

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

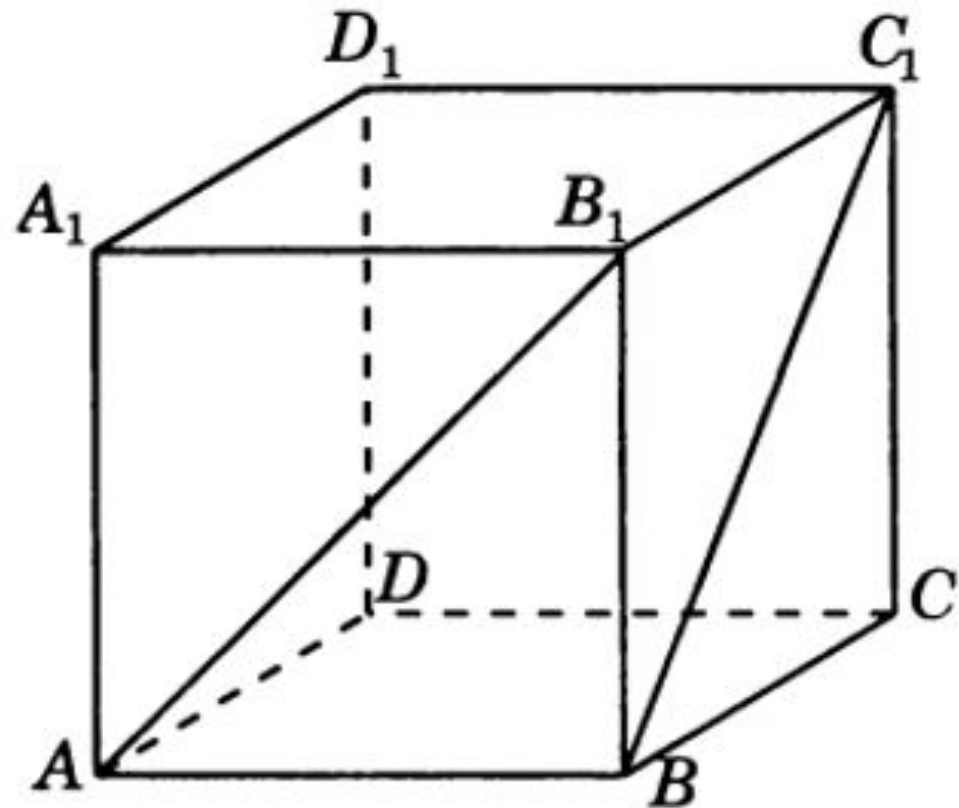
Подготовка к ЕГЭ

Презентацию подготовила: Грекова Т.А.,
учитель математики

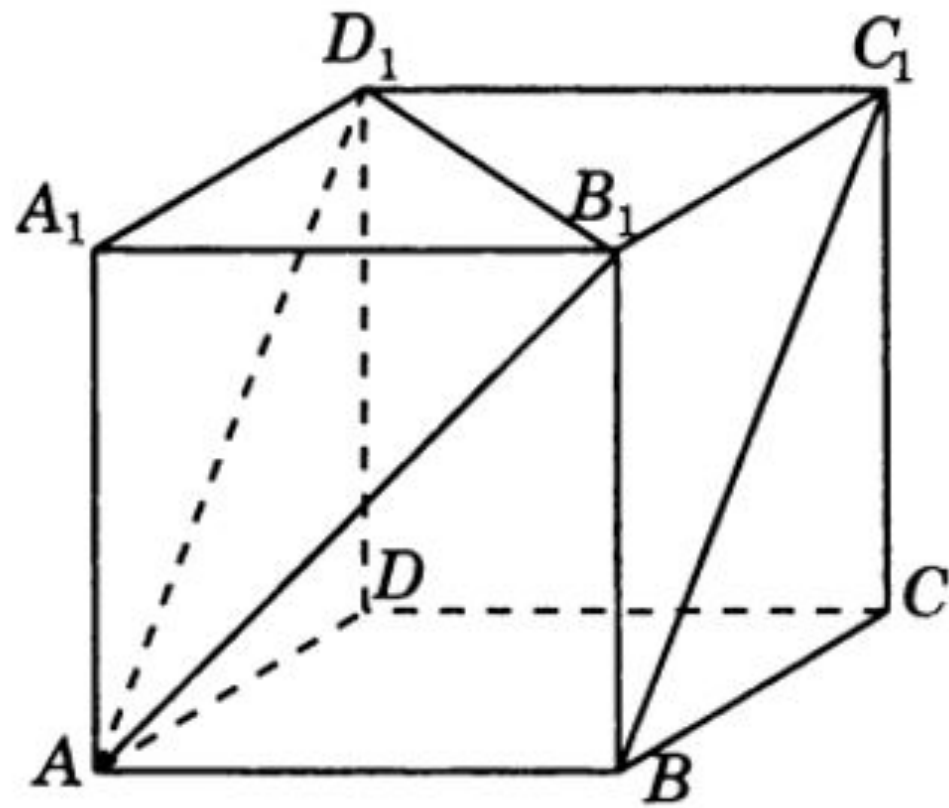
МКОУ «Лапшихинская СШ»

ЗАДАЧА №1.

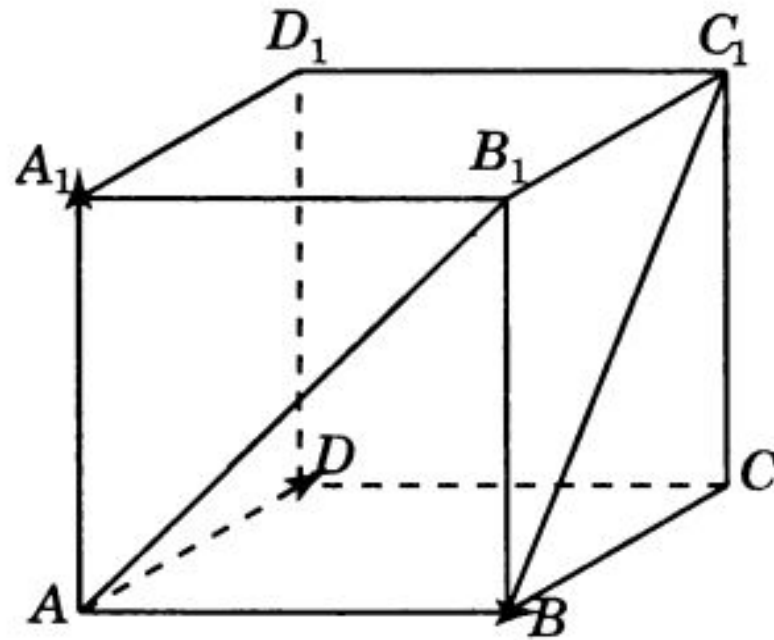
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .



Первое решение. Прямая AD_1 параллельна прямой BC_1 и, следовательно, угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AD_1 . Треугольник B_1AD_1 равносторонний и, значит, угол B_1AD_1 равен 60° .



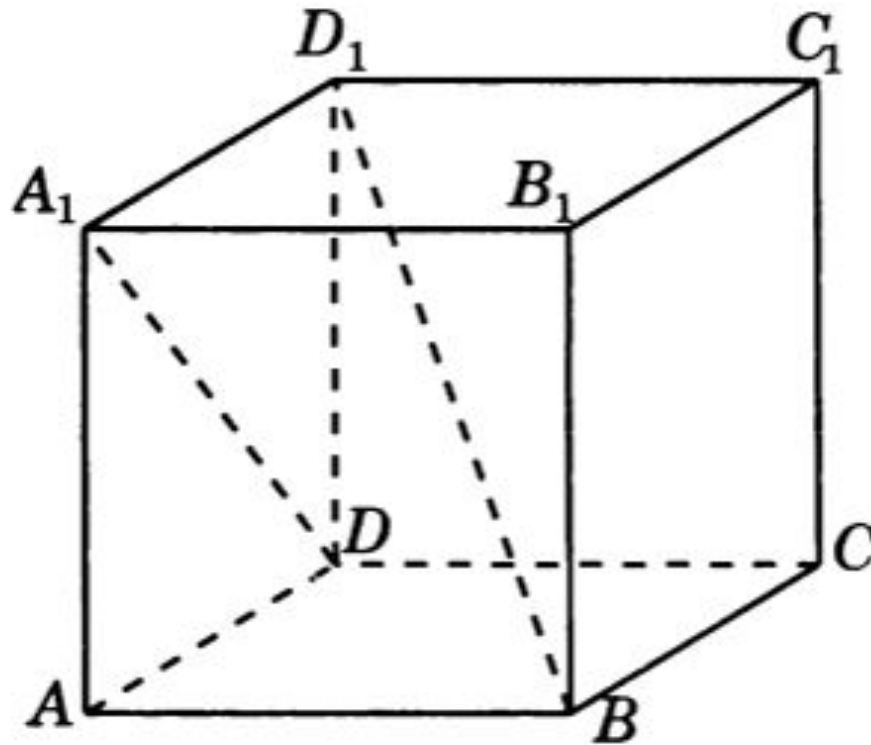
Второе решение. Введем систему координат, считая началом координат точку A , осями координат — прямые AB , AD , AA_1 . Вектор \vec{AB}_1 имеет координаты $(1, 0, 1)$. Вектор \vec{BC}_1 имеет координаты $(0, 1, 1)$. Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла φ между векторами \vec{AB}_1 и \vec{BC}_1 . Получим $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ и, значит, угол φ равен 60° . Следовательно, искомый угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен 60° .



Ответ. 60° .

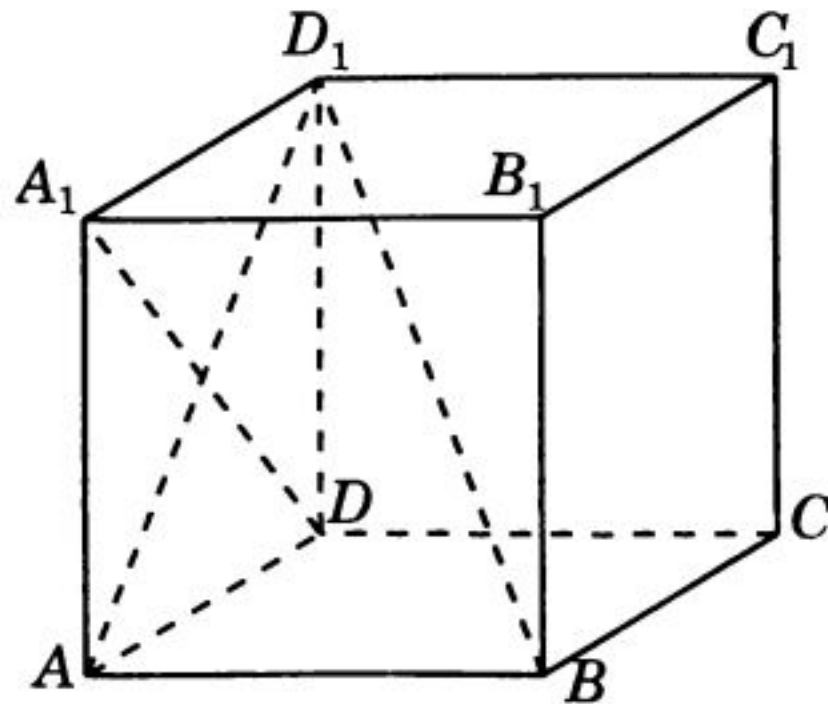
ЗАДАЧА №2.

В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1 .

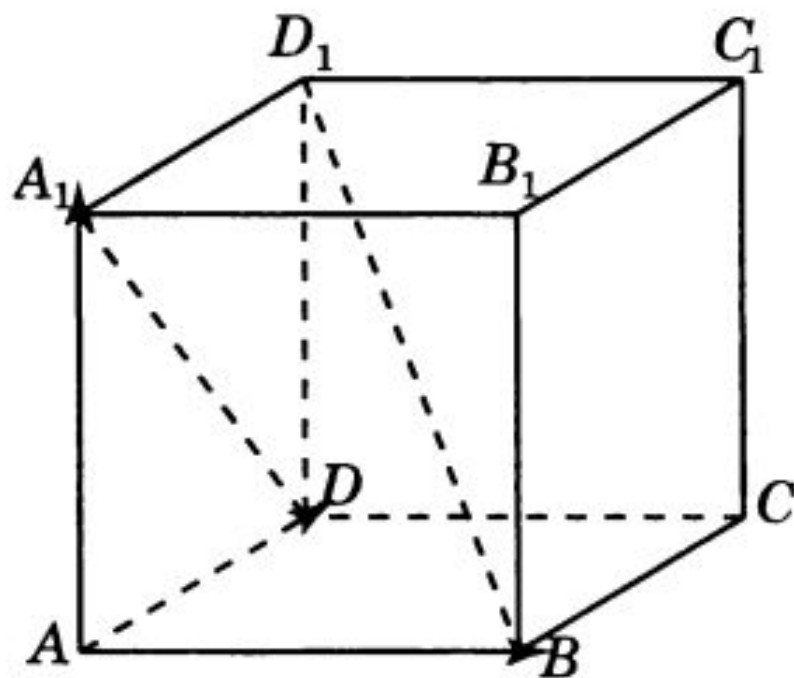


Первое решение. Рассмотрим ортогональную проекцию AD_1 прямой BD_1 на плоскость ADD_1 . Прямые AD_1 и DA_1 перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые DA_1 и BD_1 также перпендикулярны, т. е. искомый угол между прямыми DA_1

и BD_1 равен 90° .



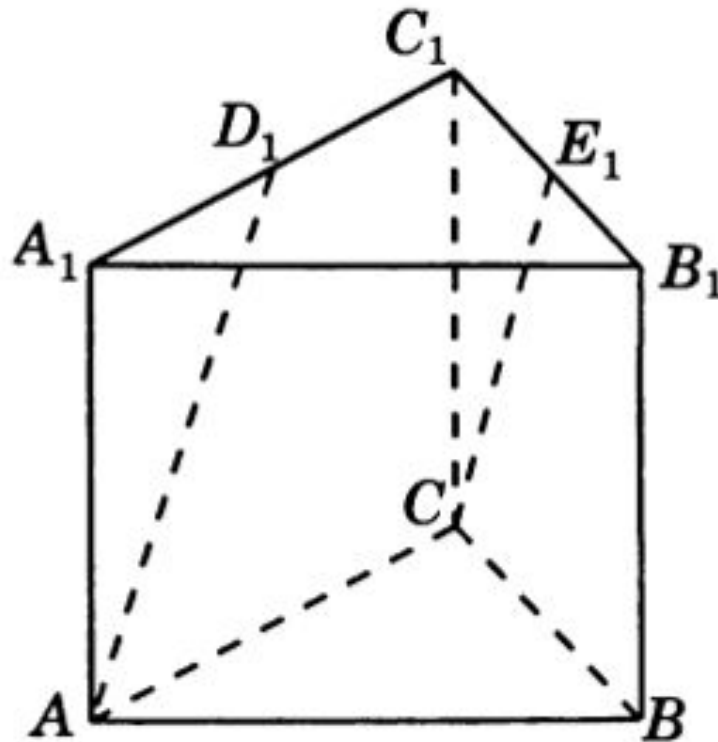
Второе решение. Введем систему координат, считая началом координат точку A , осями координат — прямые AB , AD , AA_1 . Вектор $\vec{DA_1}$ имеет координаты $(0, -1, 1)$. Вектор $\vec{BD_1}$ имеет координаты $(-1, 1, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90° .



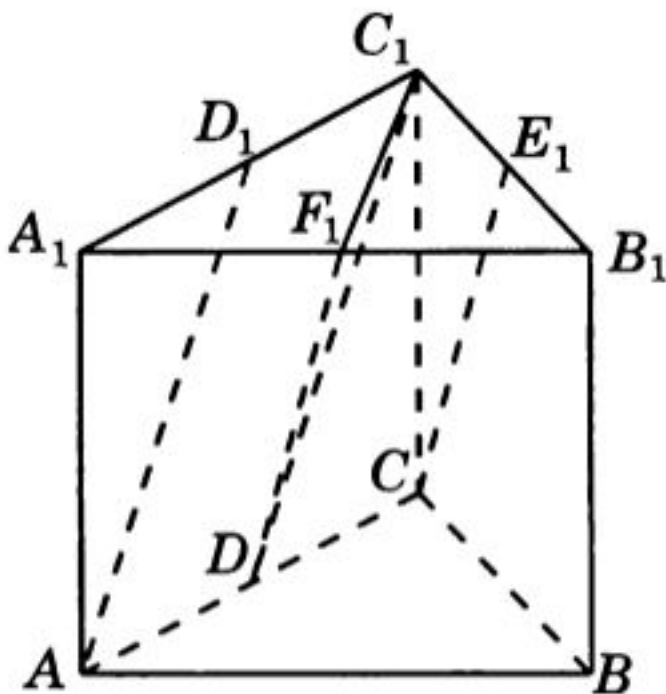
Ответ. 90° .

ЗАДАЧА №3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 , где D_1 и E_1 — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 .

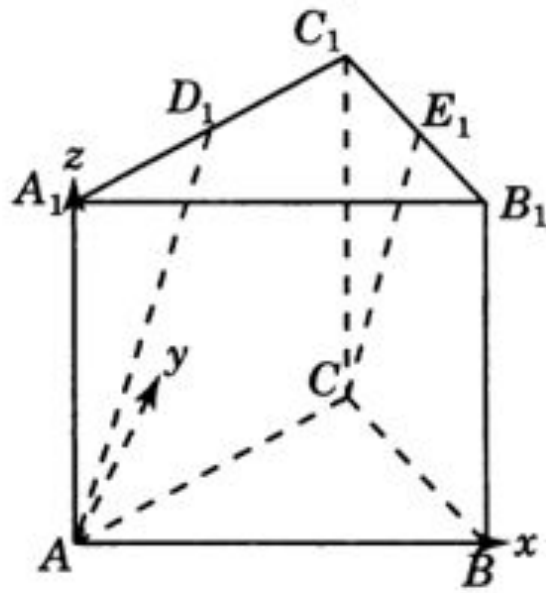


Первое решение. Обозначим D и F_1 соответственно середины ребер AC и A_1B_1 .



Прямые DC_1 и DF_1 будут соответственно параллельны прямым AD_1 и CE_1 . Следовательно, угол между прямыми AD_1 и CE_1 будет равен углу C_1DF_1 . Треугольник C_1DF_1 равнобедренный, $CD_1 = CF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя теорему косинусов, получаем $\cos \angle C_1DF_1 = 0,7$.

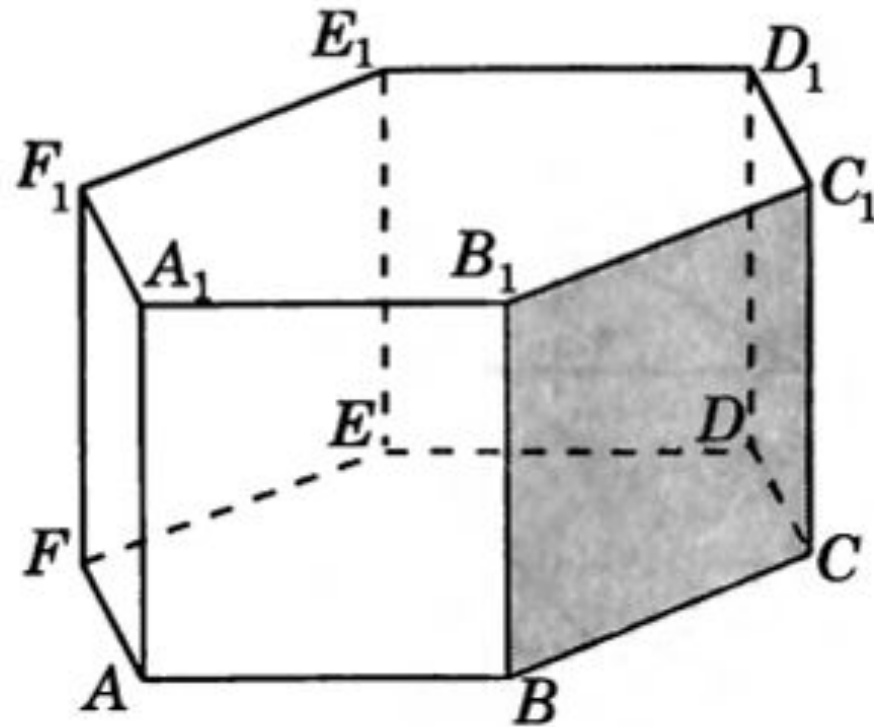
Второе решение. Введем систему координат, считая началом координат точку A , как показано на рисунке. Точка C имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, точка D_1 имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$, точка E_1 имеет координаты $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Вектор $\overrightarrow{AD_1}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Вектор $\overrightarrow{CE_1}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 равен косинусу угла между векторами $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CE_1}$. Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла φ между векторами. Получим $\cos \varphi = 0,7$.



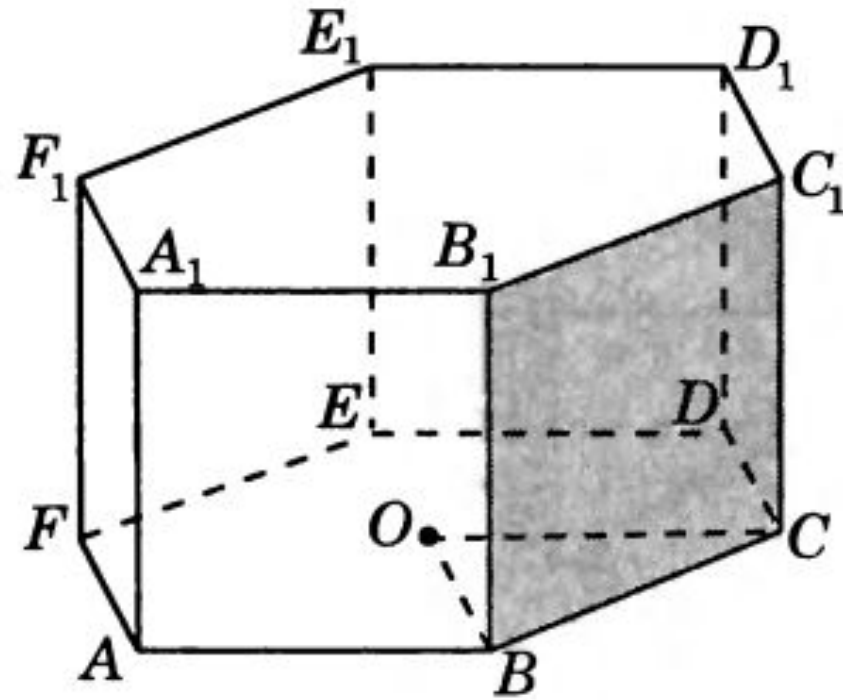
Ответ. 0,7.

ЗАДАЧА №4.

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1 .



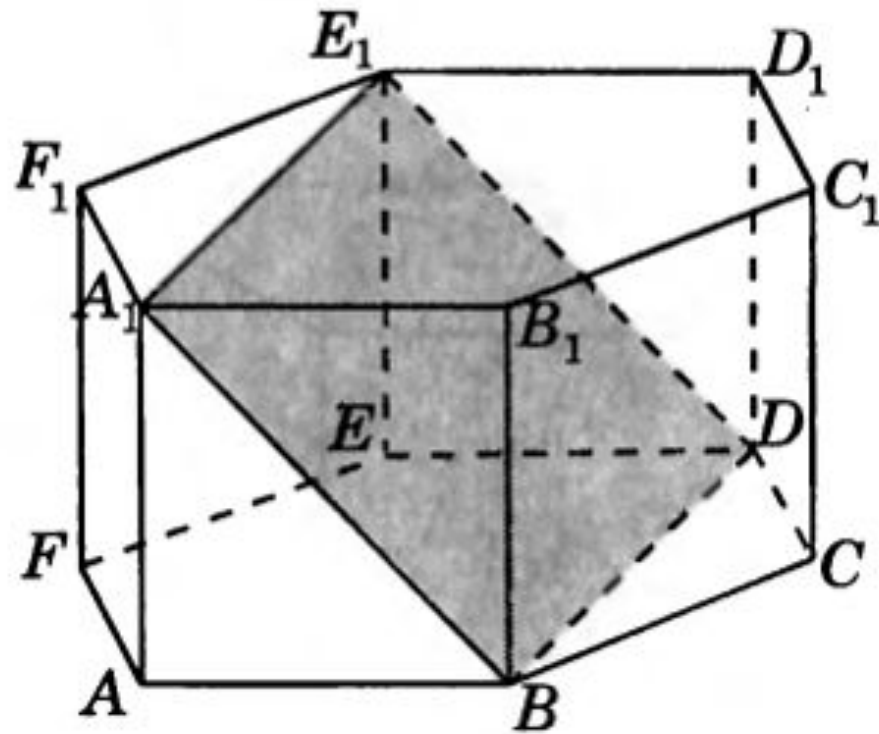
Решение. Пусть O — центр нижнего основания призмы. Прямая BO параллельна AF . Так как плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны, то искомым углом будет угол OBC . Так как треугольник OBC равносторонний, то этот угол будет равен 60° .



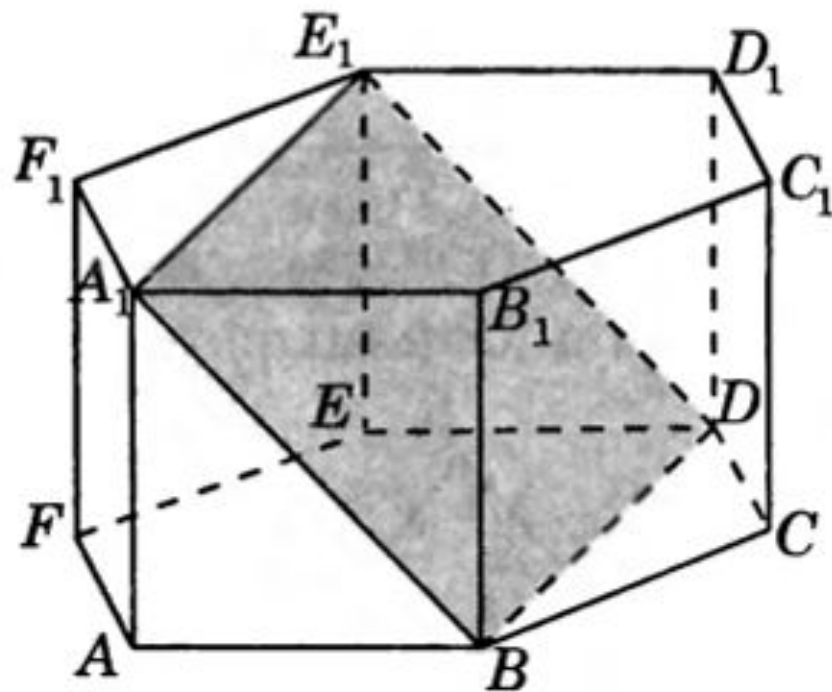
Ответ. 60° .

ЗАДАЧА №5.

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1 .



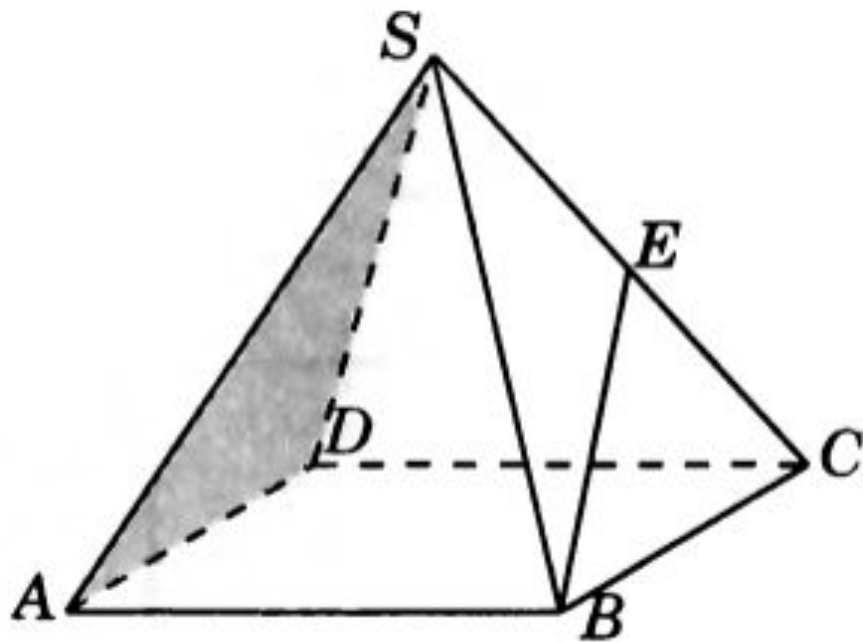
Решение. Так как прямые BB_1 и CC_1 параллельны, то искомый угол будет равен углу между прямой BB_1 и плоскостью BDE_1 . Прямая BD , через которую проходит плоскость BDE_1 , перпендикулярна плоскости ABB_1 и, значит, плоскость BDE_1 перпендикулярна плоскости ABB_1 . Следовательно, искомый угол будет равен углу A_1BB_1 , т. е. равен 45° .



Ответ. 45° .

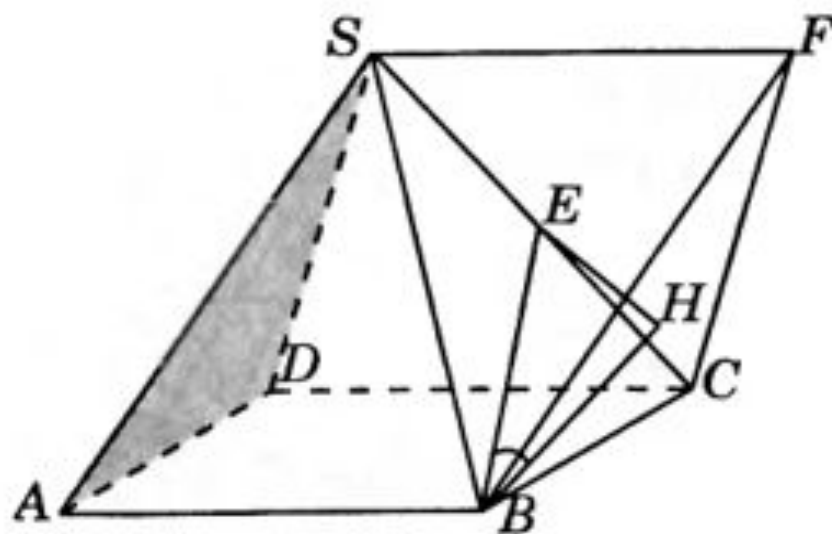
ЗАДАЧА №6.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD , где E — середина ребра SC .



Решение. Через вершину S проведем прямую, параллельную прямой AB , и отложим на ней отрезок SF , равный отрезку AB . В тетраэдре $SBCF$ все ребра равны 1 и плоскость BCF параллельна плоскости SAD . Перпендикуляр EH , опущенный из точки E на плоскость BCF ,

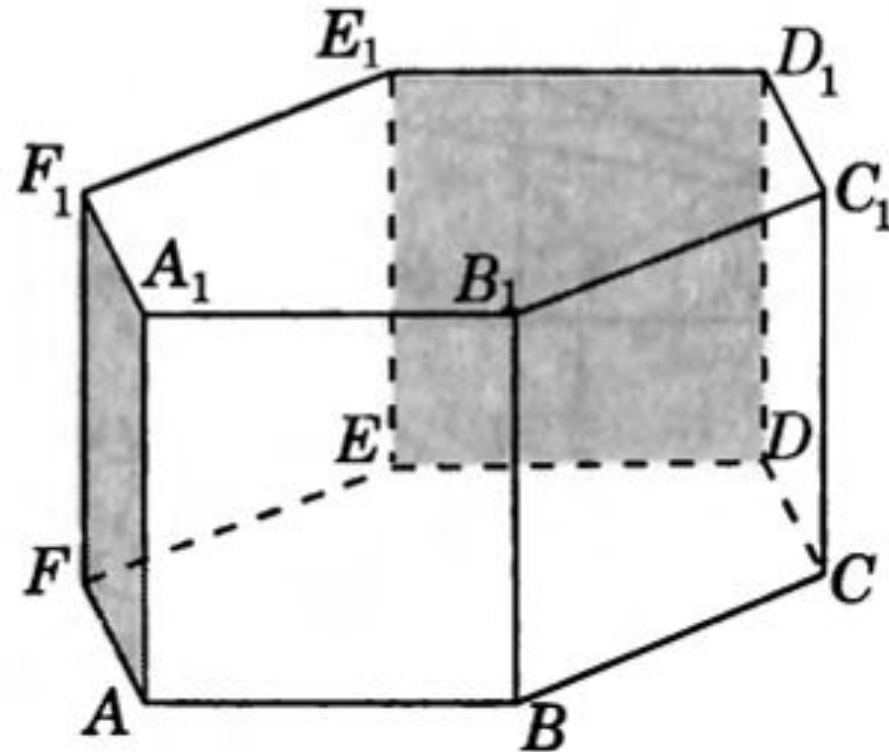
равен половине высоты тетраэдра, т. е. равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Угол между прямой BE и плоскостью SAD равен углу EBH , синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



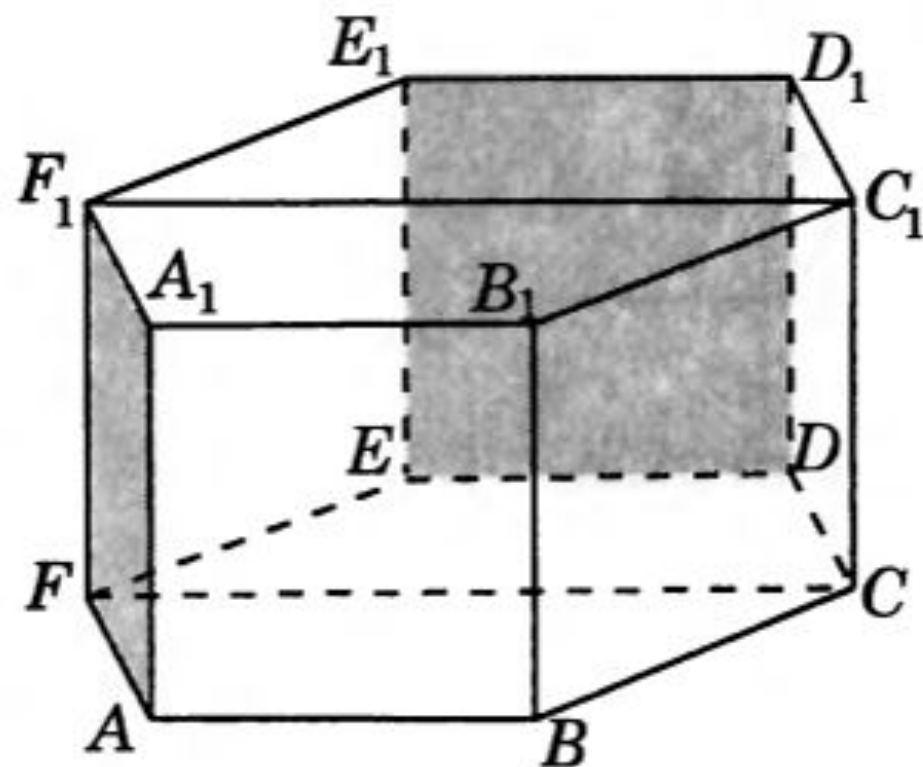
Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

ЗАДАЧА №7.

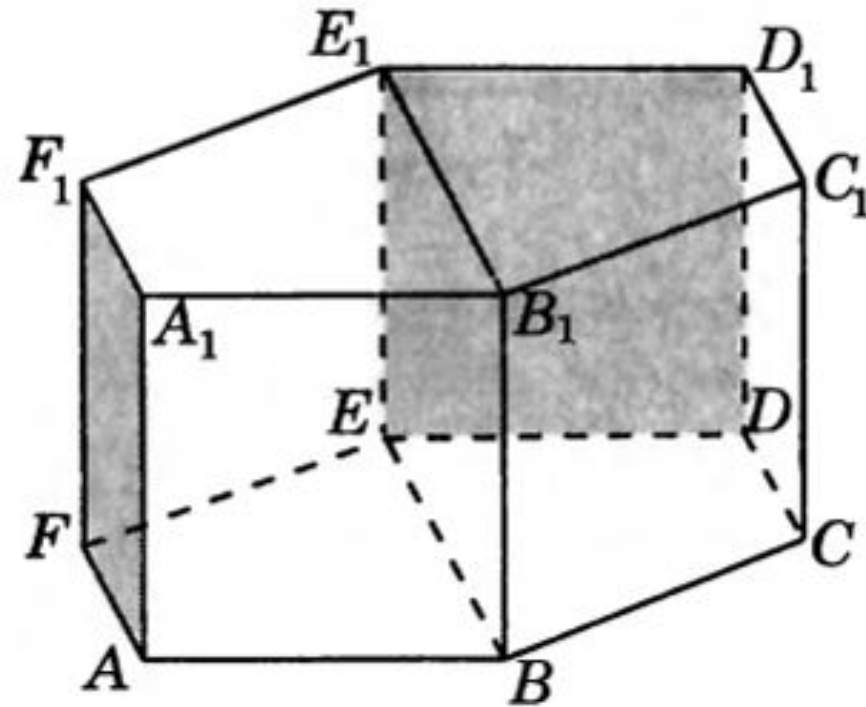
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1 .



Первое решение. Так как плоскость FCC_1 параллельна плоскости DEE_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями AFF_1 и FCC_1 . Так как плоскости AFF_1 и FCC_1 перпендикулярны плоскости ABC , то соответствующим линейным углом будет угол AFC , который равен 60° .



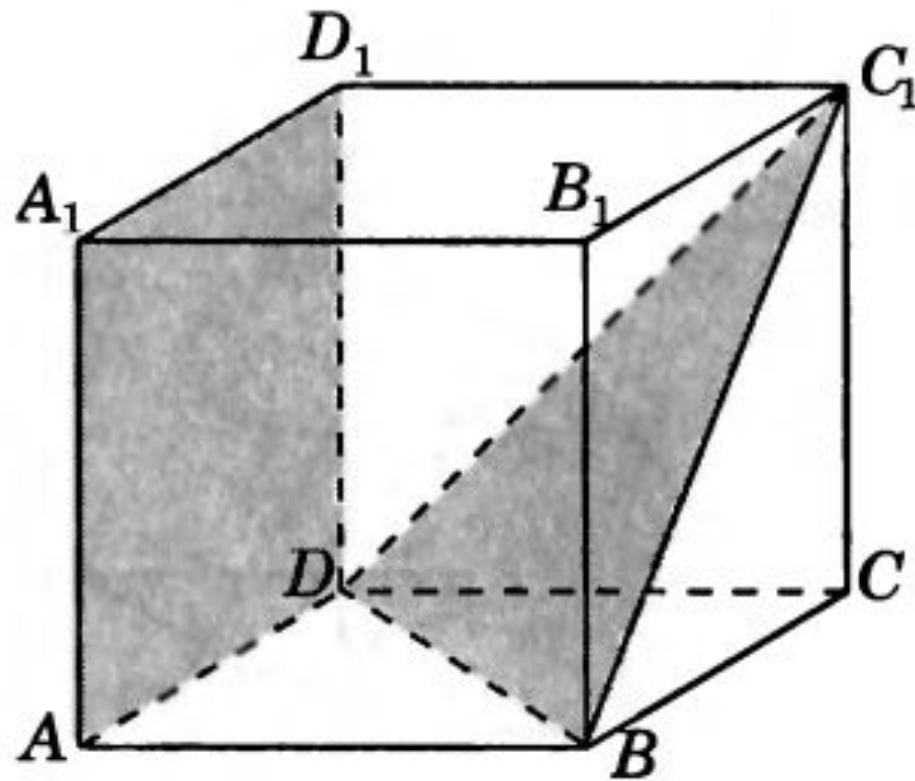
Второе решение. Так как плоскость AFF_1 параллельна плоскости BEE_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями BEE_1 и DEE_1 . Так как плоскости BEE_1 и DEE_1 перпендикулярны плоскости ABC , то соответствующим линейным углом будет угол BED , который равен 60° .



Ответ. 60° .

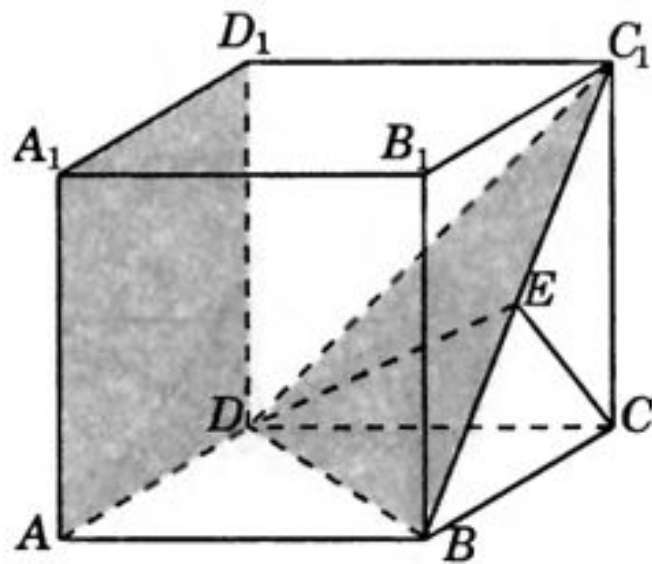
ЗАДАЧА №8.

В единичном кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ADD_1 и BDC_1 .



Решение. Так как плоскость ADD_1 параллельна плоскости BCC_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями BCC_1 и BDC_1 . Пусть E — середина отрезка BC_1 . Тогда прямые CE и DE будут перпендикулярны прямой BC_1 и, следовательно, угол CED будет линейным углом между плоскостями BCC_1 и BDC_1 . Треугольник CED прямоугольный, катет CD равен 1, катет CE равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

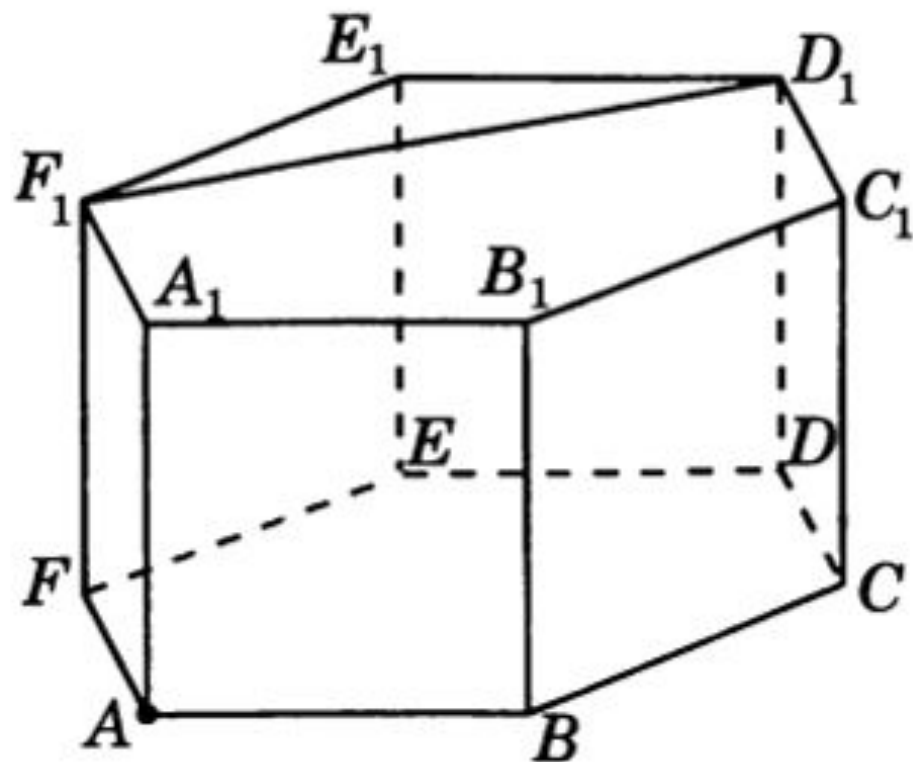
$$\operatorname{tg} \angle CED = \sqrt{2}.$$



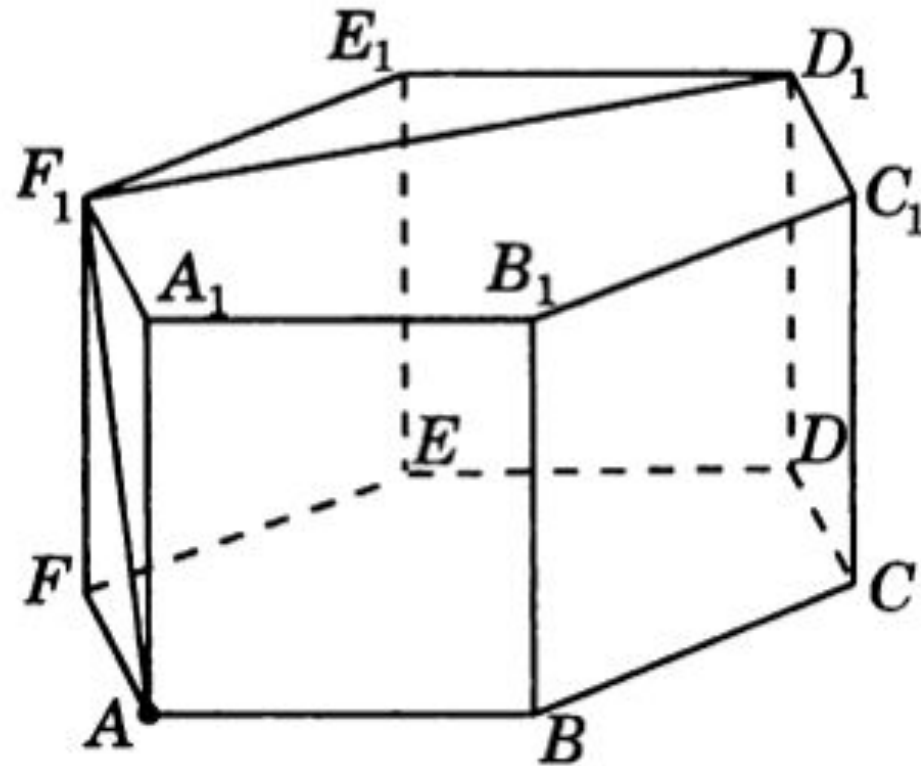
Ответ. $\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА №9.

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1 .



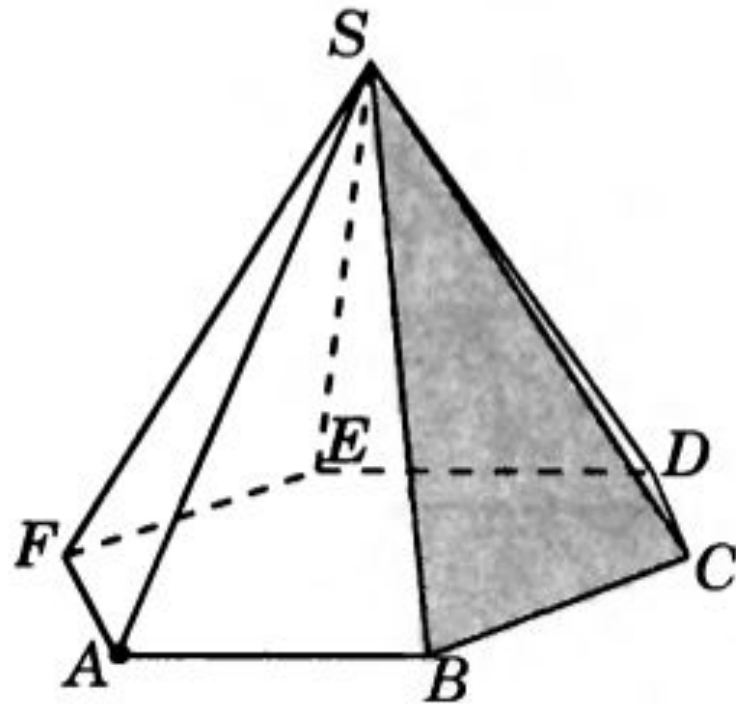
Решение. Так как прямая D_1F_1 перпендикулярна плоскости AFF_1 , то отрезок AF_1 будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую D_1F_1 . Его длина равна $\sqrt{2}$.



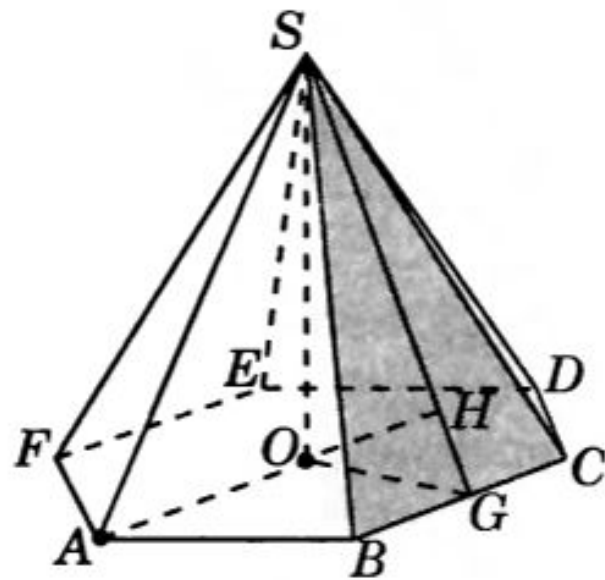
Ответ. $\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА №10.

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .



Первое решение. Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC . Пусть G — середина отрезка BC . Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC , является высота OH прямоугольного треугольника SOG . В этом треугольнике $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства $2S = OG \cdot SO = SG \cdot OH$. Откуда находим $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.



Второе решение. Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC . Пусть G — середина отрезка BC . Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC , является высота OH прямоугольного треугольника SOG . В этом треугольнике

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad SG = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad SO = \sqrt{3}.$$

Треугольники SOG и OHG подобны по трем углам. Следовательно, $SO : SG = OH : OG$. Откуда находим $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Использованы материалы вебинара «Повторение и обобщение. Задачи по геометрии в ЕГЭ по математике», проведённого центром математического образования КК КИПК, ноябрь 2016 г.

