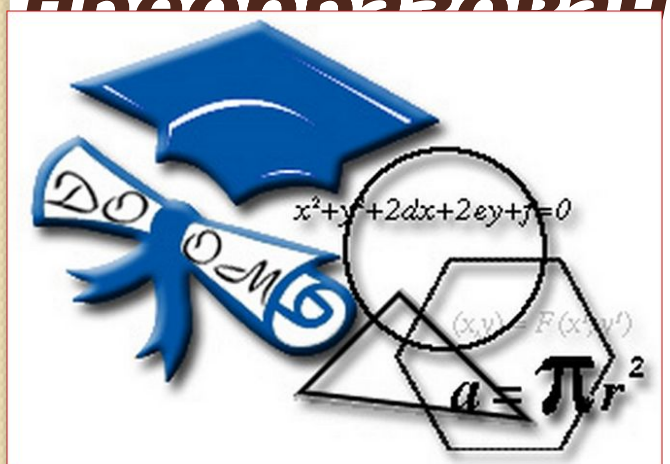
Занятие по теме:

«Тождественные преобразования»



Авторы:

Лазарян Е.С, Алекаева Н.А-

учителя математики МБОУ «Тучковская СОШ№1»

Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.

М.И.

Немного теории

Тождественное преобразование выражения – это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему.

Например, выражение $x+3-2$ можно заменить тождественно равным ему выражением $x+1$, эта замена есть тождественное преобразование выражения $x+3-2$.

Еще пример: замена выражения $\frac{2\cdot a}{6}$ выражением $\frac{a}{3}$ также является тождественным преобразованием.

Основные тождественные преобразования.

- Перестановка местами слагаемых, множителей.
- Раскрытие скобок.
- Группировка слагаемых, множителей.
- Замена разностей суммами, частных произведениями и обратно.
- Выполнение действий с числами
- Вынесение за скобки общего множителя.
- Приведение подобных слагаемых.
- Замена чисел и выражений тождественно равными им выражениями.
- Прибавление и вычитание одного и того же числа.

Рассмотрим задачи на вычисление значений выражений.

Пример №1:

Вычислите произведение:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1).$$

Решение:

Заметим, что значение первой скобки **(2 + 1)=3**, если умножить первую скобку на выражение **(2-1)**, то получится формула сокращенного умножения разность квадратов

и значение будет равно **3**.

Итак, умножим наше выражение на **(2 – 1)** и применим формулу разности квадратов 6 раз. Получим:

$$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$$
$$(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^2 – 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$$
$$(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^4 – 1)(2^4 + 1)$$
$$(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^8 – 1)(2^8 + 1)$$
$$(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^{16} – 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) =$$
$$(2^{32} – 1)(2^{32} + 1) = (2^{64} – 1).$$

Ответ: $(2^{64} – 1)$.

Пример №2:

Вычислите произведение:

$$P = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Решение:

Упростим это выражение:

$$P = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \ldots \frac{n^2 - 1}{n^2} =$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \ldots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

Полученное произведение можно сократить на

$$2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 (n - 1)^2 \cdot n.$$

После этого будем иметь:

$$P = \frac{n+1}{2n}$$

Ответ: $\frac{n+1}{2n}$

Пример №3:

Упростите сумму:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$$

Решение:

Вспомним, что такое факториал.

Факториал числа – это произведение натуральных чисел от 1 до самого числа (включая данное число). Обозначается факториал **(!)**.

Например: **3! = 1·2·3=6**

6! =1·2·3·4·5·6=720

Запомни факториал 0 и 1 равен 1 (0!=1 и 1!=1).

Итак, прибавим к данной сумме **1** и используем тождество **K!+KK! = (K+1)!,** а затем вычтем **1**.

Получим:

$$1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$(1+1)!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$2!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$(2+1)!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$3!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$(1+3)!+\ldots+n\cdot n! =$$
$$4!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!$$

Вычитая **1** получим: **(n+1)! – 1.**

Ответ: (n+1)! – 1.

Пример №4:

Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

Решение:

Воспользуемся тождеством $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$

Получим: $S = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} =$

$$\frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Ответ: $\frac{16}{1-x^{16}}$

Пример №5:

Вычислите сумму:

$$S=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

Решение:

Приведем сумму к общему знаменателю **(a-b)(b-c)(c-a):**

$$S=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\cdot\left(-(b-c)-(c-a)-(a-b)\right)=$$

$$\frac{-1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\cdot(b-c+c-a+a-b)=0$$

Ответ: 0.

Пример №6:

Вычислите сумму:

$$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}$$

Решение:

Приведем сумму к общему знаменателю **(a-b)(b-c)(c-a):**

$$\frac{(a+c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{(a+b)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}+\frac{(b+c)(b-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{c^2-a^2+a^2-b^2+b^2-c^2}{(a-d)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{(a-d)(b-c)(c-a)}=0$$

Ответ: 0.

Пример №7:

Вычислите сумму:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Решение:

Заметим, что данное выражение имеет смысл при **a≠b, a≠c, b≠c**. Будем проводить преобразования для таких значений переменных. Приведя все дроби к наименьшему общему знаменателю, получим:

$$\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Заметив, что **b-c=(a-c)-(a-b)** , преобразуем числитель следующим образом:

$$\mathbf{a^2(b-c) - b^2(a-c)+c^2(a-b)=a^2(a-c) - a^2(a-b) - b^2(a-c)+c^2(a-b) =(a-c)(a-b)(a+b-c-a) = (a-b)(b-c)(a-c).}$$

Таким образом, получили:

$$\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

Ответ: 1.

Пример №8:

Вычислите сумму:

1 + 11 + 111 + … + 111...1 (n слагаемых).

Решение:

Заметим, что 1=(10-1)/9, 11=(100-1)/9, 111= (1000-1)/9,...11...1(n единиц) =$(10^n-1)/9$,

Тогда искомая сумма

$S = 1/9(10+100+1000+...+10^n - n) = 1/9(Sn - n)$, где Sn - сумма геометрической прогрессии, b1=10, q=10.

$Sn = (10^{n+1}-10)/9$

$S = 1/81 (10^{n+1}-9n-10)$

Ответ: $1/81 (10^{n+1}-9n-10)$

Пример №9:

Вычислите сумму:

$$S=1-2+3-4+-+(-l)^{n+1}\cdot n.$$

Решение:

Очевидно, ответ зависит от четности или нечетности n. Поэтому рассмотрим два случая.

1) **Пусть n четно.** Тогда:

$$S = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + - + (n - 1) - n) = -1$$

$$- 1 - ...- 1 = - \frac{n}{2}$$

2) **Пусть n нечетно.** Будем иметь:

S = (1 - 2 + 3 - 4 + …- (n - 1)) + n= $-\frac{n-1}{2}+n=\frac{n+1}{2}$

Ответ: если n четно, то S = -n/2; если n нечетно, то S = (n + 1)/2.

Подумайте: нельзя ли два полученных выражения для S объединить в одной формуле?

Спасибо за внимание!