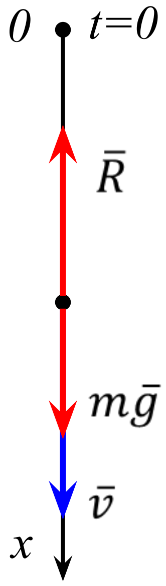
Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

Тело массы m падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2 m g v^2$, где v – величина скорости тела. Определить предельное значение скорости тела, зависимость скорости тела от времени, и закон его движения.

Решение.



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}$$

$$x: \quad m\ddot{x} = mg - R = mg - k^2 m g v^2$$

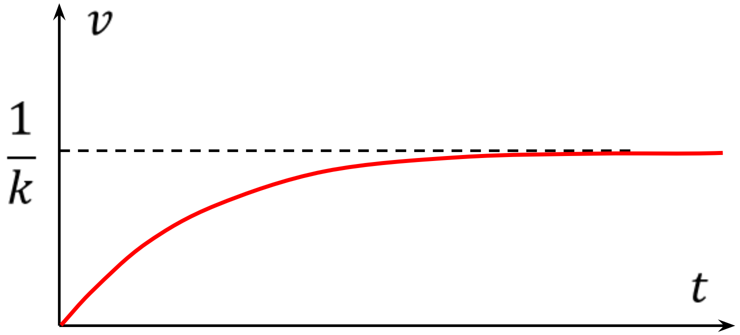
$$\ddot{x} = g(1 - k^2 \dot{x}^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - k^2 v^2); \qquad \frac{dv \cdot k}{1 - k^2 v^2} = g dt \cdot k$$

$$\frac{1}{2} ln \left|\frac{1 + kv}{1 - kv}\right| = kgt + C_1$$

<u>Н.У.:</u> $t = 0, v = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$

$$\frac{1 + kv}{1 - kv} = e^{2kgt} \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{1}{k}\frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}} = \frac{1}{k}\frac{sh\, kgt}{ch\, kgt} = \frac{1}{k} th\, kgt$$



Предельное значение скорости: $v_\infty = \frac{1}{k}$

При отсутствии сопротивления воздуха:

$$v(t) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} th\, kgt = gt$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

Определим закон движения точки.

$$v(t) = \frac{1}{k} th\, kgt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\frac{sh\, kgt}{ch\, kgt}; \qquad dx = \frac{1}{k}\frac{sh\, kgt\, dt}{ch\, kgt} \cdot \frac{kg}{kg} = \frac{1}{k^2 g}\frac{d(ch\, kgt)}{ch\, kgt}$$

$$x = \frac{1}{k^2 g}\ln(ch\, kgt) + C_2;$$ <u>Н.У.:</u> $$t = 0, x = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{k^2 g}\ln(ch\, kgt)$$

При отсутствии сопротивления воздуха:

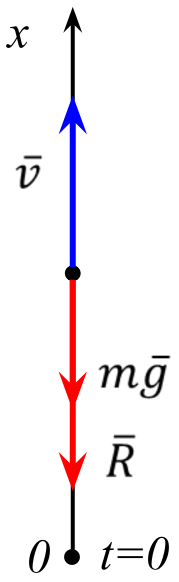
$$ch\,\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots$$

$$x(t) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2 g}\ln(ch\, kgt) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2 g}\ln\left(1 + \frac{(kgt)^2}{2!}\right) = \frac{gt^2}{2}$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

На какую высоту H и за какое время T поднимется тело массы m, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $R = k^2 mgv^2$, где v – величина скорости тела.

Решение.



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}$$

$$x:\quad m\ddot{x} = -mg - R = -mg - k^2 mgv^2$$

$$\ddot{x} = -g(1 + k^2\dot{x}^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2v^2);\quad \frac{dv \cdot k}{1 + k^2v^2} = -gdt \cdot k$$

$$arctg\, kv = -kgt + C_1$$

<u>Н.У.:</u> $t = 0, v = v_0$

$$arctg\, kv_0 = C_1$$

$$arctg\, kv = arctg\, kv_0 - kgt$$

При достижении точкой максимальной высоты, ее скорость обратится в ноль.

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad arctg\, kv_0 = kgT; \quad T = \frac{arctg\, kv_0}{kg}$$

При отсутствии сопротивления воздуха:

$$T = \lim_{k \to 0} \frac{arctg\, kv_0}{kg} = \frac{v_0}{g}$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

Для нахождения высоты подъема точки, найдем зависимость ее скорости от координаты.

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2v^2);$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} \overset{v}{=} \frac{vdv}{dx} = \frac{dv^2}{2dx}$$

$$\frac{dv^2}{2dx} = -g(1 + k^2v^2); \qquad \frac{dv^2 \cdot k^2}{(1 + k^2v^2)} = -2gdx \cdot k^2$$

$$ln(1 + k^2v^2) = -2gxk^2 + C_2$$

<u>Н.У.:</u> $t = 0, x = 0, v = v_0$

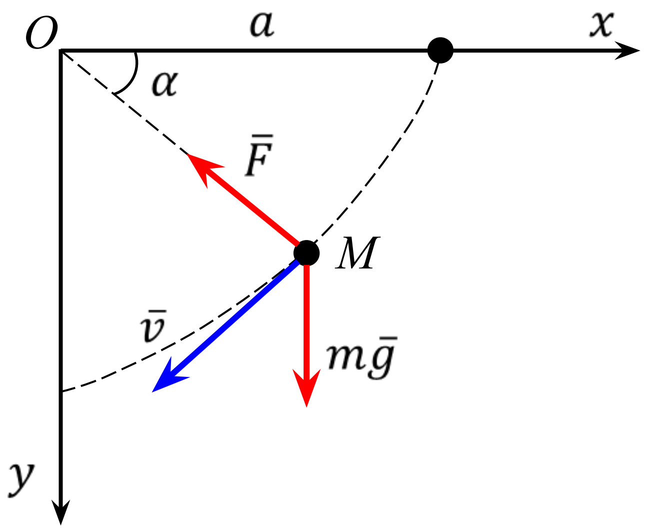
$$C_2 = ln(1 + k^2{v_0}^2); \qquad x = \frac{1}{2gk^2} ln\frac{1 + k^2{v_0}^2}{1 + k^2v^2}; \qquad H = \frac{1}{2gk^2}\ln(1 + k^2{v_0}^2)$$

При отсутствии сопротивления воздуха: $H = \lim\limits_{k \to 0} \frac{1}{2gk^2}\ln(1 + k^2{v_0}^2) = \frac{{v_0}^2}{2g}$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

Определить движение материальной точки массы m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Точка расположена в вертикальной плоскости, движение происходит в пустоте, сила притяжения на единице расстояния равна $k^2 m$. В момент времени $t=0$: $x = a, \dot{x} = 0, y = 0,\ \dot{y} = 0$, причем ось Oy направлена по вертикали вниз.

Решение.



$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}$$

$$x:\quad m\ddot{x} = -F\cos\alpha = -k^2 mOM\cos\alpha = -k^2 mx$$

$$y:\quad m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha = mg = -k^2 my$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + k^2 y = g$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0; \qquad \lambda_{1,2} = \pm ik.$$

$$x(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt$$

Н.У.: $\quad x(0) = a;\ \dot{x}(0) = 0\,; \qquad a = C_1;$

$$\dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt; \qquad C_2 = 0.$$

$$x(t) = a\cos kt$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

$$\ddot{y} + k^2 y = g$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0; \qquad \lambda_{1,2} = \pm ik.$$

$$y_{oo} = C_3 coskt + C_4 sinkt$$

$$y_{чн} = A$$

$$k^2 A = g \quad \Rightarrow \quad A = \frac{g}{k^2}$$

$$y_{он} = C_3 coskt + C_4 sinkt + \frac{g}{k^2}$$

Н.У.: $\quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

$$C_3 = -\frac{g}{k^2}$$

$$\dot{y} = -kC_3 sinkt + kC_4 coskt; \qquad C_4 = 0.$$

$$y(t) = \frac{g}{k^2}(1 - coskt)$$

Уравнения движения точки:

$$\begin{cases} x(t) = acoskt \\ y(t) = \dfrac{g}{k^2}(1 - coskt) \end{cases}$$

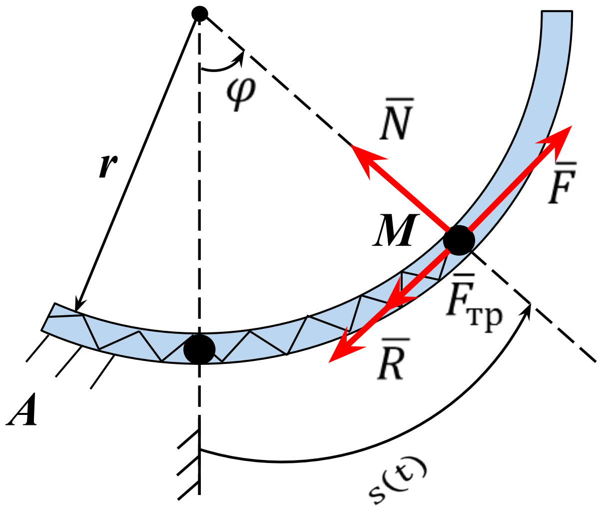
Уравнение траектории:

$$y(x) = \frac{g}{k^2}\left(1 - \frac{x}{a}\right); \qquad -a \le x \le a.$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

Материальная точка $\boldsymbol{M}$ массы m движется в вертикальной плоскости по круговой направляющей радиуса r под действием силы $F = F_0\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right]$, создаваемой предварительно сжатой пружиной, силы трения скольжения и силы сопротивления, модуль которой $R = \mu v^2$ ($\mu = const > 0, v -$ скорость точки). Коэффициент трения скольжения между точкой и направляющей равен f. Найти зависимость между силой нормального давления материальной точки на направляющую и углом φ $(0 \le \varphi \le {}^{\pi}/_{3})$, если в начальный момент времени точка $\boldsymbol{M}$ находилась в точке $\boldsymbol{A}$ направляющей и ее скорость была равна нулю.

При решении задачи силой тяжести пренебречь, а также полагать, что $\dfrac{\mu r}{m} = f$.



Решение:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{N}$$

$$\tau:\quad m\ddot{s} = F - R - F_{\text{тр}}$$

$$n:\quad \frac{m\dot{s}^2}{r} = N$$

$$F_{\text{тр}} = fN$$

$$m\ddot{s} = F_0\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - \mu\dot{s}^2 - f\frac{m\dot{s}^2}{r}$$

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - \dot{s}^2\left(\frac{\mu}{m} - \frac{f}{r}\right); \quad s = r\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - \dot{\varphi}^2\left(\frac{\mu r}{m} - f\right);$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - 2f\dot{\varphi}^2$$

Сделаем замену переменных:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi}$$

$\frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi} = \frac{F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - 2f\dot{\varphi}^2.$ Обозначим: $\dot{\varphi}^2 = u,\ \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = u',$ тогда:

$$u' = \frac{2F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right] - 4fu; \qquad u' + 4fu = \frac{2F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right].$$

$$u_{\text{он}} = u_{\text{оо}} + u_{\text{чн}}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda + 4f = 0; \qquad \lambda = -4f.$$

$$u_{\text{оо}} = Ce^{-4f\varphi}$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

$$u_{\text{чн}} = A + B\varphi$$

Подставляем это решение в уравнение: $u' + 4fu = \frac{2F_0}{mr}\left[1 - {}^{3\varphi}/_{\pi}\right].$

$$B + 4fA + 4f\varphi B = \frac{2F_0}{mr} - \frac{6F_0\varphi}{mr\pi}$$

$$B + 4fA = \frac{2F_0}{mr}$$

$$4f\varphi B = -\frac{6F_0\varphi}{mr\pi} \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{3F_0}{2fmr\pi}$$

$$\text{A} = \frac{F_0}{2fmr} - \frac{B}{4f} = \frac{F_0}{2fmr} + \frac{3F_0\varphi}{8f^2mr\pi} = \frac{F_0}{2fmr}\left[1 + \frac{3}{4f\pi}\right]$$

$$u(\varphi) = Ce^{-4f\varphi} + A + B\varphi$$

Н.У.: $t = 0 \quad \varphi = 0, \qquad \dot{\varphi} = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \qquad \Rightarrow \;\; 0 = C + A \;\Rightarrow\; C = -A$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{F_0}{2fmr}\left[1 + \frac{3}{4f\pi}\right](1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2fmr\pi}\varphi$$

Динамика точки в инерциальной системе отсчета.

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{F_0}{2fmr}\left[1 + \frac{3}{4f\pi}\right](1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2fmr\pi}\varphi$$

Из уравнения проекции на нормаль:

$$n: \quad \frac{m\dot{s}^2}{r} = N$$

$$N(\varphi) = mr\dot{\varphi}^2 = \frac{F_0}{2f}\left[1 + \frac{3}{4f\pi}\right](1 - e^{-4f\varphi}) - \frac{3F_0}{2f\pi}\varphi$$