Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

дифференциальные уравнения используются, например:

- для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики;
- для описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография;
- для описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных
- для определения функции изменения численности популяции микроорганизмов в зависимости от времени.

Ключевые понятия и формулы

Дифференциальное уравнение **–** равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'' \dots) = 0$, F – некоторая известная функция, зависящая от нескольких переменных.

Порядок ДУ **–** порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например, уравнение $y'' + 5y' - 3y = 0$ – диф.уравнение второго порядка.

Интеграл (или решение) уравнения **–** это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Ключевые понятия и формулы

Общее решение ДУ содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение ДУ – функция, получаемая из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Методы решений

Уравнения, в которых неизвестными являются не только сами функции, но и их производные называются ***дифференциальными уравнениями.***

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция и её первая производная, то это уравнение называется **дифференциальным уравнением I порядка.**

Если в уравнение входит независимая переменная, неизвестная функция, производные и производная n-го, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением n- порядка*.

Методы решений

Обыкновенные диф.уравнения
$y' = f(x)$

диф.уравнения с разделяющимися переменными
$y' = f(x)g(y)$

Линейные диф.уравнения I порядка
$y' + p(x)y = f(x)$

Однородные
Если f(x)=0
$Y' + p(x)y = 0$
-это уравнение с разделяющимися переменными.

Неоднородные
Если f(x) не равно 0.

Решением диф.уравнения называют любую функцию при подстановке которой в это уравнение получается тождество.

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Решается это уравнение по шагам:
1) $Dy/dx = f(x)g(y)$
2) $Dy/g(y) = f(x)dx$
3) Интегрируем обе части.
4) Находим первообразные.
5) Выражаем функцию у через х.

Решается с помощью подстановки
$Y = uv$ (u и v –функции от x).
Тогда $y' = u'v + uv'$
Подставляем у и y' в уравнение и получаем:
$u'v + uv' + p(x)\, uv = f(x)$
$uv' + v(u' + p(x)u) = f(x)$
выбираем такую u, чтобы $u' + p(x)u = 0$
Тогда v находим из уравнения $uv' = f(x)$.
Затем функцию y находим.

Примеры

Пример 1. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;3)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен $3x^2 - 2$.

Решение: угловой коэффициент касательной – есть производная функции в данной точке, поэтому составим дифференциальное уравнение:

$$y' = 3x^2 - 2$$

Воспользуемся алгоритмом решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

Примеры

1) По определению дифференциала функции $dy = y' \cdot dx$, откуда $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

2) Домножим обе части равенства на dx

$$dy = (3x^2 - 2)dx$$

3) Проинтегрируем обе части равенства: левую по переменной y, правую – по x:

$$\int dy = \int (3x^2 - 2)dx$$

Примеры

$$y = \frac{3x^3}{3} - 2x + C$$

$y = x^3 - 2x + C, C \in R$ – *общее решение дифференциального уравнения, множество кривых с угловым коэффициентом в любой точке* $y = 3x^2 - 1$

4) Т.к. кривая проходит через точку $\mathrm{A}(1;3)$, подставим ее координаты в полученное уравнение и определим значение C:

$$3 = 1^3 - 2 \cdot 1 + C$$

$$C = 4$$

5) Частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

   $y = x^3 - 2x + 4$ – уравнение кривой.

   Ответ: $y = x^3 - 2x + 4$

Примеры

Пример 2. Концентрация лекарственного вещества в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации равна 0,02 концентрации вещества в данный момент. Определите зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,4 мг/л.

Решение:

Пусть К – концентрация вещества в данный момент времени. Скорость изменения концентрации K в момент t связана соотношением: $-\frac{dK}{dt} = 0{,}02K$, знак «–» означает убывание концентрации с ростом времени.

Примеры

$\frac{dK}{dt} = -0{,}02K$ – домножим обе части равенства на dt

$dK = -0{,}02Kdt$ – разделим обе части на K

$\frac{dK}{K} = -0{,}02dt$

$\ln K = -0{,}02t + C, C \in R$

$\ln K = \ln e^{-0{,}02t} + \ln C\,, C \in R$

$\ln K = \ln\ Ce^{-0{,}02t}, C \in R$

$K = Ce^{-0{,}02t}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение:

при $t = 0\ \ K_0 = 0{,}4\ мг/л$

$$0{,}4 = Ce^{-0{,}02\cdot 0}$$

$C = 0{,}4$

Таким образом, $K(t) = 0{,}4e^{-0{,}02t}$ – закон уменьшения концентрации вещества в крови.