

**Занятие по теме:**

# **«Тождественные преобразования»**



**Авторы:**

**Лазарян Е.С, Алекаева Н.А-**

**учителя математики МБОУ «Тучковская СОШ№1»**

**Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.**

*Вперёд! К знаниям!*

**М.И.**



## Немного теории

### Тождественное преобразование выражения

– это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему.

**Например,** выражение  $x+3-2$  можно заменить тождественно равным ему выражением  $x+1$ , эта замена есть тождественное преобразование выражения  $x+3-2$ .

**Еще пример:** замена выражения  $\frac{2 \cdot a}{6}$  выражением  $\frac{a}{3}$  также является тождественным преобразованием.

## Основные тождественные преобразования.

- Перестановка местами слагаемых, множителей.
- Раскрытие скобок.
- Группировка слагаемых, множителей.
- Замена разностей суммами, частных произведениями и обратно.
- Выполнение действий с числами
- Вынесение за скобки общего множителя.
- Приведение подобных слагаемых.
- Замена чисел и выражений тождественно равными им выражениями.
- Прибавление и вычитание одного и того же числа.



## Рассмотрим задачи на вычисление значений выражений.

### Пример №1:

Вычислите произведение:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1).$$

Решение:

Заметим, что значение первой скобки  $(2 + 1) = 3$ , если умножить первую скобку на выражение  $(2 - 1)$ , то получится формула сокращенного умножения разность квадратов

и значение будет равно 3.

Итак, умножим наше выражение на  $(2 - 1)$  и применим формулу разности квадратов 6 раз. Получим:



$$\begin{aligned}
 & (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \\
 & (2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \\
 & (2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1) \\
 & (2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^8 - 1)(2^8 + 1) \\
 & (2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = \\
 & \quad (2^{32} - 1)(2^{32} + 1) = (2^{64} - 1).
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $(2^{64} - 1)$ .



**Пример №2:**

**Вычислите произведение:**

$$P = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

**Решение:**

Упростим это выражение:

$$P = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \dots \frac{n^2 - 1}{n^2} =$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$



Полученное произведение можно  
сократить на

$$2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 (n - 1)^2 \cdot n.$$

После этого будем иметь:

$$P = \frac{n + 1}{2n}$$

**Ответ:**  $\frac{n + 1}{2n}$



## Пример №3:

Упростите сумму:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$$

Решение:

Вспомним, что такое факториал.

**Факториал числа** – это произведение натуральных чисел от 1 до самого числа (включая данное число).

Обозначается факториал (!).

Например:  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Запомни факториал 0 и 1 равен 1 ( $0! = 1$  и  $1! = 1$ ).



Итак, прибавим к данной сумме 1 и используем тождество  $K!+K! = (K+1)!$ , а затем вычтем 1.

**Получим:**

$$\begin{aligned}1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n! &= \\(1+1)!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n! &= \\2!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n! &= \\(2+1)!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n! &= \\3!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n! &= \\(1+3)!+\dots+n\cdot n! &= \\4!+\dots+n\cdot n! &=(n+1)!\end{aligned}$$

Вычитая 1 получим:  $(n+1)! - 1$ .

**Ответ:**  $(n+1)! - 1$ .



## Пример №4:

Вычислите сумму:



$$S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

Решение:

Воспользуемся тождеством  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$

Получим: 
$$S = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} =$$

$$\frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Ответ: 
$$\frac{16}{1-x^{16}}$$

## Пример №5:

Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

Решение:

Приведем сумму к общему знаменателю  $(a-b)(b-c)(c-a)$ :

$$S = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \cdot (-(b-c) - (c-a) - (a-b)) =$$
$$\frac{-1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \cdot (b-c+c-a+a-b) = 0$$

Ответ: 0.



**Пример №6:**

**Вычислите сумму:**

$$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)} + \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)}$$

**Решение:**

Приведем сумму к общему знаменателю  $(a-b)(b-c)(c-a)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(a+c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{(a+b)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} + \frac{(b+c)(b-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{c^2 - a^2 + a^2 - b^2 + b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \end{aligned}$$

**Ответ: 0.**

## Пример №7:

Вычислите сумму:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Решение:

Заметим, что данное выражение имеет смысл при  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$ . Будем проводить преобразования для таких значений переменных. Приведя все дроби к наименьшему общему знаменателю, получим:

$$\frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Заметив, что  $b-c=(a-c)-(a-b)$ , преобразуем числитель следующим образом:

$$\begin{aligned} a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) &= a^2(a-c) - a^2(a-b) - \\ b^2(a-c) + c^2(a-b) &= (a-c)(a-b)(a+b-c-a) = \\ (a-b)(b-c)(a-c). \end{aligned}$$

Таким образом, получили:

$$\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

**Ответ: 1.**



## Пример №8:

Вычислите сумму:

$$1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1 \text{ (n слагаемых).}$$

Решение:

Заметим, что  $1 = (10-1)/9$ ,  $11 = (100-1)/9$ ,  $111 = (1000-1)/9$ , ...  $11\dots 1$  (n единиц)  $= (10^n - 1)/9$ ,

Тогда искомая сумма

$S = 1/9(10+100+1000+\dots+10^n - n) = 1/9(S_n - n)$ , где  $S_n$  - сумма геометрической прогрессии,  $b_1=10$ ,  $q=10$ .

$$S_n = (10^{n+1} - 10)/9$$

$$S = 1/81 (10^{n+1} - 9n - 10)$$

**Ответ:**  $1/81 (10^{n+1} - 9n - 10)$



**Пример №9:**

**Вычислите сумму:**

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot n.$$

**Решение:**

Очевидно, ответ зависит от четности или нечетности  $n$ .  
Поэтому рассмотрим два случая.

**1) Пусть  $n$  четно. Тогда:**

$$S = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (n - 1) - n = -1$$

$$-1 - \dots - 1 = -\frac{n}{2}$$



2) Пусть  $n$  нечетно. Будем иметь:

$$S = (1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n - 1)) + n = -\frac{n-1}{2} + n = \frac{n+1}{2}$$

**Ответ:** если  $n$  четно, то  $S = -n/2$ ; если  $n$  нечетно, то  $S = (n + 1)/2$ .

**Подумайте:** нельзя ли два полученных выражения для  $S$  объединить в одной формуле?



**Спасибо за внимание!**

