

# Функция. Основные понятия.

- Понятие функции
- Основные характеристики функции
- Основные элементарные функции
- Сложная функция
- Элементарные функции
- Алгебраические и трансцендентные функции
- Предел переменной величины

# Понятие функции

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

Так, например, известно, что площадь круга выражается через радиус формулой  $S = \pi r^2$ .

Если радиус  $r$  принимает различные числовые значения, то площадь  $S$  также принимает различные числовые значения, т.е. изменение одной переменной влечет изменение другой.

Если каждому значению переменной  $x$ , принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной  $y$ , то  $y$  есть функция от  $x$ .

$$y = f(x)$$

зависимая переменная  
или **функция**

независимая переменная  
или **аргумент**

# Понятие функции

Совокупность значений  $x$ , для которых определяются значения  $y$  в силу правила  $f(x)$  называется **областью определения** (областью существования) функции:  $D(f)$

Совокупность значений  $y$  называется **множеством значений** функции:  $E(f)$

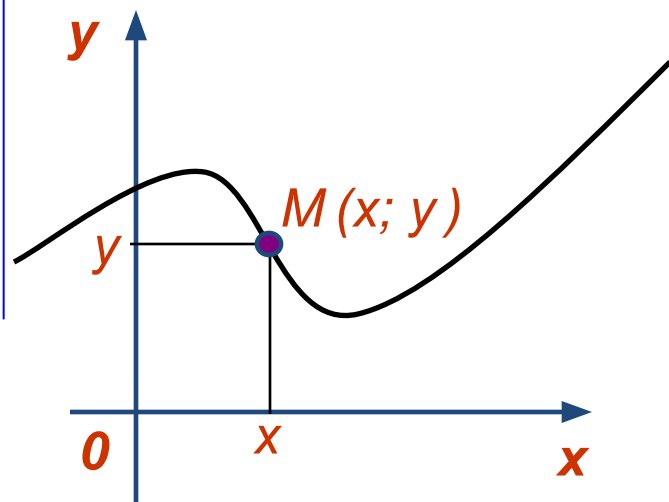
## Способы задания функции:

- 1) *Табличный.* При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента и соответствующие им значения функции.

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

# Понятие функции

## 2) Графический.



Совокупность точек плоскости  $ХОУ$ , абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется графиком функции  $y = f(x)$ .

## 3) Аналитический:

Функция  $y = f(x)$  задана аналитически, если  $f$  — обозначает действия, выполняемые над переменной, например:

$$y = x^2 + 5$$

# Основные характеристики функции

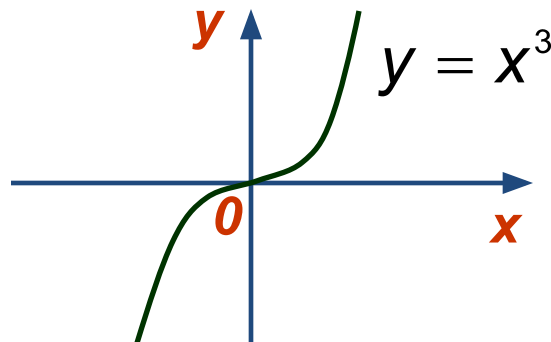
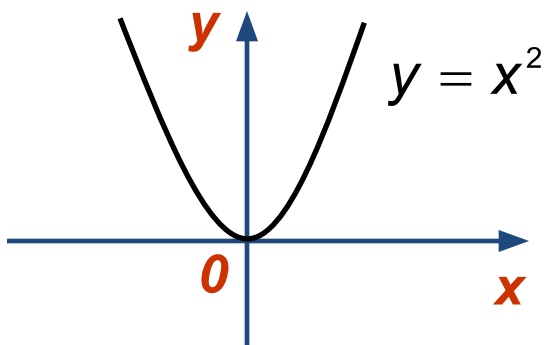
Функция  $y = f(x)$  определенная на множестве  $D$ , называется **четной**, если для любого  $x$ , принадлежащего  $D$  выполняются условия:  $-x$  также принадлежит  $D$  и  $f(-x) = f(x)$ .

$$\forall x \in D : \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Функция  $y = f(x)$  определенная на множестве  $D$ , называется **нечетной**, если:  $\forall x \in D : \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

График четной функции симметричен относительно оси  $OY$

График нечетной функции симметричен относительно точки  $O(0; 0)$



# Основные характеристики функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $D$  и пусть  $D_1 \subset D$  (множество  $D_1$  является подмножеством множества  $D$ )

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

то функция называется **возрастающей**.

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

то функция называется **убывающей**.

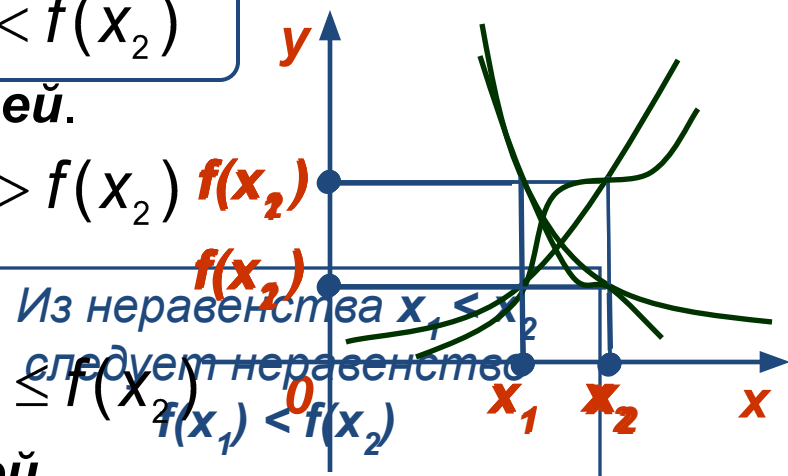
Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

то функция называется **неубывающей**.

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

то функция называется **невозрастающей**.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются **монотонными** на множестве  $D_1$ , интервал, на котором функция монотонна называется **интервалом монотонности**.



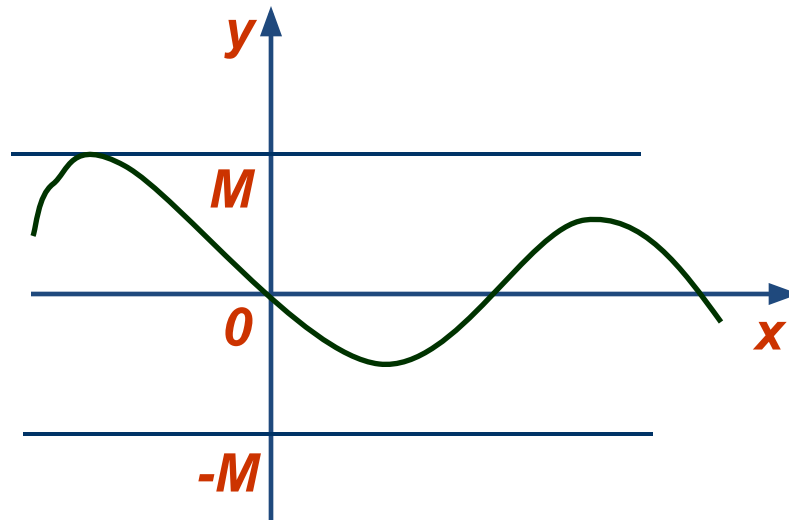
# Основные характеристики функции

Функция  $y = f(x)$  определенная на множестве  $D$ , называется **ограниченной**, если

$$\boxed{\exists M} > 0 : \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

Существует такое число  $M$

График ограниченной функции лежит между прямыми:  
 $y = -M$  и  $y = M$ .



# Основные характеристики функции

Функция  $y = f(x)$  определенная на множестве  $D$ , называется *периодической*, если

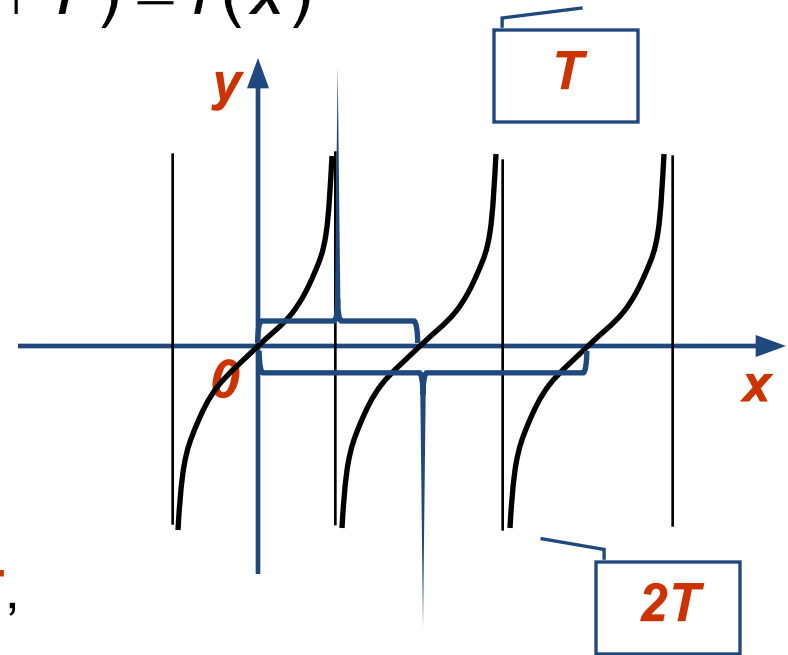
$$\exists T > 0 : \forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} x + T \in D \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

Число  $T$  называется *периодом* функции.

Если  $T$  – период функции, то ее периодами будут также числа  $2T$ ,  $3T$  и так далее.

Наименьшее положительное число  $T$ , удовлетворяющее условию:

$f(x + T) = f(x)$ , называется *основным периодом*





# Основные элементарные функции

1) Линейная функция:  $y = kx + b$

2) Степенная функция:

$$y = x^n$$

3) Показательная функция:

$$y = a^x \quad a > 0; a \neq 1$$

4) Логарифмическая функция:

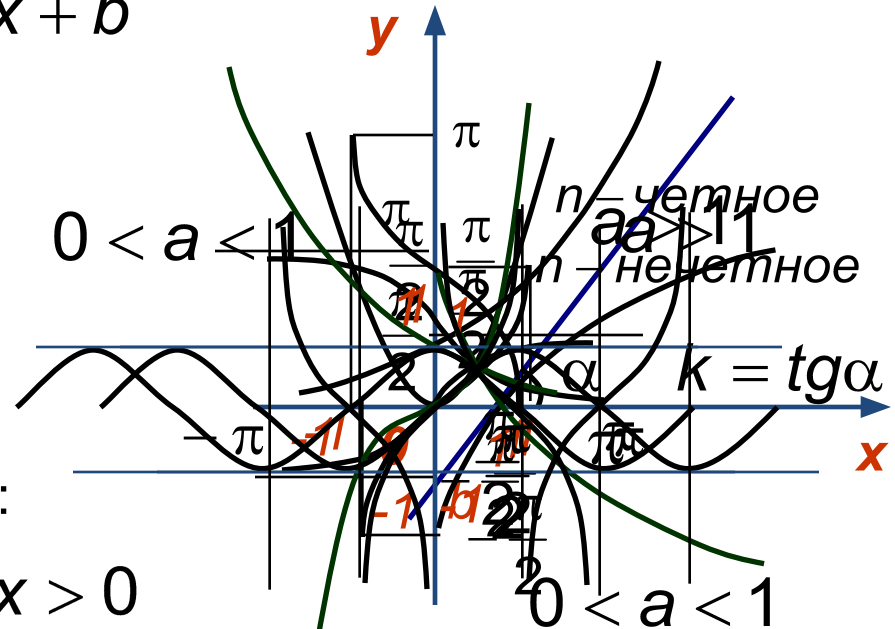
$$y = \log_a x \quad a > 0; a \neq 1; x > 0$$

5) Тригонометрические функции:  $y = \sin x$      $y = \cos x$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y = \operatorname{ctg} x$$

6) Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x \quad y = \arccos x \quad y = \operatorname{arctg} x \quad y = \operatorname{arcctg} x$$



# Сложная функция

Если  $y$  является функцией от  $u$ , а  $u$  в свою очередь зависит от переменной  $x$ , то  $y$  также зависит от  $x$ .

$$y = F(\varphi(x)) \quad u = \varphi(x)$$

Сложная функция

**Пример:**

$$\left. \begin{array}{l} y = \cos u \\ u = \sqrt{x} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \cos \sqrt{x}$$

Областью определения функции  $y = F(\varphi(x))$  является или вся область определения функции  $u(x)$  или та ее часть, в которой определяются значения  $u$ , не выходящие из области определения функции  $F(u)$ .

**Пример:**

$$y = \sqrt{\log_2 x} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow x \geq 1$$

# Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида  $y = f(x)$ , где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Пример:

$$y = \frac{\lg x + 4 \cdot (\cos x)^2 - 5}{10^x - x}$$

# Алгебраические и трансцендентные функции

К числу **алгебраических** функций относятся элементарные функции следующего вида:

1) Целая рациональная функция или многочлен:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

2) Дробная рациональная функция – отношение многочленов:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

коэффициенты Целое неотрицательное  
многочлена число – степень  
постоянные числа многочлена

3) Иррациональная функция:

Если в формуле  $y = f(x)$  в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция  $y = f(x)$  называется **иррациональной**

Пример:  $y = \sqrt{x} + 5 \sqrt[3]{x^4} - 2$

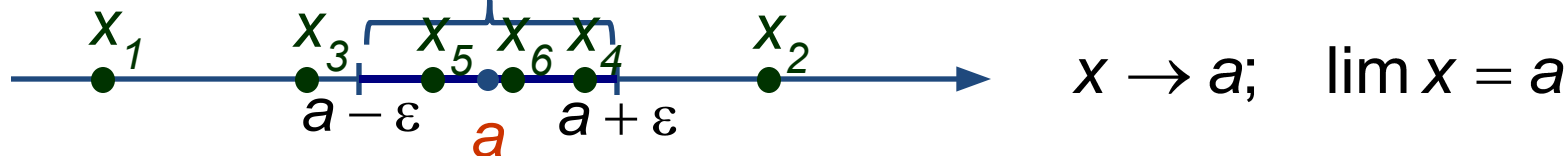
Функция, не являющейся алгебраической, называется **трансцендентной**:  $y = \cos x$ ;  $y = \ln x$  и так далее.

# Предел переменной величины

Постоянное число  $a$  называется **пределом** переменной величины  $x$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  можно указать такое значение переменной  $x$ , что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству:

$$|x - a| < \varepsilon$$

$\varepsilon$  окрестность точки  $a$



**Пример:** Пусть переменная величина изменяется по закону:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{Тогда:} \quad x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1.33 \quad x_4 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25 \quad x_5 = 1 + \frac{1}{5} = 1.2$$

# Предел переменной величины

Очевидно, что переменная величина имеет предел, равный единице, то есть  $a = 1$ .

$$\left| x_n - 1 \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Для любого  $\varepsilon$  все последующие значения переменной, начиная с номера  $n$ , где:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{попадают в } \varepsilon \text{ окрестность точки } a.$$

$$\text{Пусть, например } \varepsilon = 0.2 \quad n > \frac{1}{0.2} \Rightarrow n > 5$$

Таким образом, начиная с  $x_6$  все значения переменной величины находятся в  $\varepsilon$  окрестности точки  $a$ .

