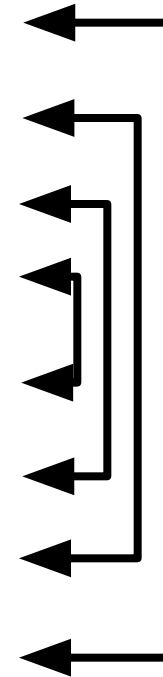
x	y	$f(x,y) = f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0) = \bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1) = \bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0) = \bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1) = \bar{f}(0,0)$



Пример

Является ли функция $f(x,y,z)$ самодвойственной?

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



$f(x,y,z)$ — несамодвойственная

Монотонные булевы функции

Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ - наборы длины n из 0 и 1, то

$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$.

Пример

Наборы $(0, 1, 0)$ и $(1, 1, 0)$ сравнимы, причем $(0, 1, 0) \leq (1, 1, 0)$.

Наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ несравнимы. Также несравнимы наборы $(0, 1)$ и $(1, 1, 0)$.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **монотонной**,

если для всяких наборов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$

условие $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ влечет $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b})$.

Монотонные булевы функции

№	x	y	z	$F = x(\bar{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Линейные булевы функции

Многочленами Жегалкина называются формулы над множеством функций $F_J = \{0, 1, \wedge, \oplus\}$

$$P(X_1 \dots X_n) = a \oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus \dots \oplus a_n X_n \oplus \\ \oplus a_{12} X_1 X_2 \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \dots \oplus a_{1\dots n} X_1 \dots X_n,$$

$$a, \dots, a_{1\dots n} \in \{0, 1\}.$$

$$P = B \oplus AB;$$

$$P = X \oplus YZ \oplus ABX \oplus ABDYZ;$$

$$P = 1 \oplus A \oplus ABD.$$

Линейные булевы функции

Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$$

$$K_i \vee K_j = K_i \oplus K_j$$

$$K_i K_j = 0$$

$$\bar{x}_s = x_s \oplus 1$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$x \oplus x = 0$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина по СДНФ

- ◆ *Начало.* Задана совершенная ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$.
- ◆ *Шаг 1.* Заменяем каждый символ дизъюнкции на символ дизъюнкции с исключением.
- ◆ *Шаг 2.* Заменяем каждую переменную с инверсией x равносильной формулой $x \oplus 1$.
- ◆ *Шаг 3.* Раскрываем скобки.
- ◆ *Шаг 4.* Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.
- ◆ *Конец.* Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x, y, z) =$$

$$= \bar{x}\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus xyz =$$

$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x\bar{y}(z \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= \boxed{xyz} \oplus zx \oplus \boxed{yz} \oplus z \oplus \boxed{xyz} \oplus \boxed{xy} \oplus \boxed{yz} \oplus y \oplus \boxed{xyz} \oplus \boxed{xy} \oplus \boxed{xyz} =$$

$$= xz \oplus y \oplus z$$

Линейные булевы функции

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *линейной*,
если многочлен Жегалкина для нее имеет следующий
линейный относительно переменных вид:
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}$,
где каждое a_i равно 0 или 1.

$$xz \oplus y \oplus z$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина Треугольнику Паскаля

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1	1	$f = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$
x_3	0	0	1	0	1	1 0 1 0 0 0 1
x_2	0	1	0	0	1	1 1 1 0 0 1
$x_2 x_3$	0	1	1	1	0	0 0 1 0 1
x_1	1	0	0	1	0	0 1 1 1
$x_1 x_3$	1	0	1	1	1	1 0 0
$x_1 x_2$	1	1	0	1	1	1 0
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0	1	1

$$f = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3.$$

T_0, T_1, L, M, S

Выяснить к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция $f=01001110$

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	0	0	$f = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$
x_3	0	0	1	1	1	$1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$
x_2	0	1	0	0	0	$0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$
$x_2 x_3$	0	1	1	0	1	$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1$
x_1	1	0	0	1	1	$1 \ 0 \ 1 \ 0$
$x_1 x_3$	1	0	1	1	1	$1 \ 1 \ 1$
$x_1 x_2$	1	1	0	1	0	$0 \ 0$
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0	0	0

Полином Жегалкина имеет вид: $f = x_3 + x_2 x_3 + x_1 + x_1 x_3$.

1. $f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$;
2. $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin T_1$;
3. $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) \Rightarrow f \notin S$;
4. то $f \notin L$;
5. то $f \notin M$.

	T_0	T_1	S	L	M
f	+	-	-	-	-

Теорема Поста о функциональной полноте

Определение. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется *полной*, если любую булеву функцию можно выразить через функции f_1, f_2, \dots, f_n .

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов T_0, T_1, L, M, S нашлась хотя бы одна функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

Одна из сфер применения булевых функций -- синтез логических схем; при этом булевым функциям соответствуют определённые функциональные элементы (детали). Полнота системы функций означает, что, пользуясь только элементами соответствующих этим функциям типов, можно собрать любую логическую схему.

Достаточность доказывается в 3 этапа:

- 1) построение констант 0 и 1 с помощью функций $f_1 \in K_0, f_2 \in K_1$ и $f_3 \in K_S$;
- 2) построение функции-отрицания с помощью констант 0, 1 и функции $f_4 \in K_M$;
- 3) построение конъюнкции с помощью констант 0, 1, функции \bar{x} и $f_5 \in K_L$.

Пример 1. Множество $N_1 = \{\vee, \wedge, \neg\}$ является функционально полной системой, так как любую булеву функцию, кроме константы 0, можно представить совершенной ДНФ, то есть суперпозицией функций из N_1 а константу 0 – формулой $x\bar{x}$. •

Пример 2. Множество $N_2 = \{\wedge, \oplus, 1\}$ является ФПС, так как любую булеву функцию можно представить полиномом Жегалкина, то есть суперпозицией функций из N_2 , а полином 0 – формулой $1 \oplus 1$. •

	T0	T1	S	L	M
\bar{x}	-	-	+	+	-
xy	+	+	-	-	+
$x \oplus y$	+	+	-	-	+