


Оптимизационны е задачи

Лекция + практика

Кузьмишина А.М.

НГТУ им. Р.Е. Алексеева

- Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются оптимизационными.
- Оптимизационные задачи (ОЗ) решаются с помощью оптимизационных моделей (ОМ) методами математического программирования.



Классификация задач оптимизации

Параметрическая (выбор оптимальных параметров объекта/процесса)

Структурная (выбор оптимальной структуры объекта/процесса)

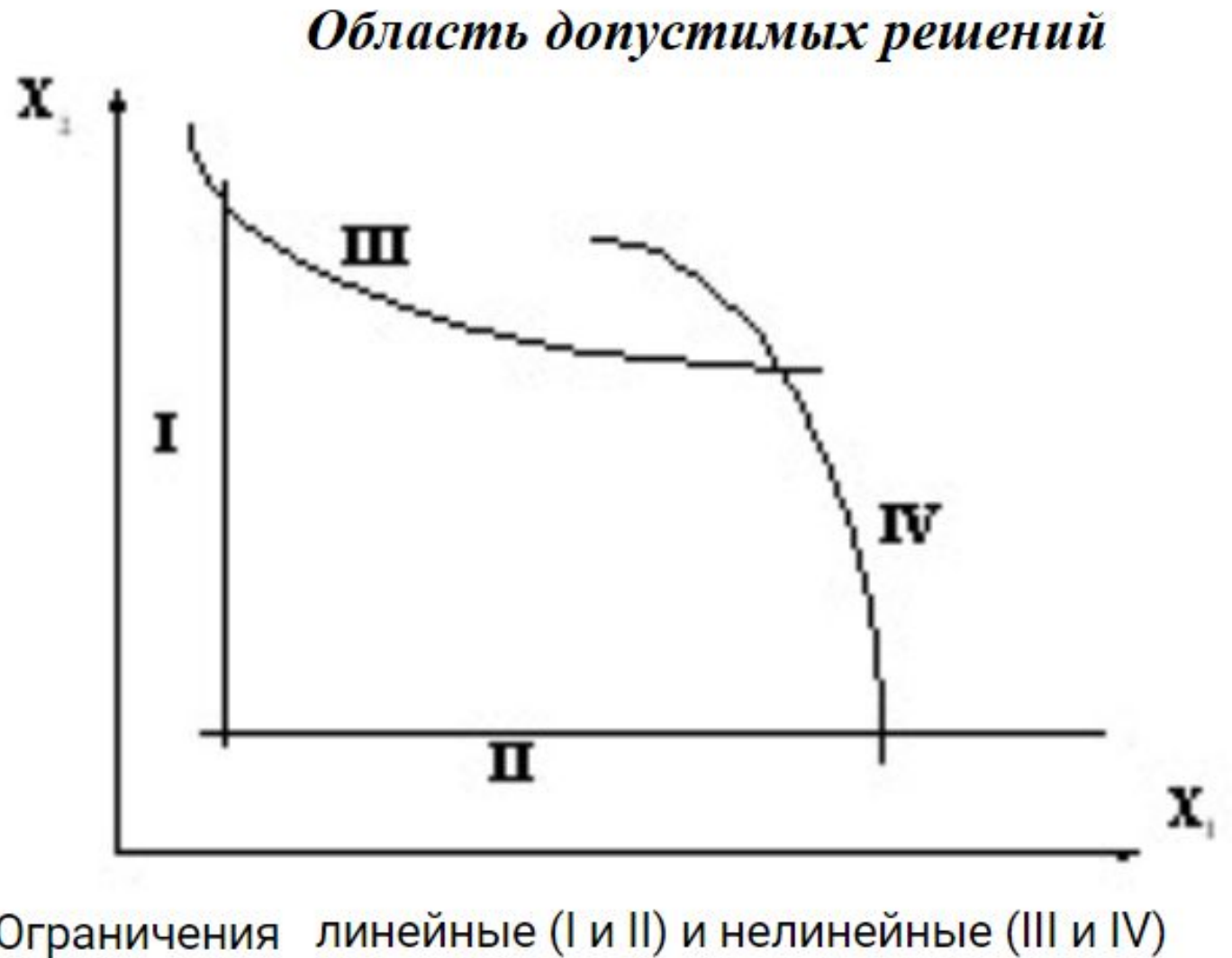
Структурно-параметрическая (выбор оптимальных параметров и структуры объекта/процесса)

* Последний тип задач является самым сложным и требует точного составления оптимизационной модели.

Параметрическая оптимизация

- Постановка задачи:

Требуется найти значения управляемых параметров $x_1, x_2 \dots x_k$ при которых критерий оптимальности $Q = f(x_1, x_2 \dots x_k)$ достигнет \max (\min) значения и будут выполнены прямые и функциональные ограничения



Структура оптимизационной модели

- Целевая функция (критерий оптимальности)

состоит из управляемых переменных;
неуправляемых переменных;
формы функции (вида зависимости между ними).

- Область допустимых решений

область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

В общем виде

$$f(x) \rightarrow \max_x,$$

$$h(x) \leq a,$$

$$g_i(x) \leq b_i, \forall i,$$

$$x \geq 0$$

Конкретная модель

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max_x,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 21,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Постановка задачи оптимизации

а) составить математическую модель объекта оптимизации,

б) выбрать критерий оптимальности и составить целевую функцию,

в) установить возможные ограничения, которые должны накладываться на переменные,

г) выбрать метод оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомым величин.

Задачи оптимизации различают:

- В зависимости от управляемых параметров:
 - одномерная оптимизация (оптимизация 1 параметра),
 - двухмерная/многомерная оптимизация (оптимизация 2 или более переменных).
- В зависимости от критерия оптимальности:
 - однокритериальная (критерий оптимальности = 1),
 - многокритериальная (критериев оптимальности > 1).



Методы решения

методы
исследования
функций
классического
анализа;

методы, основанные
на использовании
неопределенных
множителей
Лагранжа;

вариационное
исчисление;

динамическое
программирование;

принцип максимума;

линейное
программирование;

нелинейное
программирование;

геометрическое
программирование.

Линейное и нелинейное программирование

- Задача **линейного программирования**

(ограничения и целевая функция представляют собой линейные функции, то есть, многочлены первой степени)

- Задача **нелинейного программирования**

(ограничения, либо целевая функция (либо и то, и другое) выражены в нелинейном виде)

**Методы
линейного
программирования**

**(наиболее
распространенны
е)**

Графический метод

(кол-во управляемых параметров 2),

Симплекс-метод

(кол-во управляемых параметров > 2)

Задача двухпараметрической оптимизации

Пример 1

- **Производственная задача**

Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 400 человеко-часов. Прибыль при производстве стула - 45 долларов США, при производстве стола - 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Задача двухпараметрической оптимизации

*В итоге задача в общем виде
выглядит так*

$$45 X_1 + 80 X_2 \rightarrow \max ,$$

$$5 X_1 + 20 X_2 \leq 400 ,$$

$$10 X_1 + 15 X_2 \leq 400 ,$$

$$X_1 \geq 0 ,$$

$$X_2 \geq 0 .$$

- Составим оптимизационную модель в общем виде:

Пусть управляемые параметры (параметры, значения которых требуется оптимизировать) это кол-во изготовленных стульев – X_1 и кол-во изготовленных столов – X_2 .

Критерий оптимальности - прибыль, которая должна быть максимальной, тогда целевая функция будет выглядеть:

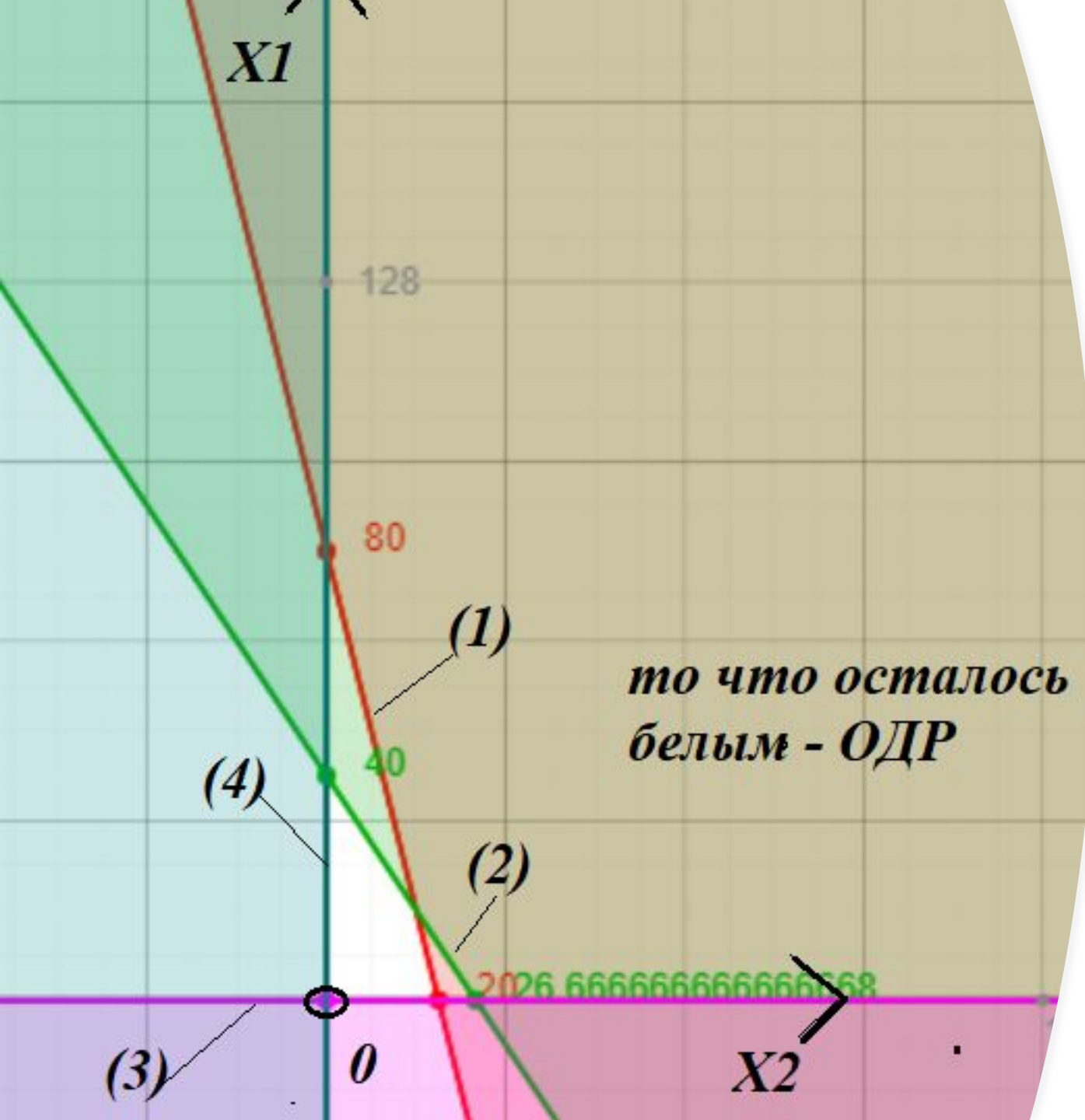
$$45 X_1 + 80 X_2 \rightarrow \max ,$$

Есть ограничения по материалу и человеко-часам, которые можно представить в виде:

$$5 X_1 + 20 X_2 \leq 400 ,$$

$$10 X_1 + 15 X_2 \leq 400 ,$$

Однако, так как управляемые параметры натуральные числа, то они должны быть больше или равны 0.



Задача двухпараметрической оптимизации

- Решим задачу графическим методом:

1 этап – Построение области допустимых решений (ОДР).

ОДР образуется в результате пересечения всех ограничений (в примере их 4), поэтому поочередно построим

$$5 X_1 + 20 X_2 \leq 400, \quad (1)$$

$$10 X_1 + 15 X_2 \leq 400, \quad (2)$$

$$X_1 \geq 0, \quad (3)$$

$$X_2 \geq 0. \quad (4)$$

Построение ограничений

(1) ограничение – это уравнение прямой.

Найдем уравнение прямой с осями координат

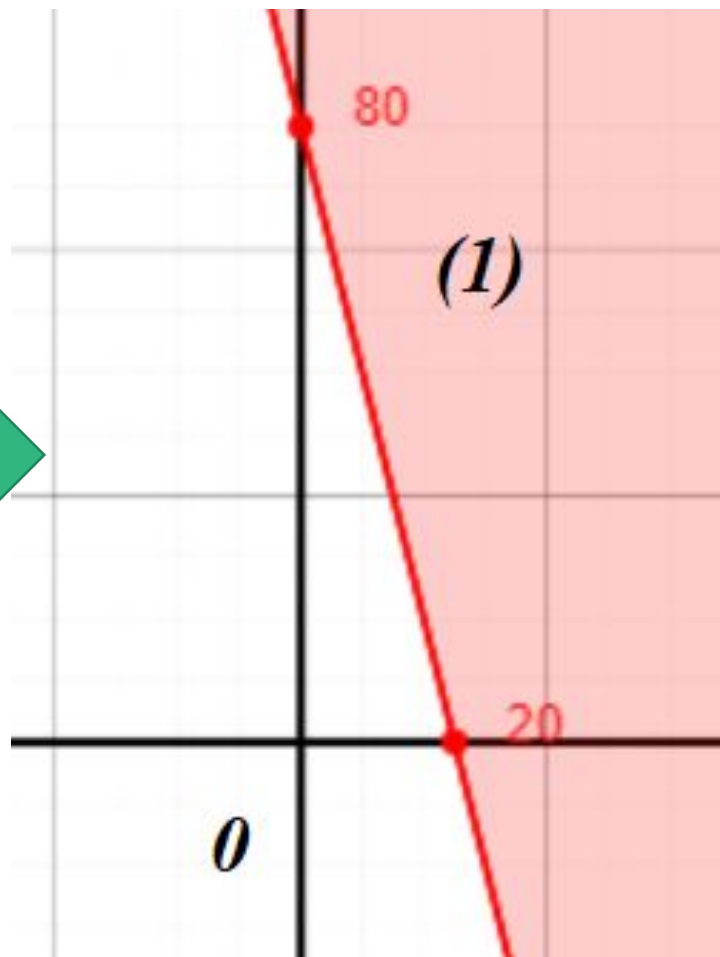
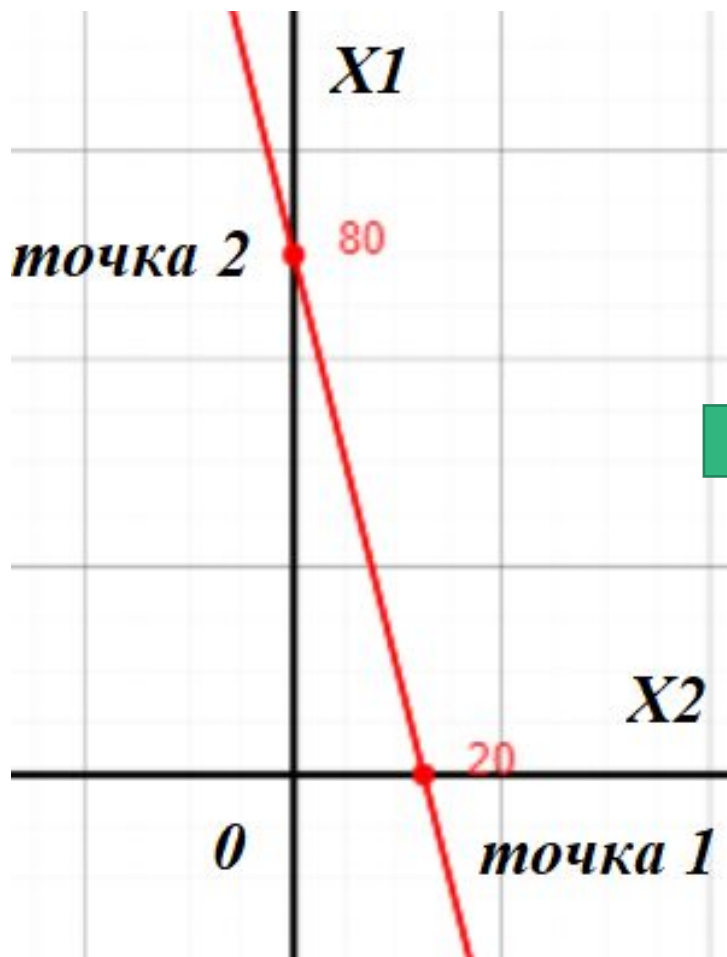
Точка 1, если $X_1=0$, то $X_2=400/20=20$,

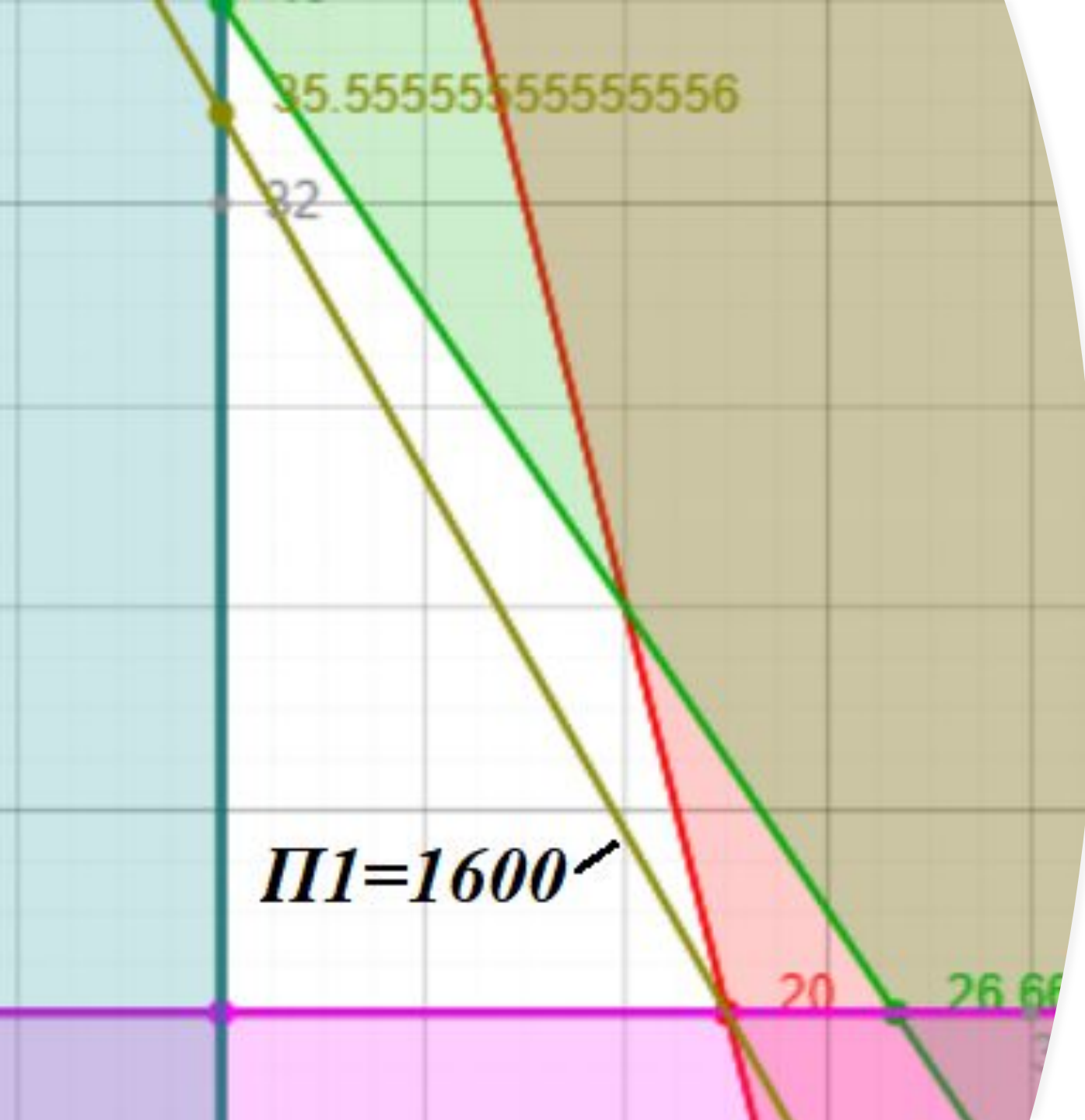
Точка 2, если $X_2=0$, то $X_1=400/5=80$,

НО прямая – это знак $=$, а у нас неравенство,

поэтому зону точек при которых неравенство не выполняется необходимо вычеркнуть из возможных вариантов ответа.

Аналогично, строятся остальные ограничения.





Задача двухпараметрической оптимизации

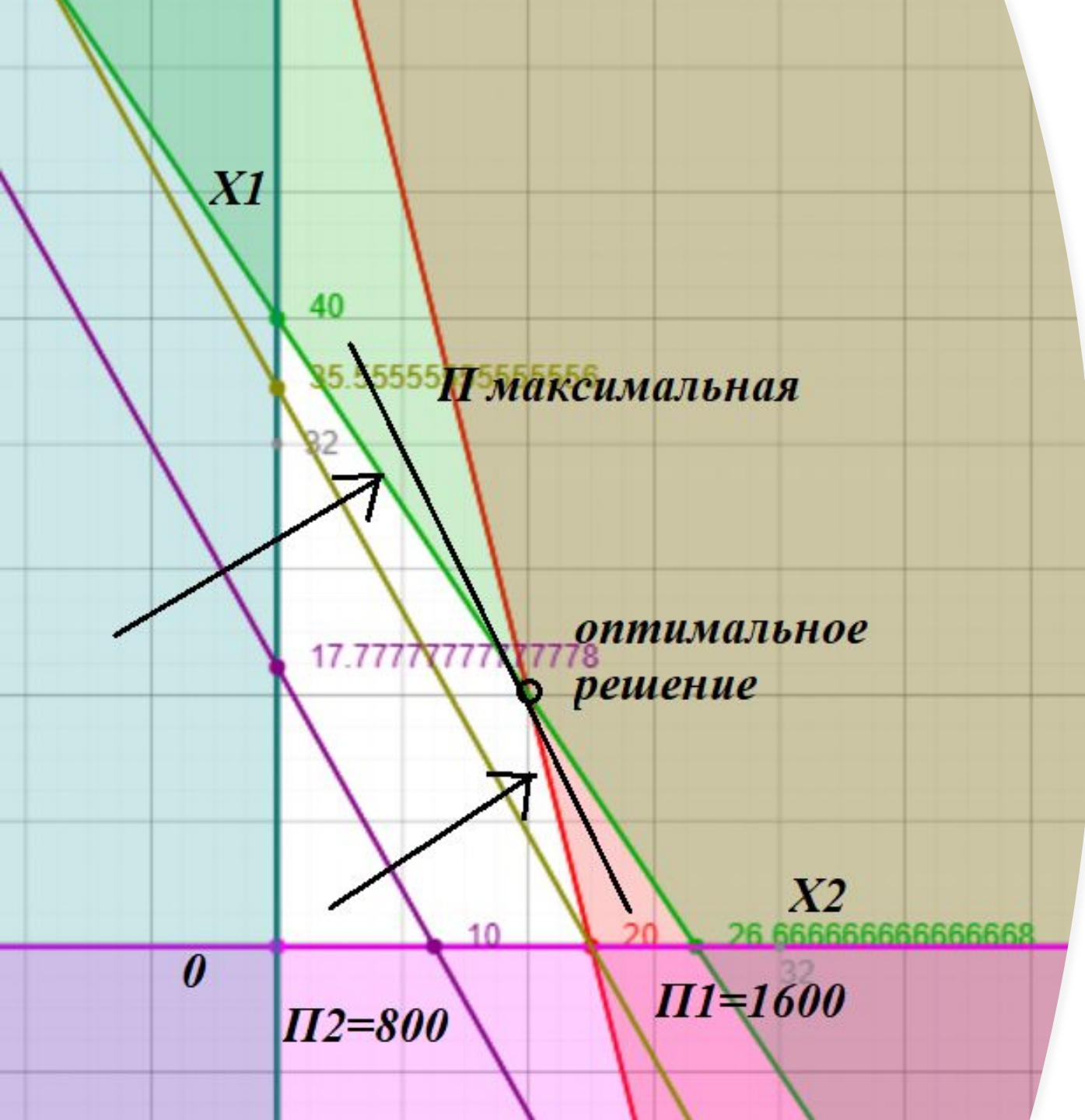
2 этап – построение *линий уровня*
(линий постоянного значения функции)

Т.к. значение функции прибыли
неизвестно и нужно найти ее максимум
в ОДР, присвоим ей произвольное
значение (Π) и построим на графике.

$\Pi_1 = 1600$,

подставим в целевую функцию и
построим как ограничение.

$$45 X_1 + 80 X_2 = 1600$$



Задача двухпараметрической ОПТИМИЗАЦИИ

Далее строим еще линию уровня с другим значением прибыли.

$$П2=800,$$

подставим в целевую функцию и построим как ограничение.

$$45 X_1 + 80 X_2 = 800$$

Таким образом, на графике видно, что функция увеличивается смещаясь вверх вправо, а прямая, проходящая через пересечение ограничений, находится в зоне ОДР (только точка с прямой) и будет выше и правее остальных – тут прибыль принимает максимальное значение в области ограничений.



Требования к экзамену

- Оценка 3 – задача №1
- Оценка 4 – задача №1, задача №2
- Оценка 5 – задача №1, задача №2, задача №3.