Оптимизационные задачи

Лекция + практика

Кузьмишина А.М.

НГТУ им. Р.Е. Алексеева

- Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются оптимизационными.
- Оптимизационные задачи (ОЗ) решаются с помощью оптимизационных моделей (ОМ) методами математического программирования.

Классификация задач оптимизации

Параметрическая (выбор оптимальных параметров объекта/процесса)

Структурная (выбор оптимальной структуры объекта/процесса)

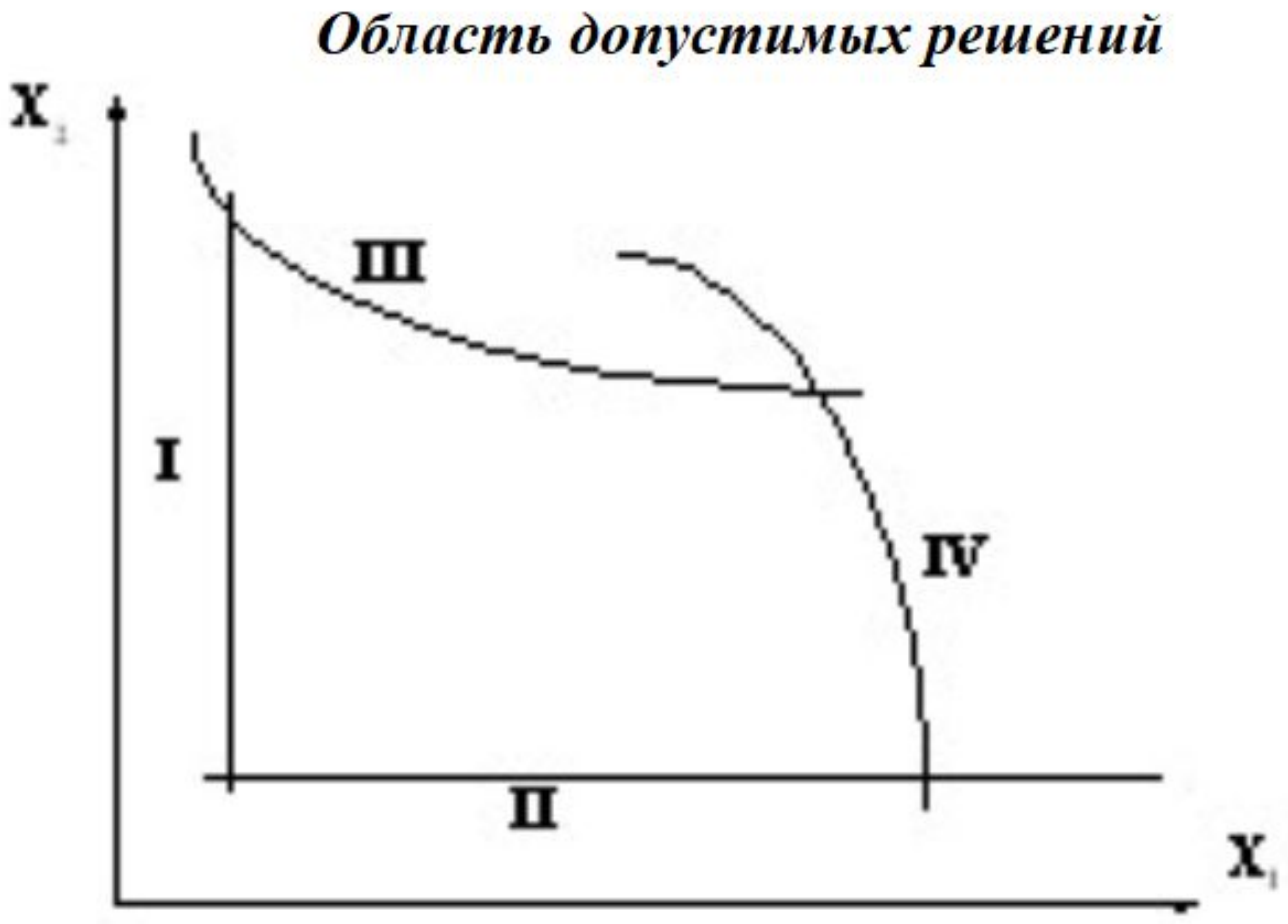
Структурно-параметрическая (выбор оптимальных параметров и структуры объекта/процесса)

* Последний тип задач является самым сложным и требует точного составления оптимизационной модели.

Параметрическая оптимизация

- Постановка задачи:

Требуется найти значения управляемых параметров x1, x2...xk при которых критерий оптимальности Q= f(x1, x2 ..xk) достигнет max (min) значения и будут выполнены прямые и функциональные ограничения



Ограничения линейные (I и II) и нелинейные (III и IV)

Структура оптимизационной модели

- Целевая функция (критерий оптимальности)

состоит из управляемых переменных;

неуправляемых переменных;

формы функции (вида зависимости между ними).

- Область допустимых решений

область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

В общем виде
$f(x) \to \max\limits_{x},$
$h(x) \le a,$
$g_i(x) \le b_i, \forall i,$
$x \ge 0$
Конкретная модель
$x_1 + x_2 \to \max\limits_{x},$
$x_1 + 3x_2 \le 21,$
$2x_1 + x_2 \le 12,$
$x_1, x_2 \ge 0$

Постановка задачи оптимизации

а) составить математическую модель объекта оптимизации,

б) выбрать критерий оптимальности и составить целевую функцию,

в) установить возможные ограничения, которые должны накладываться на переменные,

г) выбрать метод оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомых величин.

Задачи оптимизации различают:

- В зависимости **от управляемых параметров**:

- одномерная оптимизация (оптимизация 1 параметра),
- двухмерная/многомерная оптимизация (оптимизация 2 или более переменных).

- В зависимости **от критерия оптимальности**:

- однокритериальная (критерий оптимальности = 1),
- многокритериальная (критериев оптимальности > 1) .

Методы решения

- методы исследования функций классического анализа;
- методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа;
- вариационное исчисление;
- динамическое программирование;
- принцип максимума;
- линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- геометрическое программирование.

Линейное и нелинейное программирование

- Задача **линейного программирования**

(ограничения и целевая функция представляют собой линейные функции, то есть, многочлены первой степени)

- Задача **нелинейного программирования**

(ограничения, либо целевая функция (либо и то, и другое) выражены в нелинейном виде)

Методы линейного программирования

(наиболее распространенные)

Графический метод

(кол-во управляемых параметров 2),

Симплекс-метод

(кол-во управляемых параметров > 2)

Задача двухпараметрической оптимизации

Пример 1

- **Производственная задача**

Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 400 человеко-часов. Прибыль при производстве стула - 45 долларов США, при производстве стола - 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Задача двухпараметрической оптимизации

В итоге задача в общем виде выглядит так

$$45X_1 + 80X_2 \to \max,$$

$$5X_1 + 20X_2 \le 400,$$

$$10X_1 + 15X_2 \le 400,$$

$$X_1 \ge 0,$$

$$X_2 \ge 0.$$

- **Составим оптимизационную модель в общем виде**:

Пусть управляемые параметры (параметры, значения которых требуется оптимизировать) это кол-во изготовленных стульев – X1 и кол-во изготовленных столов – X2.

Критерий оптимальности - прибыль, которая должна быть максимальной, тогда целевая функция будет выглядеть:

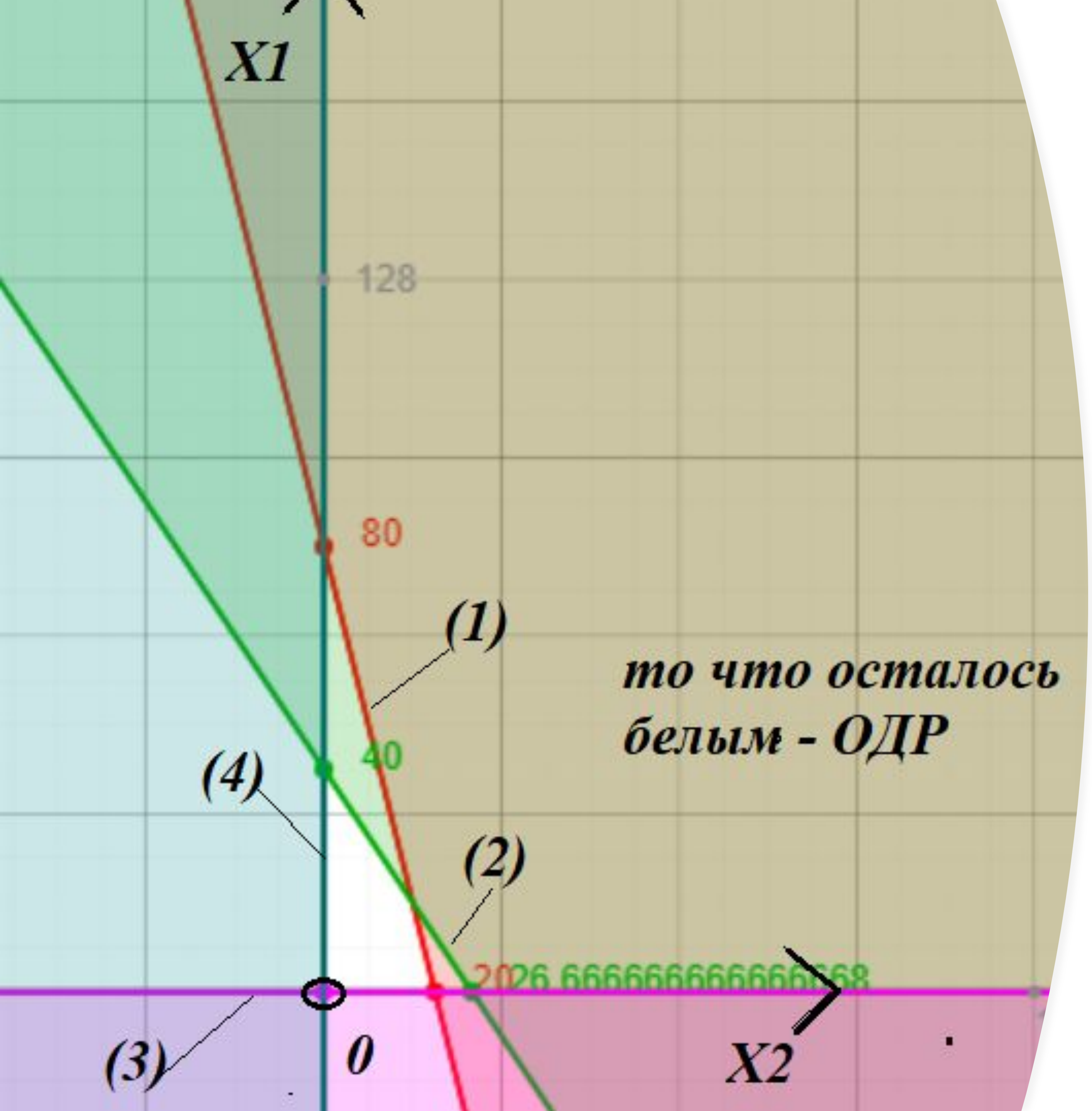
$$45X_1 + 80X_2 \to \max,$$

Есть ограничения по материалу и человеко-часам, которые можно представить в виде:

$$5X_1 + 20X_2 \le 400,$$

$$10X_1 + 15X_2 \le 400,$$

Однако, так как управляемые параметры натуральные числа, то они должны быть больше или равны 0.



Задача двухпараметрической оптимизации

- Решим задачу графическим методом:

1 **этап** – Построение области допустимых решений (ОДР).

ОДР образуется в результате пересечения всех ограничений (в примере их 4), поэтому поочередно построим

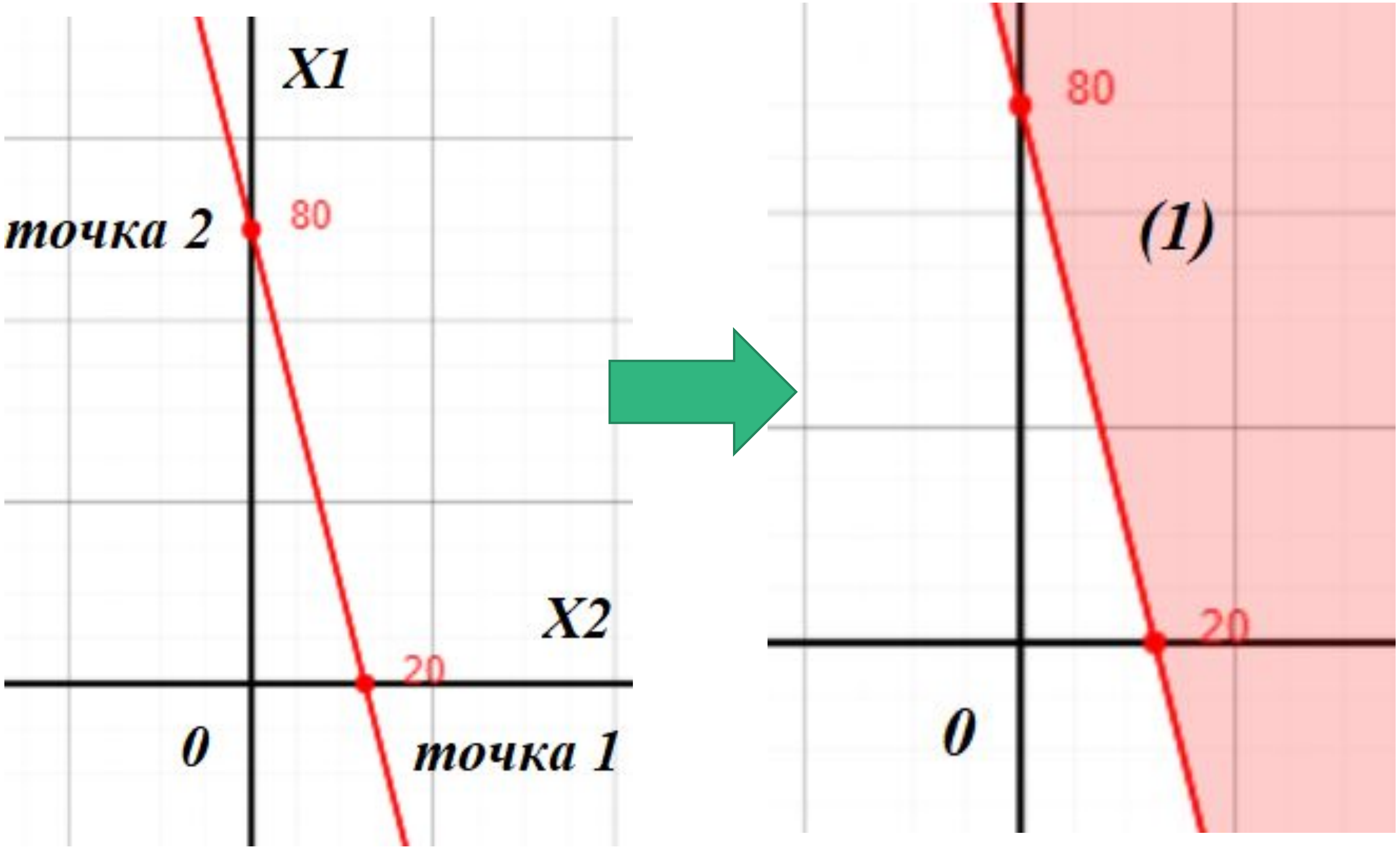
$$5X_1 + 20X_2 \le 400, \quad (1)$$

$$10X_1 + 15X_2 \le 400, \quad (2)$$

$$X_1 \ge 0, \quad (3)$$

$$X_2 \ge 0. \quad (4)$$

Построение ограничений



(1) ограничение – это уравнение прямой.

$$5\,X_1 + 20\,X_2 \leq 400\,, \qquad (1)$$

Найдем точки пересечения прямой с осями координат

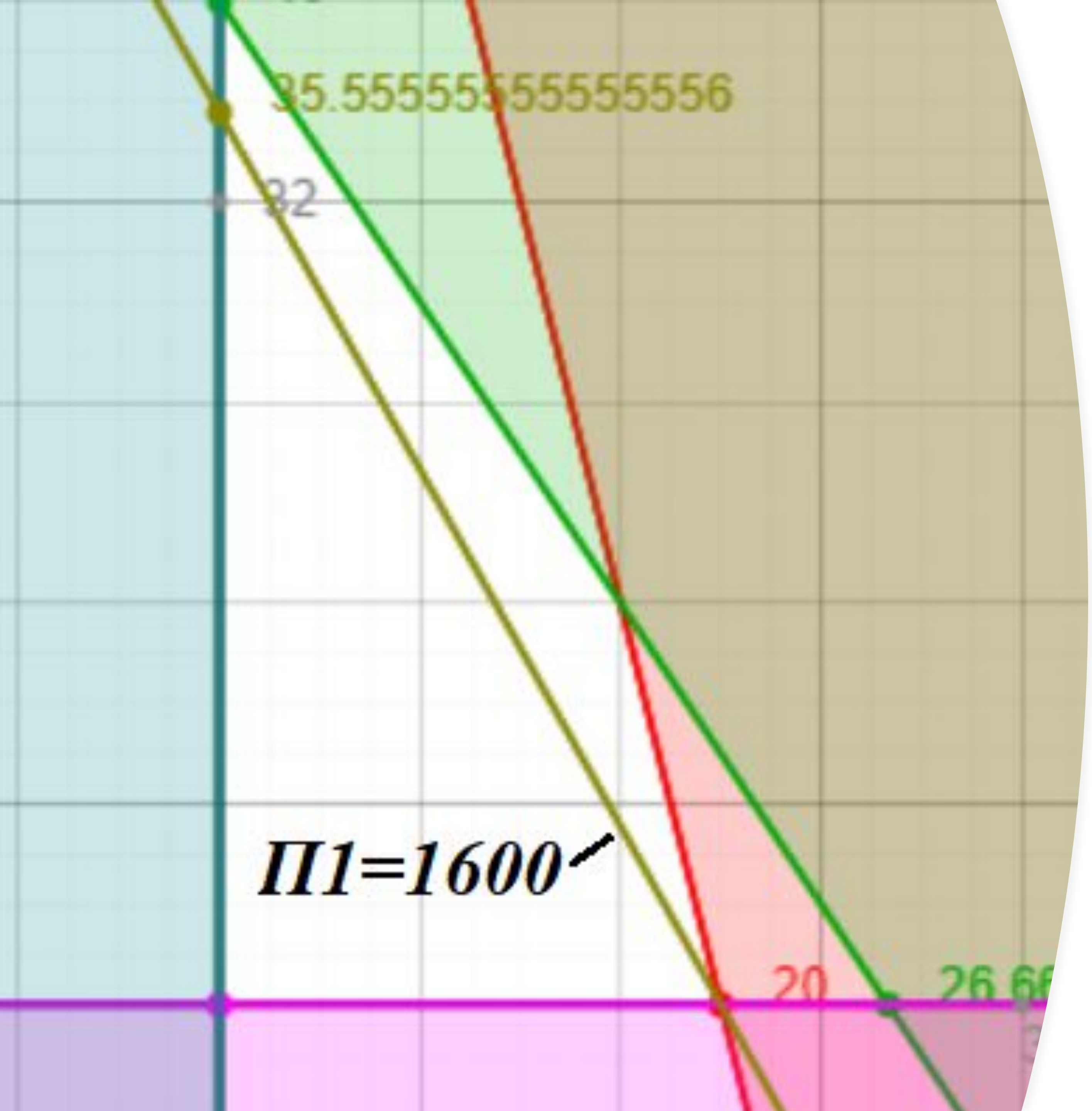
Точка 1, если X1=0, то X2=400/20=20,

Точка 2, если X2=0, то X1=400/5=80,

НО прямая – это знак =, а у нас неравенство,

поэтому зону точек при которых неравенство не выполняется необходимо вычеркнуть из возможных вариантов ответа.

Аналогично, строятся остальные ограничения.



Задача двухпараметрической оптимизации

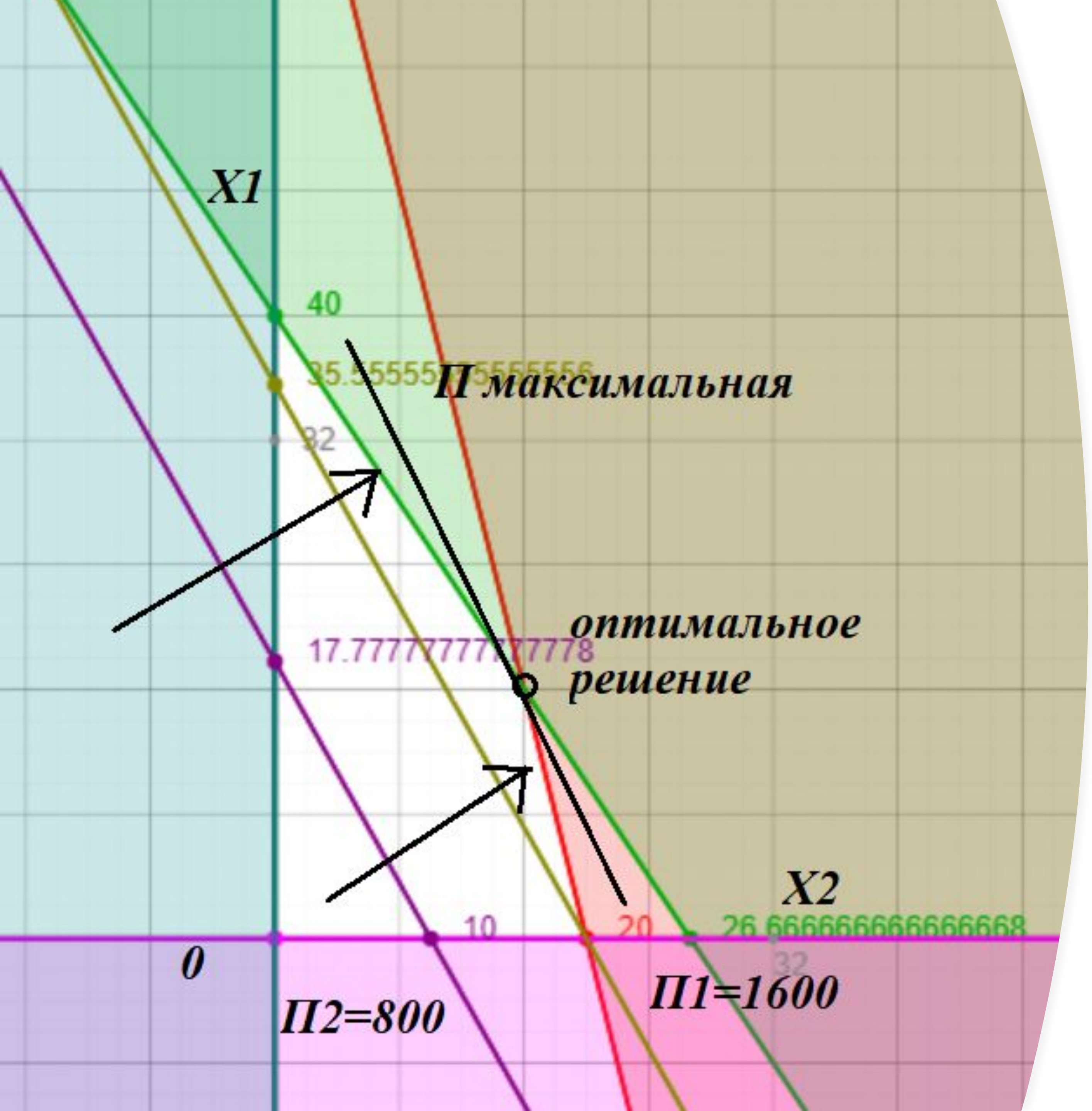
2 **этап** – построение *линий уровня* (линий постоянного значения функции)

Т.к. значение функции прибыли неизвестно и нужно найти ее максимум в ОДР, присвоим ей произвольное значение (П) и построим на графике.

П1=1600,

подставим в целевую функцию и построим как ограничение.

$$45X_1 + 80X_2 = \mathbf{1600}$$



Задача двухпараметрической оптимизации

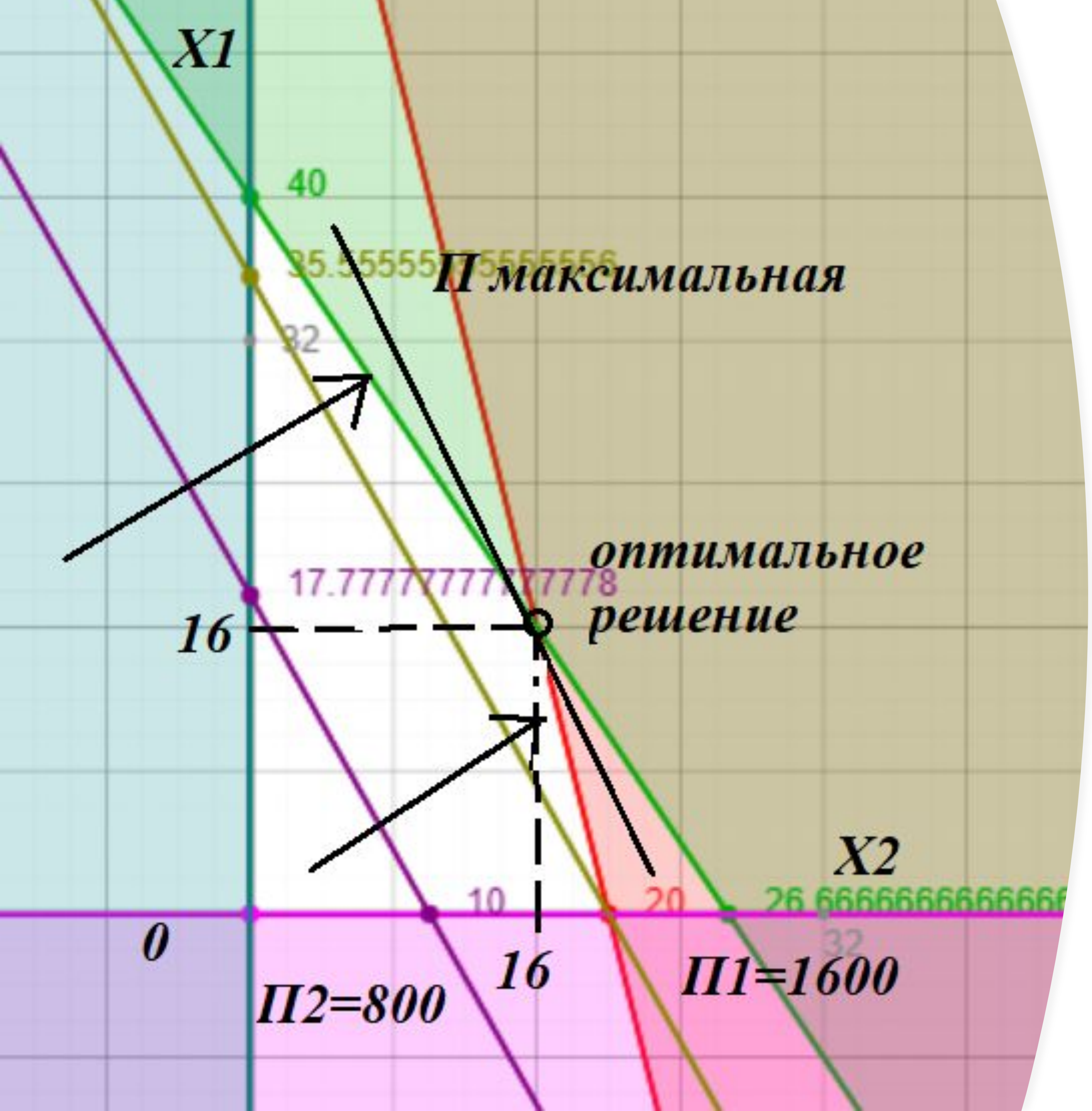
Далее строим еще линию уровня с другим значением прибыли.

П2=800,

подставим в целевую функцию и построим как ограничение.

$$45\,X_1 + 80\,X_2 \;=\; \boldsymbol{800}$$

Таким образом, на графике видно, что функция увеличивается смещаясь вверх вправо, а прямая, проходящая через пересечение ограничений, находится в зоне ОДР (только точка с прямой) и будет выше и правее остальных – тут прибыль принимает максимальное значение в области ограничений.



Задача двухпараметрической оптимизации

- Чтобы записать ответ, найдем координаты точки, опустив перпендикуляры к осям.

Получилось X1 =16, X2 =16.

Подставим в функцию прибыли

Пмакс=45·16+80·16=2000.

Ответ: в рамках ограничений по ресурсам и человеко-часам максимальная прибыль 2000 долларов США будет получена, если изготовить 16 стульев и 16 столов.

Требования к экзамену

- Оценка 3 – задача №1
- Оценка 4 – задача №1, задача №2
- Оценка 5 – задача №1, задача №2, задача №3.