Алгоритм получения СДНФ

- привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ.
- удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
- из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной *xi* из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;
- если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.
- Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Алгоритм получения СДНФ

$$(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x \equiv x(y \vee \overline{y}) \equiv xy \vee x\overline{y}$$

$$x(\overline{y} \vee z) \equiv x\overline{y} \vee xz \equiv x\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee xz(y \vee \overline{y}) \equiv | 5 |$$

$$\equiv \boxed{x\overline{y}z} \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xzy \vee \boxed{xz\overline{y}} \equiv x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz.$$

Алгоритм получения СКНФ

- привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ.
- удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
- из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
- если в какой-нибудь дизъюнкции не содержится переменной *xi* из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой дизъюнкции член $x_i \wedge \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;
- если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Алгоритм получения СКНФ

$$(x \to y)xy \equiv \left(\overline{x} \vee y\right)xy \equiv \left(\overline{x} \vee y\right)\left(x \vee y\overline{y}\right)\left(y \vee x\overline{x}\right) \equiv$$

$$\equiv \boxed{\left(\overline{x} \vee y\right)}\boxed{\left(x \vee y\right)}\left(x \vee \overline{y}\right)\boxed{\left(y \vee x\right)}\boxed{\left(y \vee \overline{x}\right)} \equiv$$

$$\equiv \left(x \vee y\right)\left(x \vee \overline{y}\right)\left(\overline{x} \vee y\right).$$

Булевы функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $\phi_0 \equiv 0$ — функция константа 0,
2. $\phi_1 = x$ — функция повторения аргумента,
3. $\phi_2 = \overline{x}$ — функция инверсии или отрицания аргумента,
4. $\phi_3 \equiv 1$ — функция константа 1.

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

0 $x \wedge y$ x y $x \vee y$ 1

константа 0

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\overline{y}$ $y \to x$ $\overline{x}$ $x \to y$

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\overline{x \to y}$ $\overline{x \leftarrow y}$ $x \oplus y$ $x \downarrow y$ $x \sim y$ $x \mid y$

$\overline{x \vee y}$ $\overline{x \wedge y}$

отрицание импликации

отрицание обратной импликации

исключающее «или»

(сумма по модулю 2)

отрицание дизъюнкции

(стрелка Пирса)

отрицание конъюнкции

(штрих Шеффера)

1. $x \bigoplus y = y \bigoplus x$;
2. $(x \bigoplus y) \bigoplus z = x \bigoplus (y \bigoplus z)$,
3. $x\,(y \bigoplus z) = xy \bigoplus xz$;
4. $x \bigoplus x = 0$;
5. $0 \bigoplus x = x$;
6. $\overline{x} = x \bigoplus 1$.

Функция $f^*(x_1,\dots,x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1,\dots,x_n)$, если

$$f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$$

Пример

Найти двойственные функции

$$(x\wedge y)^*=\overline{\overline{x}\wedge\overline{y}}=x\vee y$$

$$(x\vee y)^*=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}=x\wedge y$$

$$(\overline{x})^*=\overline{\overline{\overline{x}}}=\overline{x}$$

$$(0)^*=\overline{0}=1$$

$$(1)^*=\overline{1}=0$$

Самодвойственные булевы функции

Функция, равная своей двойственной, называется ***самодвойственной***.

$$f = f^*$$

x	y	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0)$	$\overline{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)$	$\overline{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)$	$\overline{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)$	$\overline{f}(0,0)$

x	y	$f(x,y)=f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0)=\overline{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)=\overline{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)=\overline{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)=\overline{f}(0,0)$

Пример

Является ли функция ***f(x,y,z)*** самодвойственной?

x	y	z	$f\,(x,y,z)$	$f^*\,(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

f(x,y,z) — несамодвойственная

Монотонные булевы функции

Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *и*

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *- наборы длины n из 0 и 1, то*

$\mathbf{a} \le \mathbf{b}$*, если* $a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n$.

Пример

Наборы (0, 1, 0) и (1, 1, 0) сравнимы, причем $(0, 1, 0) \le (1, 1, 0)$.

Наборы (0, 1) и (1, 0) несравнимы. Также несравнимы наборы (0, 1) и (1, 1, 0).

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***монотонной***,

если для всяких наборов $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$

условие $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$ *влечет* $\mathbf{f(a) \le f(b)}$.

Монотонные булевы функции

№	x	y	z	$F = x(\bar{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Линейные булевы функции

Многочленами Жегалкина называются формулы над множеством функций F_J={ 0, 1, ^, ⊕}

$$P(X_1 \ldots X_n) = a \oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus \ldots \oplus a_n X_n \oplus$$

$$\oplus a_{12} X_1 X_2 \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \ldots \oplus a_{1 \ldots n} X_1 \ldots X_n,$$

$$a, \ldots, a_{1 \ldots n} \in \{0, 1\}.$$

$$P = B \oplus AB;$$
$$P = X \oplus YZ \oplus ABX \oplus ABDYZ;$$
$$P = 1 \oplus A \oplus ABD.$$

Линейные булевы функции

Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}$$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigoplus_{f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}$$

$$K_i \vee K_j = K_i \oplus K_j$$

$$K_i K_j = 0$$

$$\bar{x}_s = x_s \oplus 1$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$x \oplus x = 0$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина по СДНФ

- *Начало*. Задана совершенная ДНФ функции f(x1, …, xn).
- *Шаг 1*. Заменяем каждый символ дизъюнкции на символ дизюнкции с исключением.
- *Шаг 2*. Заменяем каждую переменную с инверсией x равносильной формулой x $\oplus$1.
- *Шаг 3*. Раскрываем скобки.
- *Шаг 4*. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.
- *Конец*. Получен полином Жегалкина функции f(x1, …, xn).

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x, y, z) =$$

$$= \bar{x}\,\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus xy\bar{z} \oplus xyz =$$

$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= \boxed{xyz} \oplus zx \oplus \boxed{yz} \oplus z \oplus \boxed{xyz} \oplus \boxed{xy} \oplus \boxed{yz} \oplus y \oplus \boxed{xyz} \oplus \boxed{xy} \oplus \boxed{xyz} =$$

$$= xz \oplus y \oplus z$$

Линейные булевы функции

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **линейной**,

если многочлен Жегалкина для нее имеет следующий

линейный относительно переменных вид:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$,

где каждое a_i равно 0 или 1.

$$\boxed{xz} \oplus y \oplus z$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина Треугольнику Паскаля

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1	1	f = 1 0 0 1 1 1 1 0
x_3	0	0	1	0	1	1 0 1 0 0 0 1
x_2	0	1	0	0	1	1 1 1 0 0 1
x_2x_3	0	1	1	1	0	0 0 1 0 1
x_1	1	0	0	1	0	0 1 1 1
$x_1\, x_3$	1	0	1	1	1	1 0 0
$x_1\, x_2$	1	1	0	1	1	1 0
$x_1\, x_2\, x_3$	1	1	1	0	1	1

$$f = 1 \oplus x3 \oplus x2 \oplus x1\ x3 \oplus x1\ x2 \oplus x1\ x2\ x3.$$

T_0, T_1, L, M, S

Выяснить к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция f=*01001110*

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	0	0	0	0	0	f = 0 1 0 0 1 1 1 0
x_3	0	0	1	1	1	1 1 0 1 0 0 1
x_2	0	1	0	0	0	0 1 1 1 0 1
x_2x_3	0	1	1	0	1	1 0 0 1 1
x_1	1	0	0	1	1	1 0 1 0
$x_1 x_3$	1	0	1	1	1	1 1 1
$x_1 x_2$	1	1	0	1	0	0 0
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0	0	0

Полином Жегалкина имеет вид: $f = x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_1 x_3$.

1. $f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$;
2. $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin T_1$;
3. $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)$ $f \notin S$;
4. то $f \notin L$;
5. то $f \notin M$.

	T_0	T_1	S	L	M
f	+	-	-	-	-

Теорема Поста о функциональной полноте

Определение. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ называется *полной*, если любую булеву функцию можно выразить через функции $f_1, f_2, \dots f_n$.

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). *Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов T_0, T_1, L, M, S нашлась хотя бы одна функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.*

Одна из сфер применения булевых функций -- синтез логических схем; при этом булевым функциям соответствуют определённые функциональные элементы (детали). Полнота системы функций означает, что, пользуясь только элементами соответствующих этим функциям типов, можно собрать любую логическую схему.

Достаточность доказывается в 3 этапа:

1) построение констант 0 и 1 с помощью функций $f_1 \notin K_0$, $f_2 \notin K_1$ и $f_3 \notin K_S$;

2) построение функции–отрицания с помощью констант 0, 1 и функции $f_4 \notin K_M$;

3) построение конъюнкции с помощью констант 0, 1, функции $\bar{x}$ и $f_5 \notin K_L$.

Пример . Множество $N_1=\{\vee, \wedge, \bar{\ }\}$ является функционально полной системой, так как любую булеву функцию, кроме константы 0, можно представить совершенной ДНФ, то есть суперпозицией функций из N_1 а константу 0 – формулой $x\bar{x}$. •

Пример . Множество $N_2=\{\wedge, \oplus, 1\}$ является ФПС, так как любую булеву функцию можно представить полиномом Жегалкина, то есть суперпозицией функций из N_2, а полином 0 – формулой $1 \oplus 1$. •

	T0	T1	S	L	M
$\bar{x}$	–	–	+	+	–
xy	+	+	–	–	+
$x \vee y$	+	+	–	–	+