

Функция. Основные понятия.

- Понятие функции
- Основные характеристики функции
- Основные элементарные функции
- Сложная функция
- Элементарные функции
- Алгебраические и трансцендентные функции
- Предел переменной величины

Понятие функции

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

Так, например, известно, что площадь круга выражается через радиус формулой $S = \pi r^2$.

Если радиус r принимает различные числовые значения, то площадь S также принимает различные числовые значения, т.е. изменение одной переменной влечет изменение другой.

Если каждому значению переменной x , принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y , то y есть функция от x .

$$y = f(x)$$

зависимая переменная
или **функция**

независимая переменная
или **аргумент**

Понятие функции

Совокупность значений x , для которых определяются значения y в силу правила $f(x)$ называется **областью определения** (областью существования) функции: $D(f)$

Совокупность значений y называется **множеством значений** функции: $E(f)$

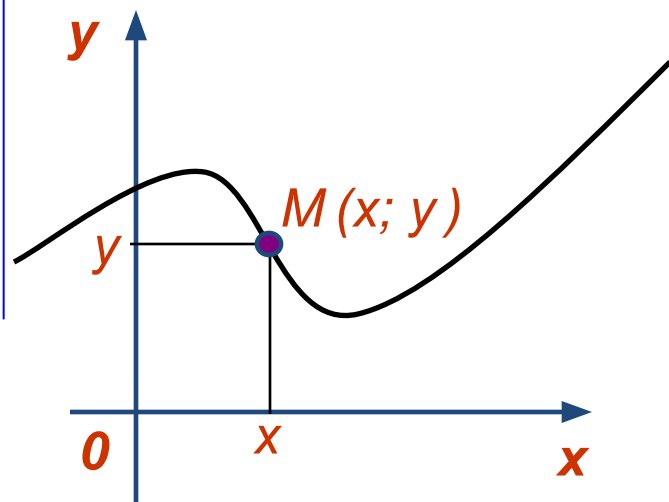
Способы задания функции:

- 1) *Табличный.* При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Понятие функции

2) Графический.



Совокупность точек плоскости $ХОУ$, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется графиком функции $y = f(x)$.

3) Аналитический:

Функция $y = f(x)$ задана аналитически, если f — обозначает действия, выполняемые над переменной, например:

$$y = x^2 + 5$$

Основные характеристики функции

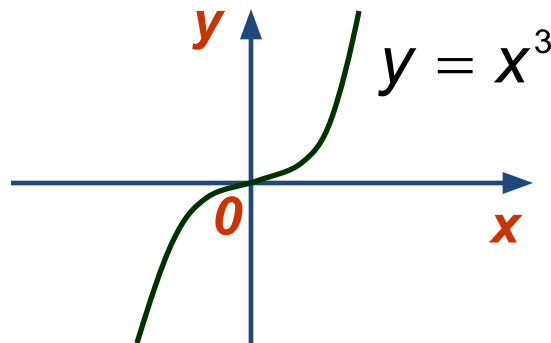
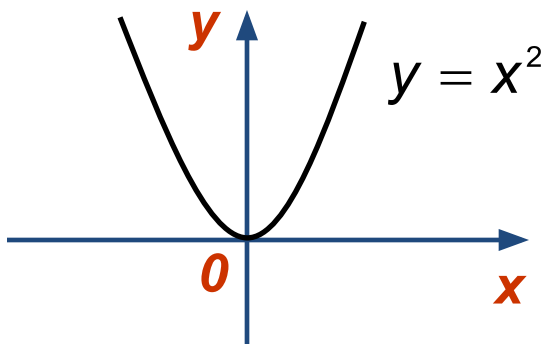
Функция $y = f(x)$ определенная на множестве D , называется **четной**, если для любого x , принадлежащего D выполняются условия: $-x$ также принадлежит D и $f(-x) = f(x)$.

$$\forall x \in D: \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Функция $y = f(x)$ определенная на множестве D , называется **нечетной**, если: $\forall x \in D: \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

График четной функции симметричен относительно оси OY

График нечетной функции симметричен относительно точки $O(0; 0)$



Основные характеристики функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$ (множество D_1 является подмножеством множества D)

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

то функция называется **возрастающей**.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

то функция называется **убывающей**.

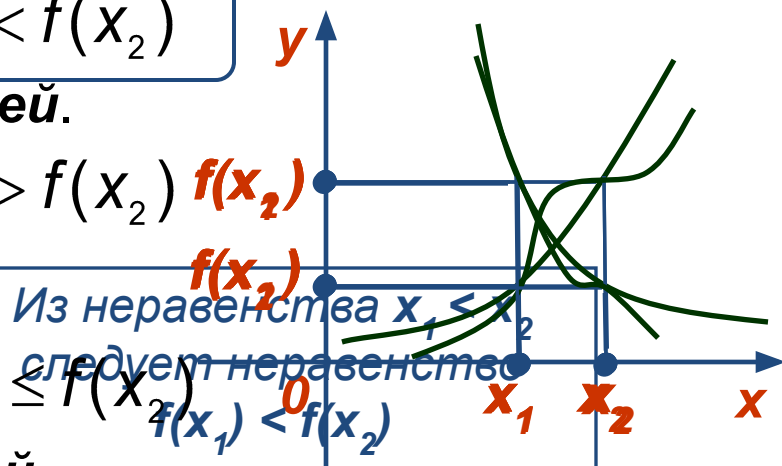
Если $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

то функция называется **неубывающей**.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

то функция называется **невозрастающей**.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются **монотонными** на множестве D_1 , интервал, на котором функция монотонна называется **интервалом монотонности**.



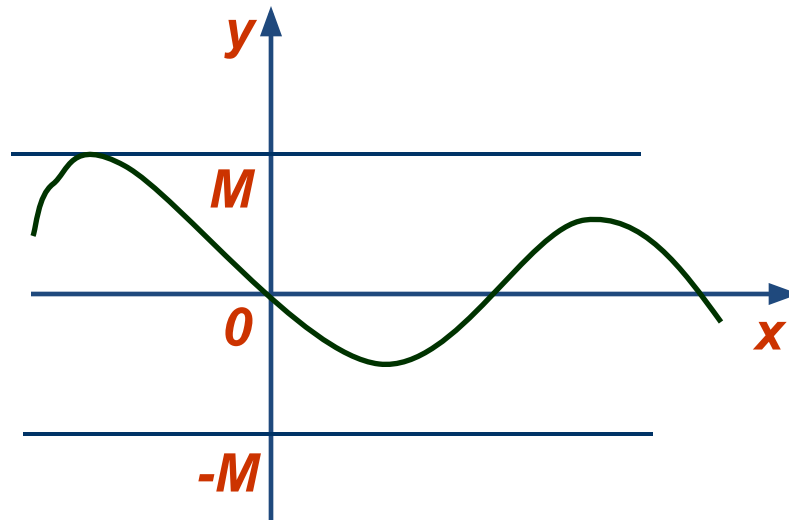
Основные характеристики функции

Функция $y = f(x)$ определенная на множестве D , называется **ограниченной**, если

$$\boxed{\exists M} > 0 : \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

Существует такое число M

График ограниченной функции лежит между прямыми:
 $y = -M$ и $y = M$.



Основные характеристики функции

Функция $y = f(x)$ определенная на множестве D , называется *периодической*, если

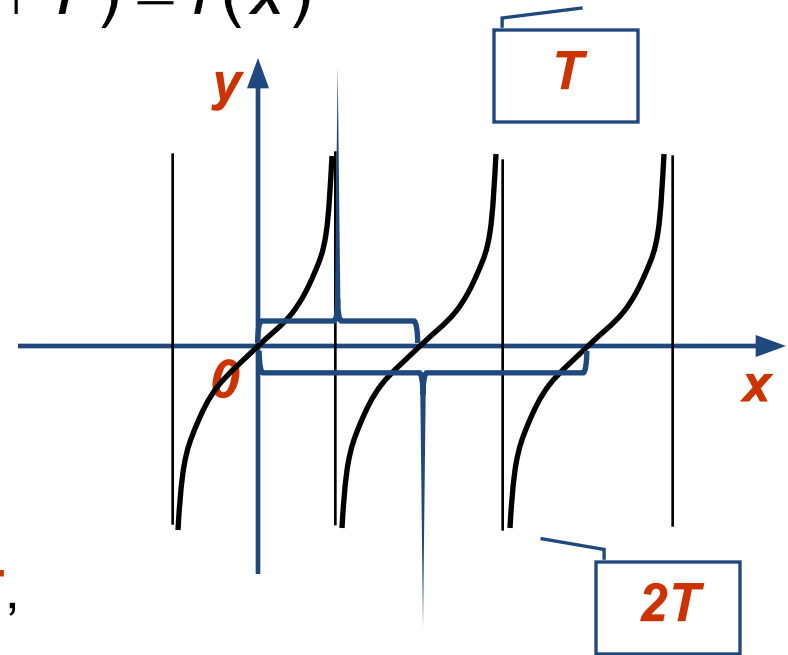
$$\exists T > 0 : \forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} x + T \in D \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

Число T называется *периодом* функции.

Если T – период функции, то ее периодами будут также числа $2T$, $3T$ и так далее.

Наименьшее положительное число T , удовлетворяющее условию:

$f(x + T) = f(x)$, называется *основным периодом*



Основные элементарные функции

1) Линейная функция: $y = kx + b$

2) Степенная функция:

$$y = x^n$$

3) Показательная функция:

$$y = a^x \quad a > 0; a \neq 1$$

4) Логарифмическая функция:

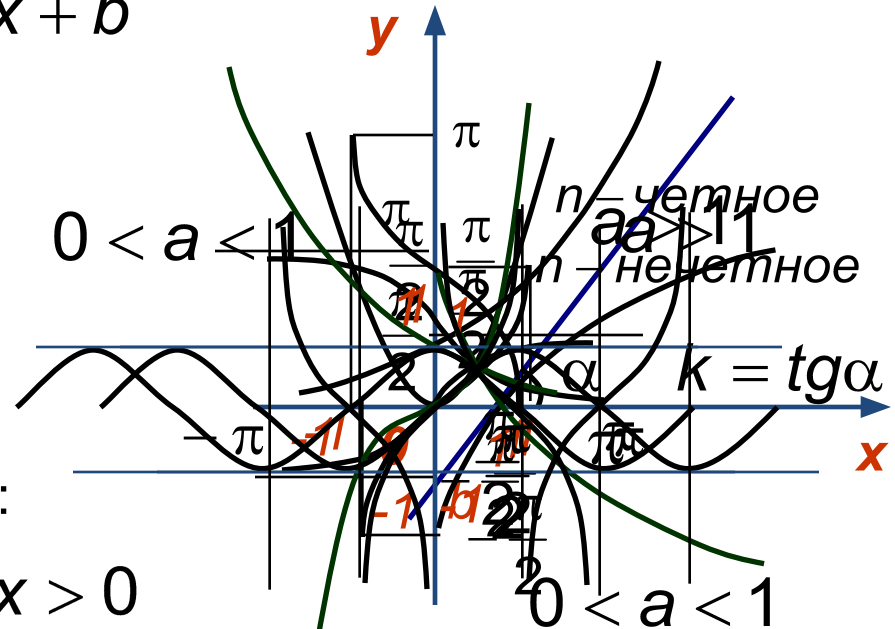
$$y = \log_a x \quad a > 0; a \neq 1; x > 0$$

5) Тригонометрические функции: $y = \sin x$ $y = \cos x$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y = \operatorname{ctg} x$$

6) Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x \quad y = \arccos x \quad y = \operatorname{arctg} x \quad y = \operatorname{arcctg} x$$



Сложная функция

Если y является функцией от u , а u в свою очередь зависит от переменной x , то y также зависит от x .

$$y = F(\varphi(x)) \quad u = \varphi(x)$$

Сложная функция

Пример:

$$\left. \begin{array}{l} y = \cos u \\ u = \sqrt{x} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \cos \sqrt{x}$$

Областью определения функции $y = F(\varphi(x))$ является или вся область определения функции $u(x)$ или та ее часть, в которой определяются значения u , не выходящие из области определения функции $F(u)$.

Пример:

$$y = \sqrt{\log_2 x} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow x \geq 1$$

Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Пример:

$$y = \frac{\lg x + 4 \cdot (\cos x)^2 - 5}{10^x - x}$$

Алгебраические и трансцендентные функции

К числу **алгебраических** функций относятся элементарные функции следующего вида:

1) Целая рациональная функция или многочлен:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

2) Дробная рациональная функция – отношение многочленов:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

коэффициенты
Целое неотрицательное
многочлена
число – степень
постоянные числа
многочлена

3) Иррациональная функция:

Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция $y = f(x)$ называется **иррациональной**

Пример: $y = \sqrt{x} + 5 \sqrt[3]{x^4} - 2$

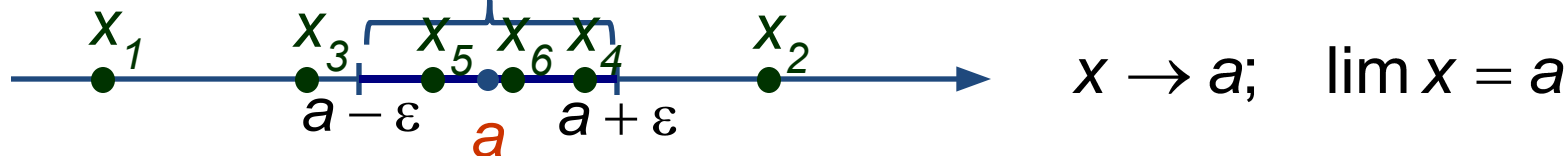
Функция, не являющейся алгебраической, называется **трансцендентной**: $y = \cos x$; $y = \ln x$ и так далее.

Предел переменной величины

Постоянное число a называется **пределом** переменной величины x , если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое значение переменной x , что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству:

$$|x - a| < \varepsilon$$

ε окрестность точки a



Пример: Пусть переменная величина изменяется по закону:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{Тогда:} \quad x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1.33 \quad x_4 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25 \quad x_5 = 1 + \frac{1}{5} = 1.2$$

Предел переменной величины

Очевидно, что переменная величина имеет предел, равный единице, то есть $a = 1$.

$$\left| x_n - 1 \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n , где:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{попадают в } \varepsilon \text{ окрестность точки } a.$$

$$\text{Пусть, например } \varepsilon = 0.2 \quad n > \frac{1}{0.2} \Rightarrow n > 5$$

Таким образом, начиная с x_6 все значения переменной величины находятся в ε окрестности точки a .

