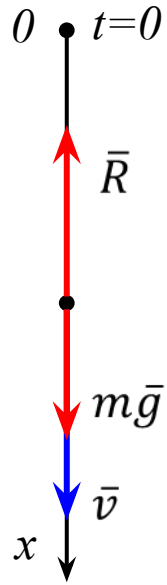


# Динамика точки в инерциальной системе отсчета.



Тело массы  $m$  падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха  $R = k^2 m g v^2$ , где  $v$  – величина скорости тела. Определить предельное значение скорости тела, зависимость скорости тела от времени, и закон его движения.

**Решение.**



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}$$

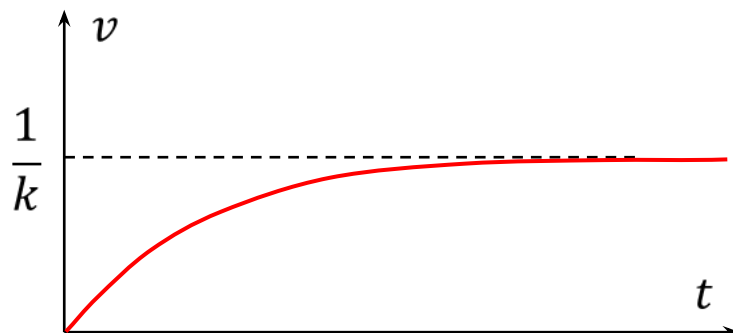
$$x: m\ddot{x} = mg - R = mg - k^2 m g v^2$$

$$\ddot{x} = g(1 - k^2 \dot{x}^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - k^2 v^2); \quad \frac{dv \cdot k}{1 - k^2 v^2} = g dt \cdot k$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + kv}{1 - kv} \right| = kgt + C_1 \quad \text{Н.У.:} \quad t = 0, v = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{1 + kv}{1 - kv} = e^{2kgt} \Rightarrow v(t) = \frac{1 e^{kgt} - e^{-kgt}}{k e^{kgt} + e^{-kgt}} = \frac{1 \operatorname{sh} kgt}{k \operatorname{ch} kgt} = \frac{1}{k} \operatorname{th} kgt$$



Предельное значение скорости:  $v_\infty = \frac{1}{k}$

При отсутствии сопротивления воздуха:

$$v(t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \operatorname{th} kgt = gt$$

Определим закон движения точки.

$$v(t) = \frac{1}{k} th kgt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{sh kgt}{ch kgt}; \quad dx = \frac{1}{k} \frac{sh kgt dt}{ch kgt} \cdot \frac{kg}{kg} = \frac{1}{k^2 g} \frac{d(ch kgt)}{ch kgt}$$

$$x = \frac{1}{k^2 g} \ln(ch kgt) + C_2; \quad \text{Н.У.:} \quad t = 0, x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{k^2 g} \ln(ch kgt)$$

При отсутствии сопротивления воздуха:

$$ch \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots$$

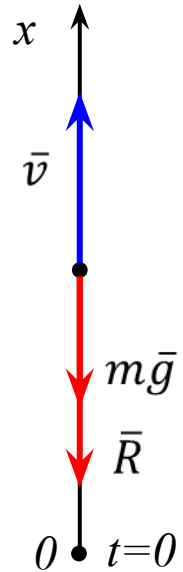
$$x(t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 g} \ln(ch kgt) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 g} \ln \left( 1 + \frac{(kgt)^2}{2!} \right) = \frac{gt^2}{2}$$

# Динамика точки в инерциальной системе отсчета.



На какую высоту  $H$  и за какое время  $T$  поднимется тело массы  $m$ , брошенное вертикально вверх со скоростью  $v_0$ , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой  $R = k^2 m g v^2$ , где  $v$  – величина скорости тела.

**Решение.**



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}$$

$$x: m\ddot{x} = -mg - R = -mg - k^2 m g v^2$$

$$\ddot{x} = -g(1 + k^2 \dot{x}^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2 v^2); \quad \frac{dv \cdot k}{1 + k^2 v^2} = -g dt \cdot k$$

$$\arctg kv = -kgt + C_1 \quad \text{Н.У.:} \quad t = 0, v = v_0$$

$$\arctg kv_0 = C_1$$

$$\arctg kv = \arctg kv_0 - kgt$$

При достижении точки максимальной высоты, ее скорость обратится в ноль.

$$v = 0 \Rightarrow \arctg kv_0 = kgT; \quad T = \frac{\arctg kv_0}{kg}$$

При отсутствии сопротивления воздуха:

$$T = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\arctg kv_0}{kg} = \frac{v_0}{g}$$

Для нахождения высоты подъема точки, найдем зависимость ее скорости от координаты.

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2 v^2);$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} \stackrel{v}{=} \frac{v dv}{dx} = \frac{dv^2}{2dx}$$

$$\frac{dv^2}{2dx} = -g(1 + k^2 v^2); \quad \frac{dv^2 \cdot k^2}{(1 + k^2 v^2)} = -2g dx \cdot k^2$$

$$\ln(1 + k^2 v^2) = -2g x k^2 + C_2 \quad \text{Н.У.:} \quad t = 0, x = 0, v = v_0$$

$$C_2 = \ln(1 + k^2 v_0^2); \quad x = \frac{1}{2gk^2} \ln \frac{1 + k^2 v_0^2}{1 + k^2 v^2}; \quad H = \frac{1}{2gk^2} \ln(1 + k^2 v_0^2)$$

При отсутствии сопротивления воздуха:

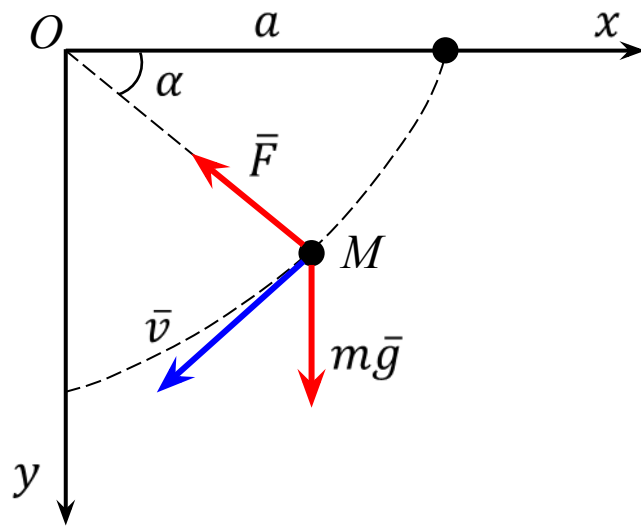
$$H = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2gk^2} \ln(1 + k^2 v_0^2) = \frac{v_0^2}{2g}$$

# Динамика точки в инерциальной системе отсчета.



Определить движение материальной точки массы  $m$ , притягиваемой к неподвижному центру  $O$  силой, прямо пропорциональной расстоянию. Точка расположена в вертикальной плоскости, движение происходит в пустоте, сила притяжения на единице расстояния равна  $k^2m$ . В момент времени  $t=0$ :  $x = a, \dot{x} = 0, y = 0, \dot{y} = 0$ , причем ось  $Oy$  направлена по вертикали вниз.

**Решение.**



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}$$

$$x: m\ddot{x} = -F\cos\alpha = -k^2mOM\cos\alpha = -k^2mx$$

$$y: m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha = mg = -k^2my$$

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

$$\ddot{y} + k^2y = g$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm ik.$$

$$x(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt$$

Н.У.:  $x(0) = a; \dot{x}(0) = 0;$

$$a = C_1;$$

$$\dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt; \quad C_2 = 0.$$

$$x(t) = a\cos kt$$

$$\ddot{y} + k^2 y = g$$

$$y_{\text{OH}} = y_{\text{OO}} + y_{\text{CH}}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm ik.$$

$$y_{\text{OO}} = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt$$

$$y_{\text{CH}} = A$$

$$k^2 A = g \Rightarrow A = \frac{g}{k^2}$$

$$y_{\text{OH}} = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{g}{k^2}$$

Н.У.:  $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

$$C_3 = -\frac{g}{k^2}$$

$$\dot{y} = -kC_3 \sin kt + kC_4 \cos kt; \quad C_4 = 0.$$

$$y(t) = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt)$$

Уравнения движения точки:

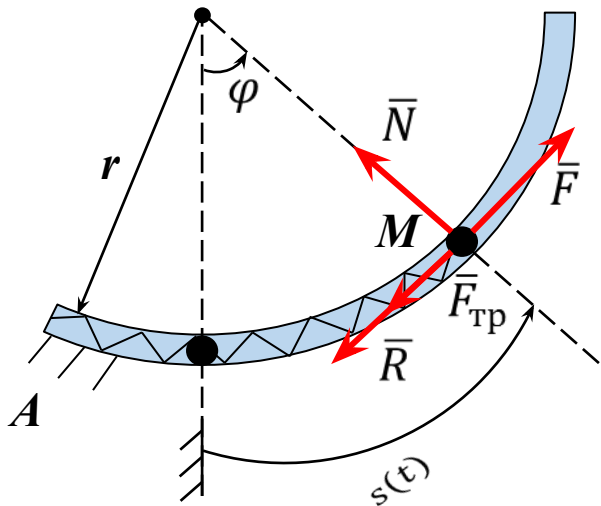
$$\begin{cases} x(t) = a \cos kt \\ y(t) = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt) \end{cases}$$

Уравнение траектории:

$$y(x) = \frac{g}{k^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right); \quad -a \leq x \leq a.$$

Материальная точка  $M$  массы  $m$  движется в вертикальной плоскости по круговой направляющей радиуса  $r$  под действием силы  $F = F_0 \left[ 1 - \frac{3\varphi}{\pi} \right]$ , создаваемой предварительно сжатой пружиной, силы трения скольжения и силы сопротивления, модуль которой  $R = \mu v^2$  ( $\mu = const > 0, v$  – скорость точки). Коэффициент трения скольжения между точкой и направляющей равен  $f$ . Найти зависимость между силой нормального давления материальной точки на направляющую и углом  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ ), если в начальный момент времени точка  $M$  находилась в точке  $A$  направляющей и ее скорость была равна нулю. При решении задачи силой тяжести пренебречь, а также полагать, что  $\frac{\mu r}{m} = f$ .

**Решение:**  $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{N}$



$$t: m\ddot{s} = F - R - F_{\text{тр}}$$

$$n: \frac{m\dot{s}^2}{r} = N$$

$$F_{\text{тр}} = fN$$

$$m\ddot{s} = F_0 \left[ 1 - \frac{3\varphi}{\pi} \right] - \mu\dot{s}^2 - f \frac{m\dot{s}^2}{r}$$

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m} \left[ 1 - \frac{3\varphi}{\pi} \right] - \dot{s}^2 \left( \frac{\mu}{m} - \frac{f}{r} \right); \quad s = r\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_0}{mr} \left[ 1 - \frac{3\varphi}{\pi} \right] - \dot{\varphi}^2 \left( \frac{\mu r}{m} - f \right);$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_0}{mr} \left[ 1 - 3\varphi/\pi \right] - 2f\dot{\varphi}^2$$

Сделаем замену переменных:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi}$$

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi} = \frac{F_0}{mr} \left[ 1 - 3\varphi/\pi \right] - 2f\dot{\varphi}^2. \quad \text{Обозначим: } \dot{\varphi}^2 = u, \quad \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = u', \quad \text{тогда:}$$

$$u' = \frac{2F_0}{mr} \left[ 1 - 3\varphi/\pi \right] - 4fu; \quad u' + 4fu = \frac{2F_0}{mr} \left[ 1 - 3\varphi/\pi \right].$$

$$u_{\text{OH}} = u_{\text{OO}} + u_{\text{CH}}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda + 4f = 0; \quad \lambda = -4f.$$

$$u_{\text{OO}} = Ce^{-4f\varphi}$$



$$u_{\text{чн}} = A + B\varphi$$

Подставляем это решение в уравнение:  $u' + 4fu = \frac{2F_0}{mr} \left[ 1 - \frac{3\varphi}{\pi} \right].$

$$B + 4fA + 4f\varphi B = \frac{2F_0}{mr} - \frac{6F_0\varphi}{mr\pi}$$

$$B + 4fA = \frac{2F_0}{mr}$$

$$4f\varphi B = -\frac{6F_0\varphi}{mr\pi} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{3F_0}{2fmr\pi}$$

$$A = \frac{F_0}{2fmr} - \frac{B}{4f} = \frac{F_0}{2fmr} + \frac{3F_0\varphi}{8f^2mr\pi} = \frac{F_0}{2fmr} \left[ 1 + \frac{3}{4f\pi} \right]$$

$$u(\varphi) = Ce^{-4f\varphi} + A + B\varphi$$

$$\text{Н.У.: } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C + A \Rightarrow C = -A$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{F_0}{2fmr} \left[ 1 + \frac{3}{4f\pi} \right] (1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2fmr\pi} \varphi$$

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{F_0}{2fmr} \left[ 1 + \frac{3}{4f\pi} \right] (1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2fmr\pi} \varphi$$

Из уравнения проекции на нормаль:

$$n: \frac{m\dot{s}^2}{r} = N$$

$$N(\varphi) = mr\dot{\varphi}^2 = \frac{F_0}{2f} \left[ 1 + \frac{3}{4f\pi} \right] (1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2f\pi} \varphi$$