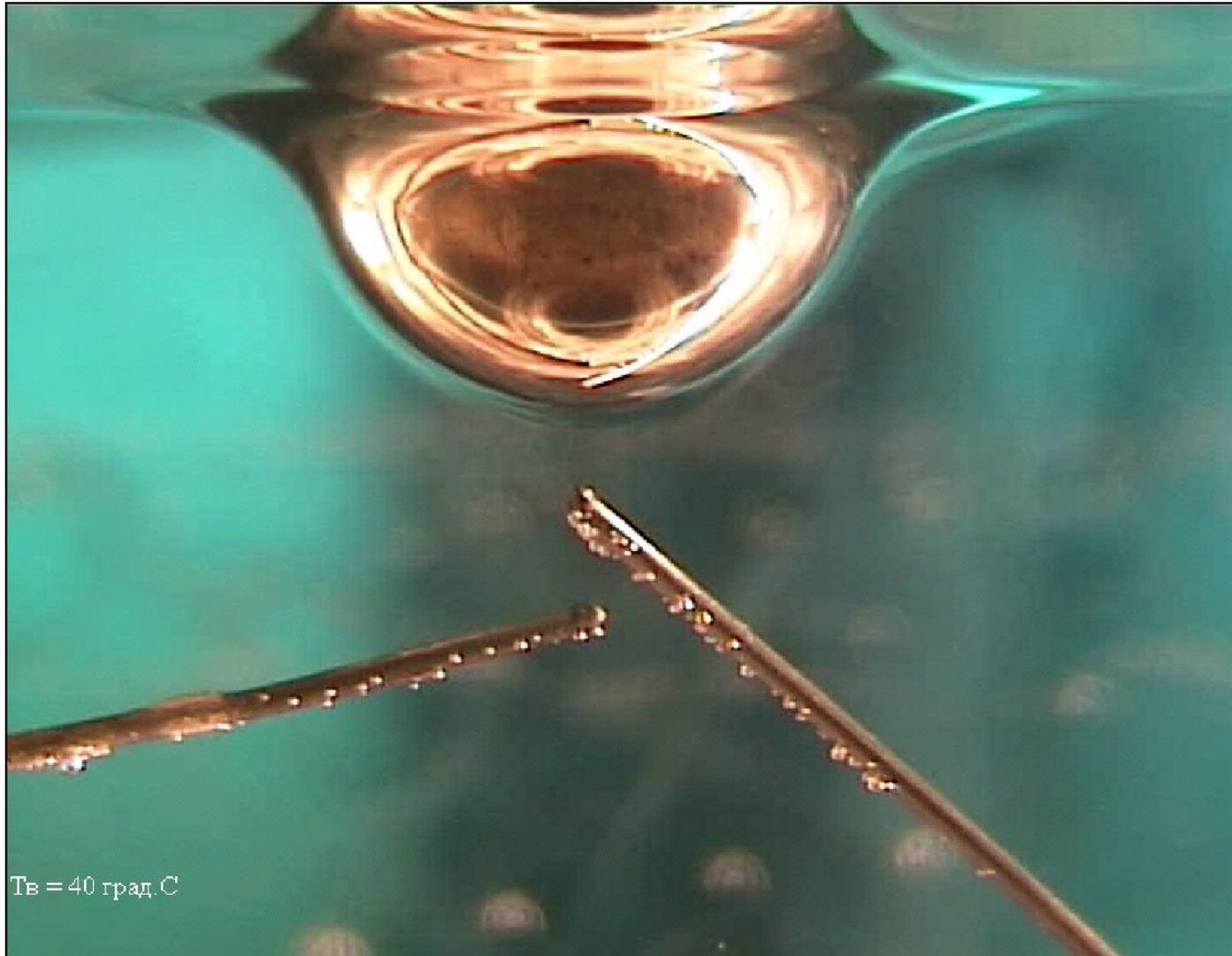


**Молекулярно-кинетический подход  
применительно к расчету тепловой  
нагрузки при пленочном кипении на  
сферических и цилиндрических  
греющих поверхностях**

# Кипение воды на полусферической поверхности

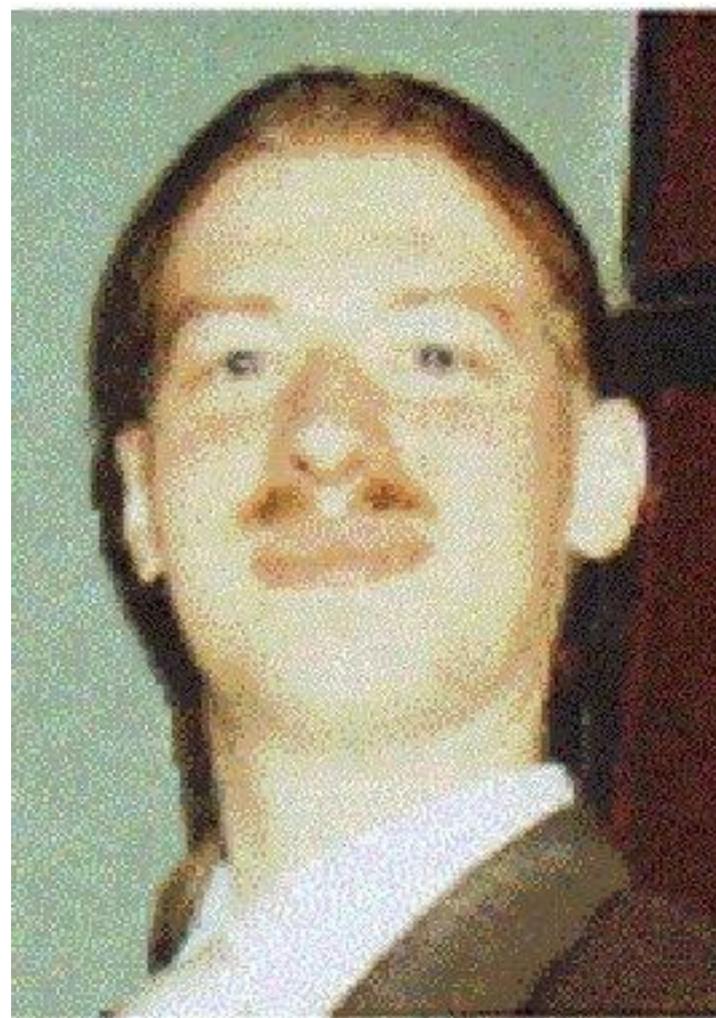
2

$$d_w = 1.0 \text{ см}; T_w = 270^\circ \text{ C}; T_b = 40^\circ \text{ C}$$





**Юрий Петрович Ивочкин**

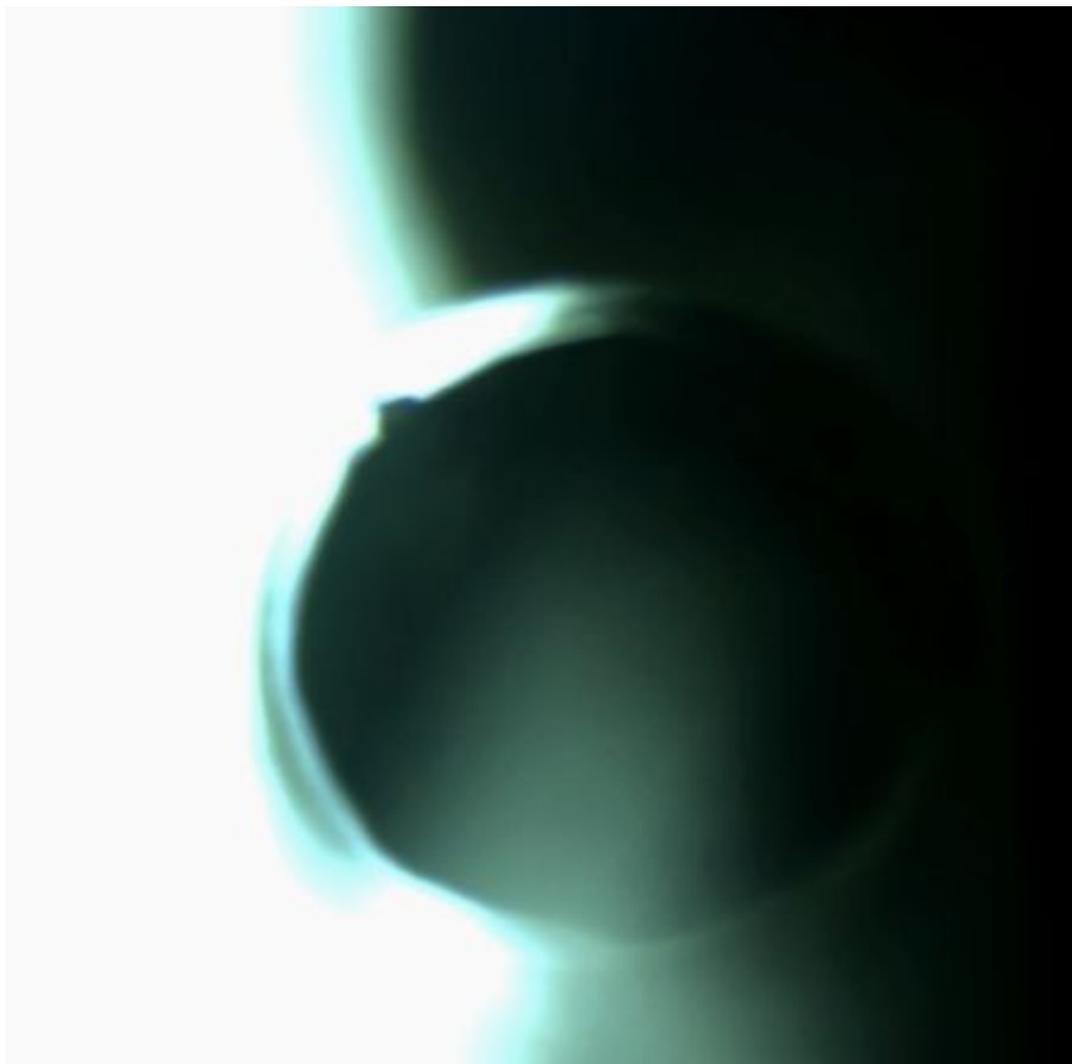


**Константин Кубриков**

# Кипение He-II на цилиндрическом нагревателе

( $d_w = 4$  мм,  $T_b = 2$  К)

3



# Пленочное кипение $He-II$ на цилиндре

4



# Кипение He-II на сферическом нагревателе

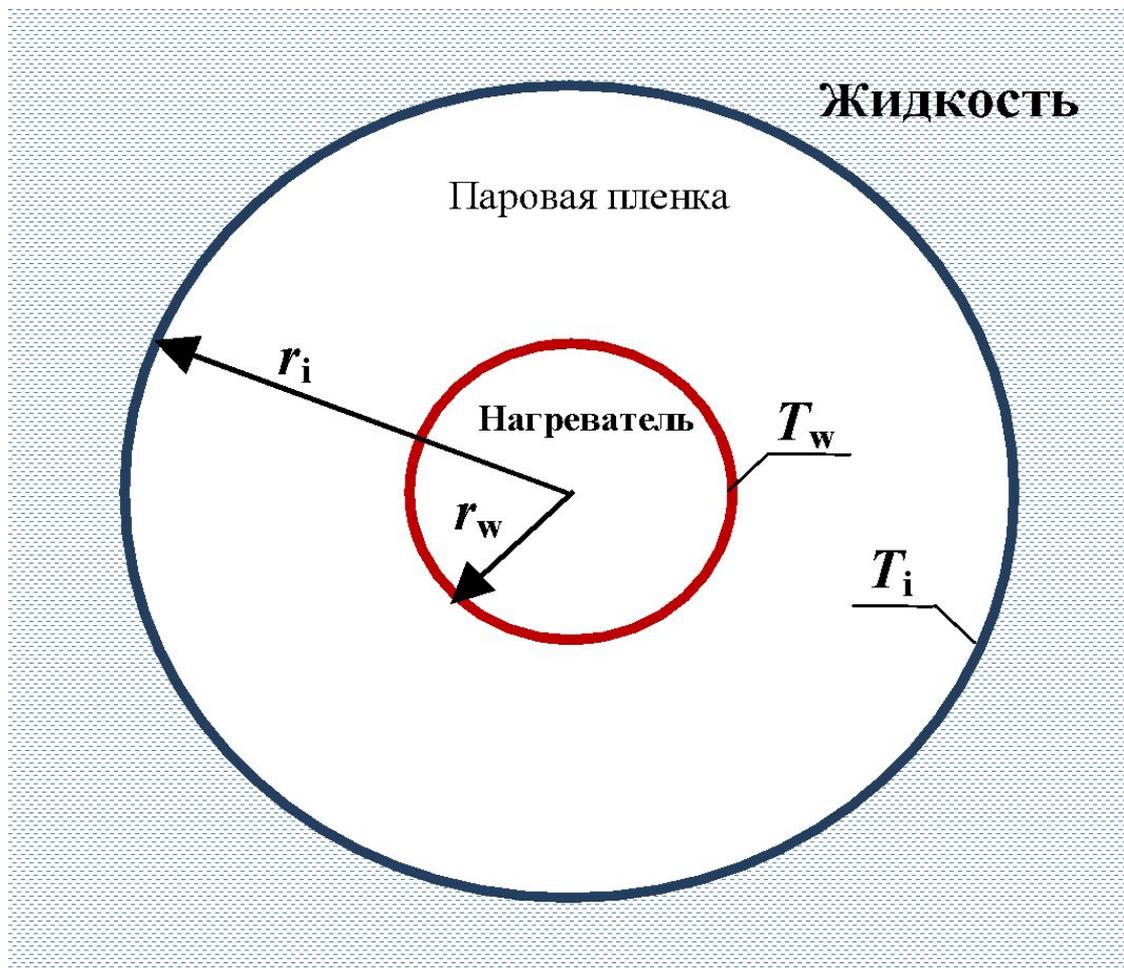
( $d_w = 6$  мм,  $T_b = 2$  К)

5



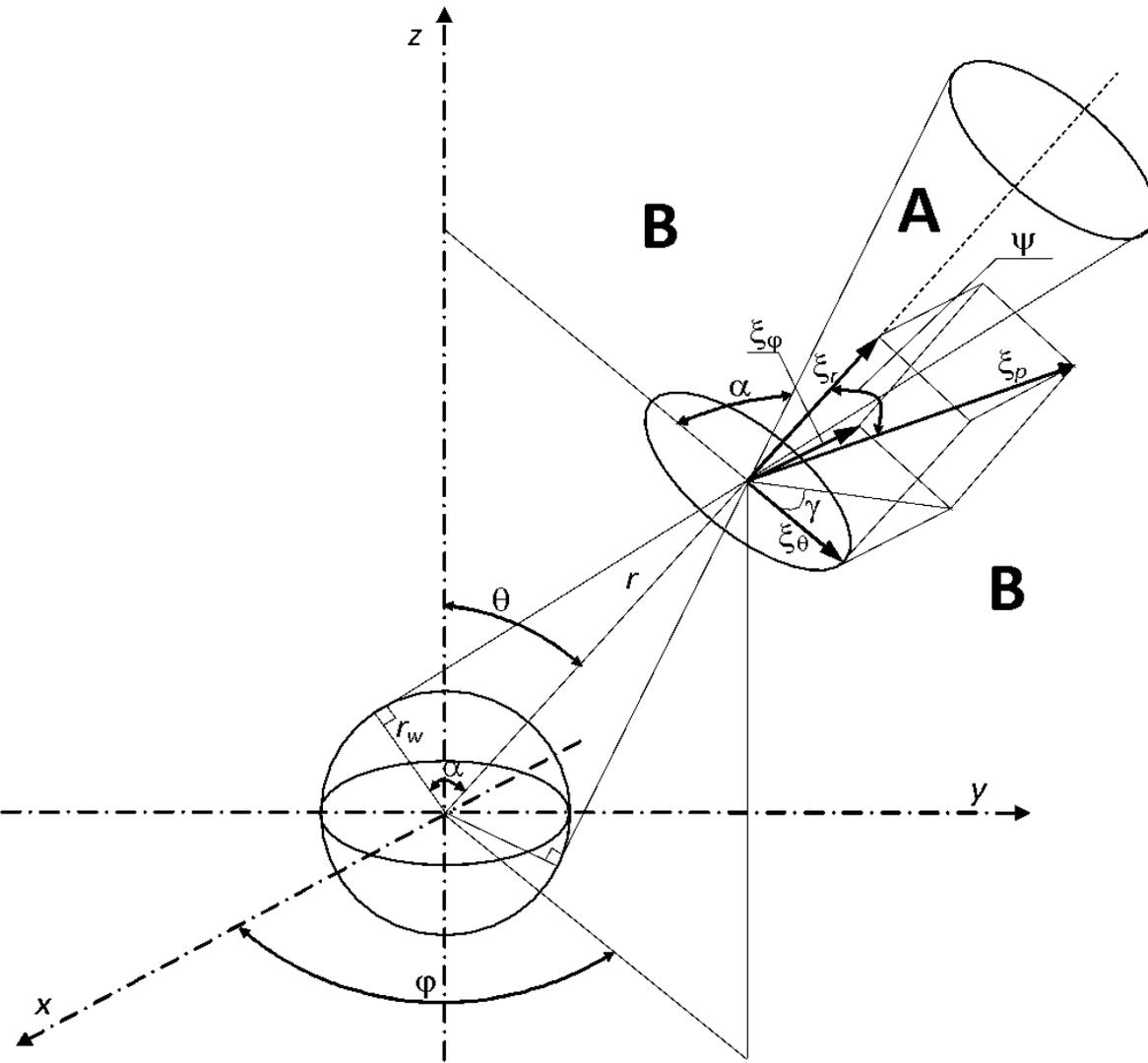
# Постановка задачи

6



$r_w$  – радиус нагревателя,  
 $r_i$  – внешний радиус  
паровой пленки,  
 $T_w$  – температура поверхности  
нагревателя,  
 $T_i$  – температура межфазной  
поверхности пар-жидкость

# Схема разбиения пространства скоростей при аппроксимации функции распределения двусторонним максвеллианом для случая сферической геометрии



$$\xi_p = (\xi_r^2 + \xi_\phi^2 + \xi_\theta^2)^{1/2}$$

$$\psi = \arctg \left( \frac{(\xi_\phi^2 + \xi_\theta^2)^{1/2}}{\xi_r} \right)$$

$$\xi_r = \xi_p \cos \psi$$

$$\xi_\phi = \xi_p \sin \psi \sin \gamma$$

$$\xi_\theta = \xi_p \sin \psi \cos \gamma$$

$$\alpha = \arcsin \frac{r_w}{r}$$

$$f = \begin{cases} f_1 = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_p^2}{2RT_1}\right) & \frac{\pi}{2} - \\ f_2 = \frac{n_2}{(2\pi RT_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_p^2}{2RT_2}\right) & \frac{\pi}{2} - \end{cases}$$

$$\xi_p = (\xi_r^2 + \xi_\varphi^2 + \xi_\theta^2)^{1/2}$$

# Уравнение Больцмана для сферически симметричной задачи

9 a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\xi_{\perp}^2}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_r} - \frac{\xi_r \xi_{\perp}}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\perp}} = J,$$

где  $\xi_{\perp} = \sqrt{\xi_{\varphi}^2 + \xi_{\theta}^2}$ ,  $\xi_r, \xi_{\varphi}, \xi_{\theta}$  - компоненты вектора скорости в сферической системе координат.

# Интегральное уравнение для сферической геометрии задачи, полученное из кинетического уравнения Больцмана

9 b

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \int \xi_r f \Phi d\xi \right) -$$

$$-\frac{1}{r} \int f \left\{ \left( \xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_r} + \left( \xi_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - \xi_\theta \xi_r \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\theta} - \left( \xi_\varphi \xi_r + \xi_\varphi \xi_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi} \right\} d\xi = \int \Phi \cdot J d\xi$$

$$\int \xi \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots d_r d_\varphi d_\theta$$

**Весовые функции**

$$\Phi_1 = m$$

$$\Phi_2 = m \xi_r$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} m \xi^2$$

## Система моментных уравнений

$$n_1 \sqrt{\frac{RT_1}{\pi}} - n_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( n_1 RT_1 (1 - \sin^3 \alpha) + n_2 RT_2 (1 + \sin^3 \alpha) \right) \right] = \\ = \frac{n_1 RT_1}{4} \left( 9(1 - \sin \alpha) - (1 + \sin(3\alpha)) \right) + \frac{n_2 RT_2}{4} \left( 9(1 + \sin \alpha) - (1 - \sin(3\alpha)) \right) \end{aligned}$$

$$2mn_1 RT_1 \sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - 2mn_2 RT_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = q_r \frac{r^2}{r_w^2}$$

Соотношение для давления пара в пленке

$$2P = (1 - \sin \alpha) \cdot mn_1 RT_1 + (1 + \sin \alpha) \cdot mn_2 RT_2$$

$$q = 2P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}} \left(\frac{r_w}{r}\right)^2 \left[ \left\{ \frac{2(P/P_s(T_i) - 1)}{1 - \sqrt{1 - (r_w/r_i)^2}} + 1 \right\}^2 - 1 \right]$$

# Сравнение с численным решением кинетического уравнения Больцмана для тонких пленок (тестовая задача)

12

При тонких пленках задачу для кинетического уравнения Больцмана можно считать плоской и одномерной:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = J$$

При решении уравнения Больцмана граничное условие при  $r_i$  фиксировано:

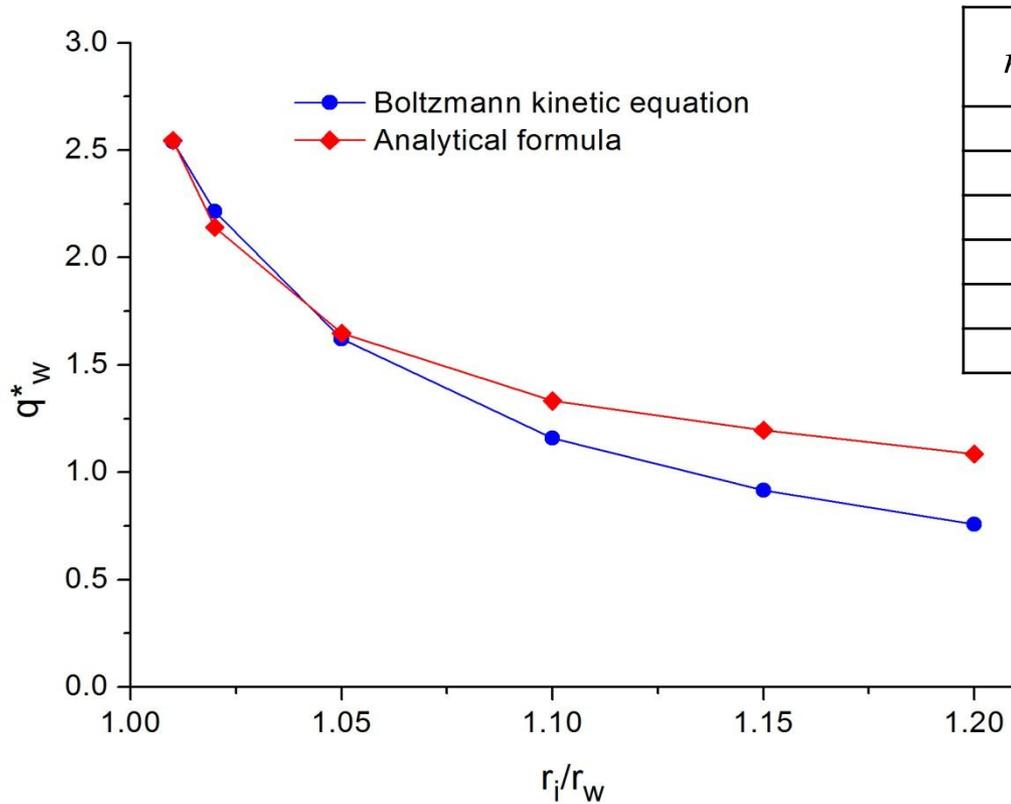
$$\rho_i^* = \rho_0^* = 1, \quad T_i^* = T_0^* = 1.$$

С учетом этого аналитическая формула для теплового потока приобретает вид:

$$q_w^* \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \left\{ \frac{2(P^* - 1)}{1 - \sqrt{1 - (r_w / r_i)^2}} + 1 \right\}^2 - 1$$

В результате решения кинетического уравнения Больцмана получено давление в пленке  $P^*$  и плотность теплового потока на нагревателе  $q^*$ .

# Сравнение с кинетическим уравнением Больцмана для тонких пленок (тестовая задача)



$r_i^* / r_w^*$	$P^*$	$q^*$	$q_w^*$
1.01	1.450	2.540	2.545
1.02	1.369	2.215	2.141
1.05	1.261	1.622	1.648
1.10	1.185	1.160	1.333
1.15	1.147	0.916	1.196
1.20	1.122	0.758	1.086

# Численное решение уравнения Больцмана в сферической постановке

Уравнение Больцмана для сферически симметричной задачи имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\xi_{\perp}^2}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_r} - \frac{\xi_r \xi_{\perp}}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\perp}} = J,$$

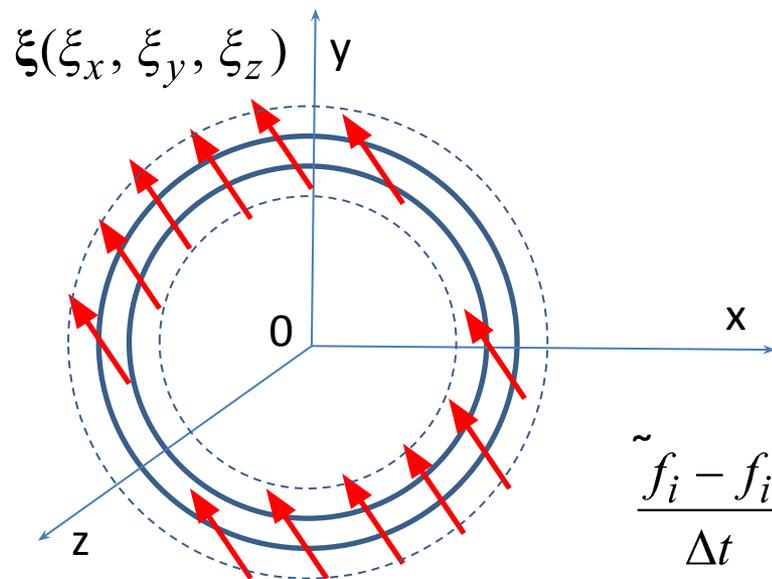
где  $\xi_{\perp} = \sqrt{\xi_{\varphi}^2 + \xi_{\theta}^2}$ ,  $\xi_r, \xi_{\varphi}, \xi_{\theta}$  - компоненты вектора скорости в сферической системе координат.

Однако описывать движение молекул в декартовой системе координат является более естественным. Перевод компонентов скорости в сферическую систему

- существенно осложняет вычисление интеграла столкновений;
- требует использования более сложных разностных схем для левой части уравнения.

# Численное решение уравнения Больцмана в сферической постановке

Построение конечноразностных схем для сферического уравнения при сохранении декартовых координат в скоростном пространстве.



Рассмотрим, как частицы, имеющие скорость  $\xi(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ , пронизывают тонкие сферические слои.

Баланс массы для  $i$ -го слоя:

$$J_{вход} = J_{выход} \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{f}_i - f_i}{\Delta t} = \frac{|\xi|}{(R_{i_1}^3 - R_{i_2}^3)} \left[ R_{i_1}^2 (f_{i-1} - f_i) + R_{i_2}^2 (f_{i+1} - f_i) \right],$$

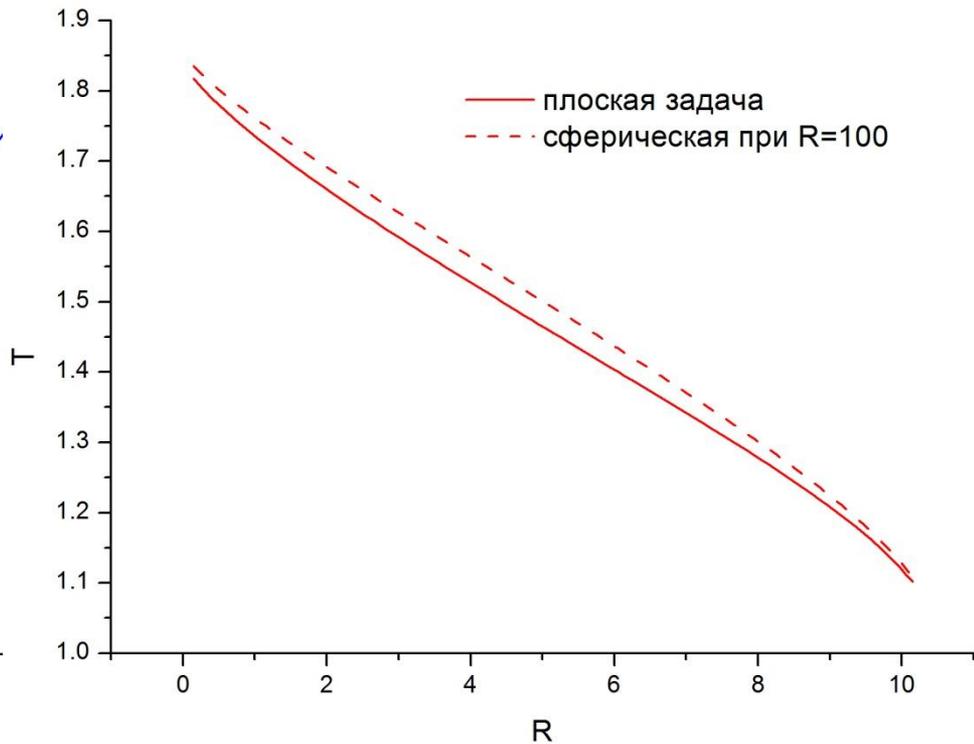
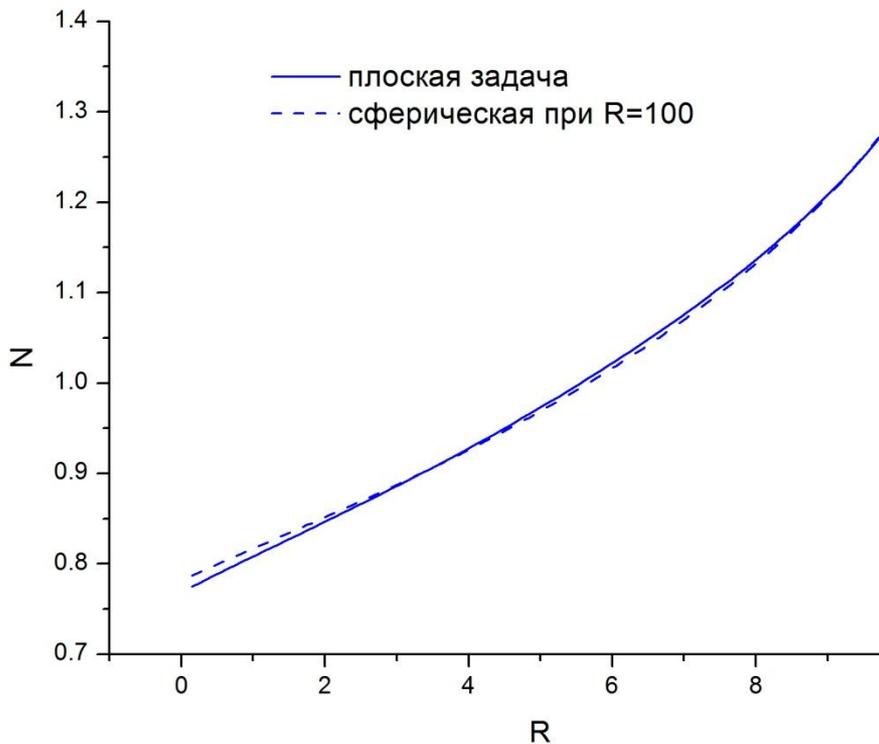
где  $f$  - функция распределения,  $i$  - номер сферического слоя,  $R_{i_1}, R_{i_2}$  - внешний и внутренний радиус  $i$ -го сферического слоя, соответственно.

# Численное решение уравнения Больцмана в сферической постановке

16

Тестирование разностной схемы на примере задачи теплопроводности:

$T_{внеш} = 1, T_{внутр} = 2$ . Проведено сравнение с плоской задачей.



Проблемы при реализации: трудности вычисления потока тепла из-за полной симметричности схемы.

# Кипение He-II на сферическом нагревателе

( $d_w = 4,8$  мм,  $T_b = 1,7$  К)

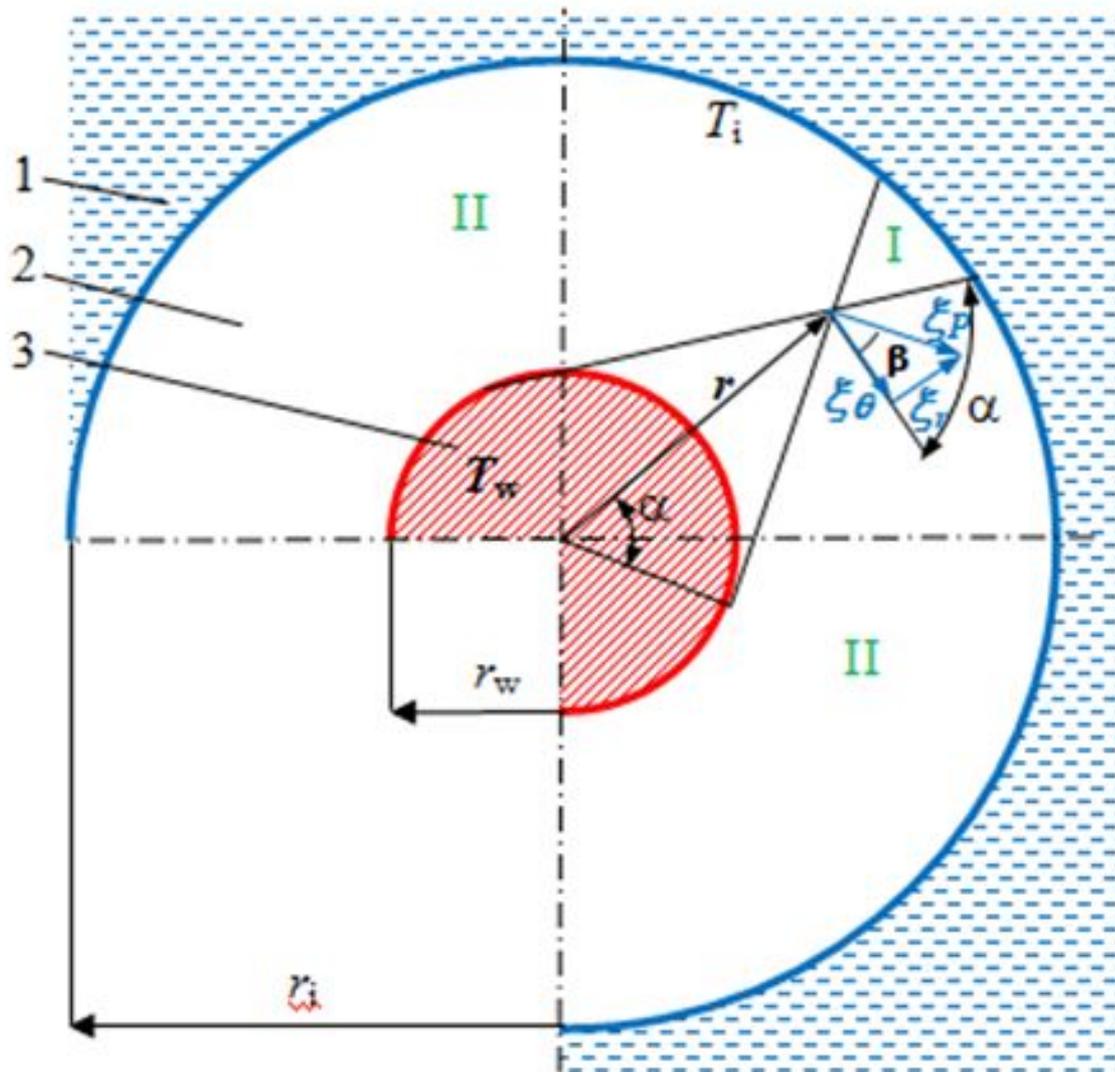
17



Сравнение результатов расчетов ( $r_{i\text{ calc}}$ ) и экспериментальных данных ( $r_i$ ) о внешнем радиусе паровой пленки на сферическом нагревателе  $d_w = 4,8$  мм

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
Температура He-II T, К	1.70	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69
Глубина погружения h, мм	28	24	22	38	33	34	30	28
Тепловая нагрузка $Q_w$ , Вт	0.788	0.788	0.788	1.128	1.128	1.128	1.299	1.299
Измеренный радиус паровой пленки $r_i$ , мм	2,55	2,60	2,70	2,55	2,60	2,65	2,60	2,65
Расчетный радиус паровой пленки $r_{i\text{ calc}}$ , мм	2,49	2,59	2,65	2,51	2,60	2,58	2,79	2,86
Отношение расчетного и экспериментального значений радиуса паровой пленки $r_{i\text{ calc}}/r_i$	0.978	0.996	0.983	0.985	1.002	0.975	1.076	1.081
Относительная погрешность расчета $(r_{i\text{ calc}} - r_i)/r_i$ , %	-2,2	-0,4	-1,7	-1,5	+0,2	-2,6	+7,3	+8,0

# Схема разбиения пространства скоростей при аппроксимации функции распределения двусторонним максвеллианом для случая цилиндрической геометрии



- 1 – жидкость;
- 2 – паровая плёнка;
- 3 – нагреватель

$$\xi_p = \sqrt{\xi_r^2 + \xi_\theta^2}$$

$$\beta = \text{arctg}(\xi_r / \xi_\theta)$$

$$\xi_\theta = \xi_p \cos \beta$$

$$\xi_r = \xi_p \sin \beta$$

$$\xi_z = \xi_z$$

$$\alpha = \arccos(r_w / r)$$

Интегральное уравнение для цилиндрической геометрии задачи, полученное из кинетического уравнения Больцмана

20

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int \Phi \xi_r f d\xi \right) - \frac{1}{r} \int f \left( \xi_\theta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_r} - \xi_r \xi_\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\theta} \right) \cdot d\xi = \int \Phi \cdot J d\xi,$$

$$\int \xi \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots d_r d_\theta d_z$$

**Весовые функции**

$$\Phi_1 = m$$

$$\Phi_2 = m \xi_r$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} m \xi^2$$

$$f = \begin{cases} f_1 = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_p^2 + \xi_z^2}{2RT_1}\right) & \alpha < \beta < \pi \\ f_2 = \frac{n_2}{(2\pi RT_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_p^2 + \xi_z^2}{2RT_2}\right) & \pi < \beta < \pi + \alpha \end{cases}$$

$$\xi_p = (\xi_r^2 + \xi_\theta^2)^{1/2}$$

## Система моментных уравнений

$$n_1 \sqrt{\frac{RT_1}{\alpha}} - n_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = 0$$

$$(\sin 2\alpha - 2\alpha) \frac{d}{dr} (n_1 T_1 - n_2 T_2) + \pi \frac{d}{dr} (n_1 T_1 + n_2 T_2) = 0$$

$$2mn_1 RT_1 \sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - 2mn_2 RT_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = q_r \frac{r}{r_w}$$

Соотношение для давления пара в пленке

$$2\pi P = mn_1 RT_1 (\pi - 2\alpha) + mn_2 RT_2 (\pi + 2\alpha)$$

$$q = 2P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{\lambda} \cdot \frac{r_w}{r_i}} \left[ \arccos \left\{ \frac{2(P/P_s(T_i) - 1)}{(r_w/r_i) + 1} \right\} - 1 \right]$$

# Пленочное кипение $He-II$ на цилиндре

24





Исходящая поверхность	Вид формулы	
	Линейная	Нелинейная
Плоскость	$q_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (P - P_s(T_i)) \sqrt{2RT_i} =$ $= 8P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{\pi}} \left( \frac{P}{P_s(T_i)} - 1 \right)$ <p>Формула Лабунцова-Муратовой. Публикация в 1969 г.</p>	$q_i = 8P \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}} \left[ \frac{P}{P_s(T_i)} - 1 \right]$ <p>Формула А.П. Крюкова. Публикация в 2000 г.</p>
Цилиндр	$q = 4(P - P_s(T_i)) \sqrt{\frac{\pi}{2}} RT_i \frac{r_w}{r} \cdot \frac{1}{(\pi - 2 \arccos(r_w/r))}$ <p>Вывод в 2014 г., публикация в 2016 г.</p> <p><b>Общая формула через разность температур</b></p> $q = P_s(T_i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} RT_i \frac{d_w}{2r} \frac{T_w/T_i - 1}{1 + \frac{2}{15} \frac{d_w}{\langle l_6 \rangle} \ln \frac{2r_i}{d_w}}$ <p>Вывод в 1998 г., публикация в 2014 г. Труды Шестой Российской национальной конференции по теплообмену. 27-31 октября 2014 г. Москва. НИУ «МЭИ». Издательский дом МЭИ. CD-ROM публикация. Секция 4.</p> <p>при <math>Kn \rightarrow \infty</math> <math>q = 2P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{\pi}} \left( \frac{T_w}{T_i} - 1 \right) \cdot \frac{r_w}{r}</math></p> <p>при <math>Kn \rightarrow 0</math></p> $q = \frac{15 P_s(T_i)}{\pi T_i \ln 2} \langle l_6 \rangle \sqrt{\frac{RT_i}{2}} \cdot \frac{T_w - T_i}{r \cdot (r_i/d_w)}$	$q = 2P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{\pi}} \frac{r_w}{r} \left[ \left\{ \frac{2(P/P_s(T_i) - 1)}{1 - (2/\langle l_6 \rangle) \cdot \ln \frac{2r_i}{d_w} \cdot \frac{r_w}{r}} + 1 \right\}^2 - 1 \right]$ <p>Вывод в 2014 г., публикация в 2016 г.</p> <p>П.В. Королев, А.П. Крюков. Описание теплопереноса через цилиндрическую межфазную поверхность жидкость-пар // Теплофизика высоких температур. – 2016. – Т. 54. – №1. – С. 73–80.</p>
Сфера	$q = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (P - P_s(T_i)) \sqrt{2RT_i} \frac{\left( \frac{r_w}{r} \right)^2}{\left( 1 - \sqrt{1 - (r_w/r)^2} \right)}$ <p>Вывод в 2020 г.</p>	$q = 2P_s(T_i) \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}} \left( \frac{r_w}{r} \right)^2 \left[ \left\{ \frac{2(P/P_s(T_i) - 1)}{1 - \sqrt{1 - (r_w/r)^2}} + 1 \right\}^2 - 1 \right]$ <p>Вывод в 2015 г., публикация в 2020 г.</p>