Популяционная динамика животных и микроорганизмов

Животные: простейшая модель

Имеется некоторая популяция одного вида (микроорганизмы, зайцы и т.п.), в которой происходят жизненные процессы во всем их многообразии.

Задача. Найти законы изменения численности популяции во времени.

Основные допущения:
1 . Существуют только процессы размножения и естественной гибели, скорости которых пропорциональны численности особей в данный момент времени.
2. Не учитываем биохимические, физиологические процессы.

3. Нет борьбы между особями за место обитания, за пищу (бесконечно большое пространство и количество пищи).

4. Рассматриваем только одну популяцию, нет хищников.

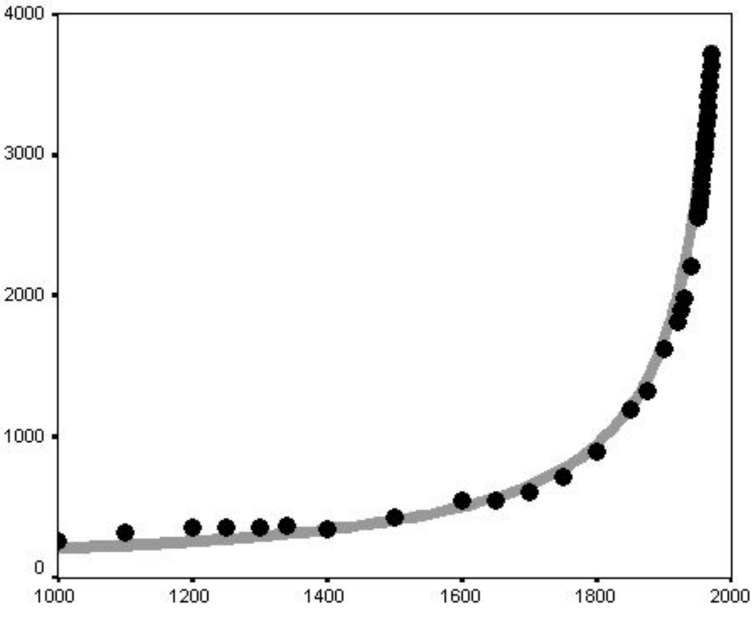
Животные: простейшая модель

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx$$

$$\mathrm{x} = x_0 e^{(a-b)t}$$

x - количество животных
a - коэффициент размножения
b – коэффициент гибели животных

Люди: динамика популяции



Гиперболическая кривая

$$\mathrm{N} = \frac{C}{T - T_0} = \frac{2 * 10^{11}}{T - 2025}$$

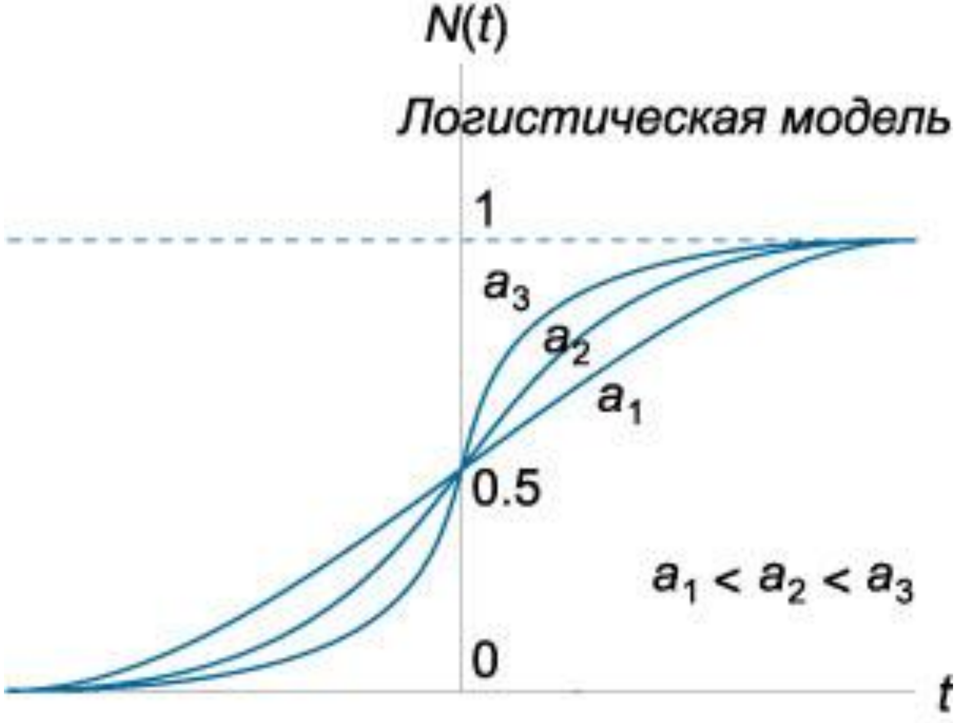
Форстер (1960), Хостер (1975),
Шкловский (1980)

Животные: модель Ферхюльста

Логистическая кривая

$$\frac{dN}{dt} = aN(1 - \frac{N}{b})$$

$$N(t) = \frac{N_0 b}{N_0 + (b - N_0)e^{-at}}$$



Взаимодействие “хищник-жертва”
Модель Лотки-Вольтерра

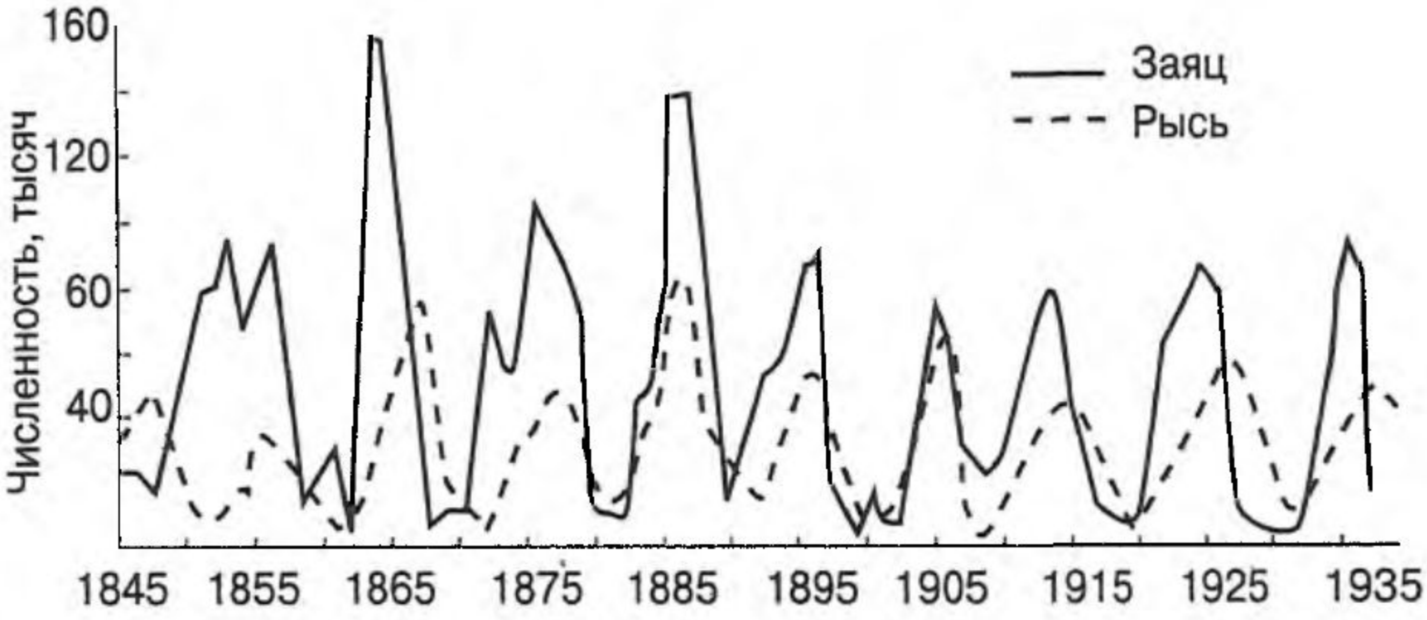
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma x - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta xy - \lambda y \end{cases}$$

жертва

хищник

Существует стационарное состояние:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{ст1} = \dfrac{\lambda}{\beta} \\ y_{ст2} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases}$$



Взаимодействие “хищник-жертва”
Модель Лотки-Вольтерра

*Фазовый портрет (связь между **x** и **y**):*

$$x = \frac{x}{x_{cm}}$$

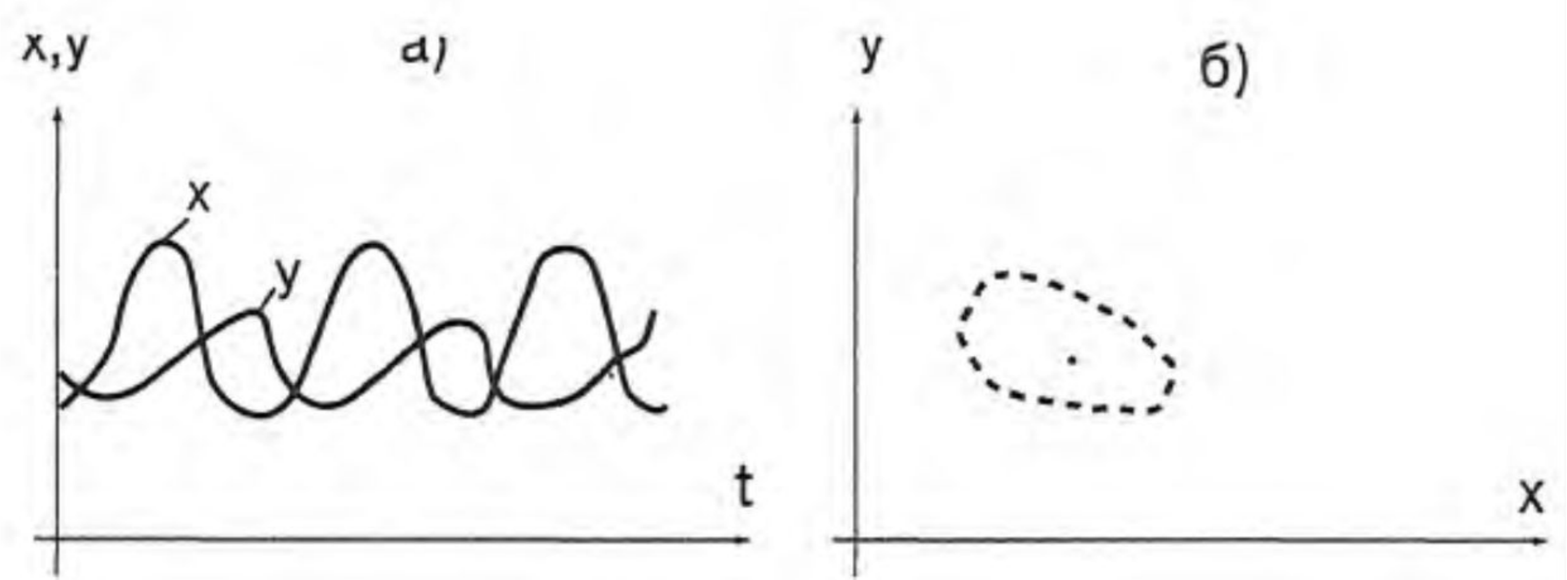
$$y = \frac{y}{y_{cm}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma(1-y)x \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda(1-x)y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda(1-x)y}{\gamma(1-y)x}$$

$$\frac{1-y}{y}dy = -\frac{\lambda(1-x)}{ax}dx$$

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)^{\lambda}\left(\frac{y}{e^y}\right)^{\gamma} = const$$



Взаимодействие “хищник-жертва”: малые отклонения от равновесия

$$x(t) = x_{cm} + \Delta x(t)$$

$$y(t) = y_{cm} + \Delta y(t)$$

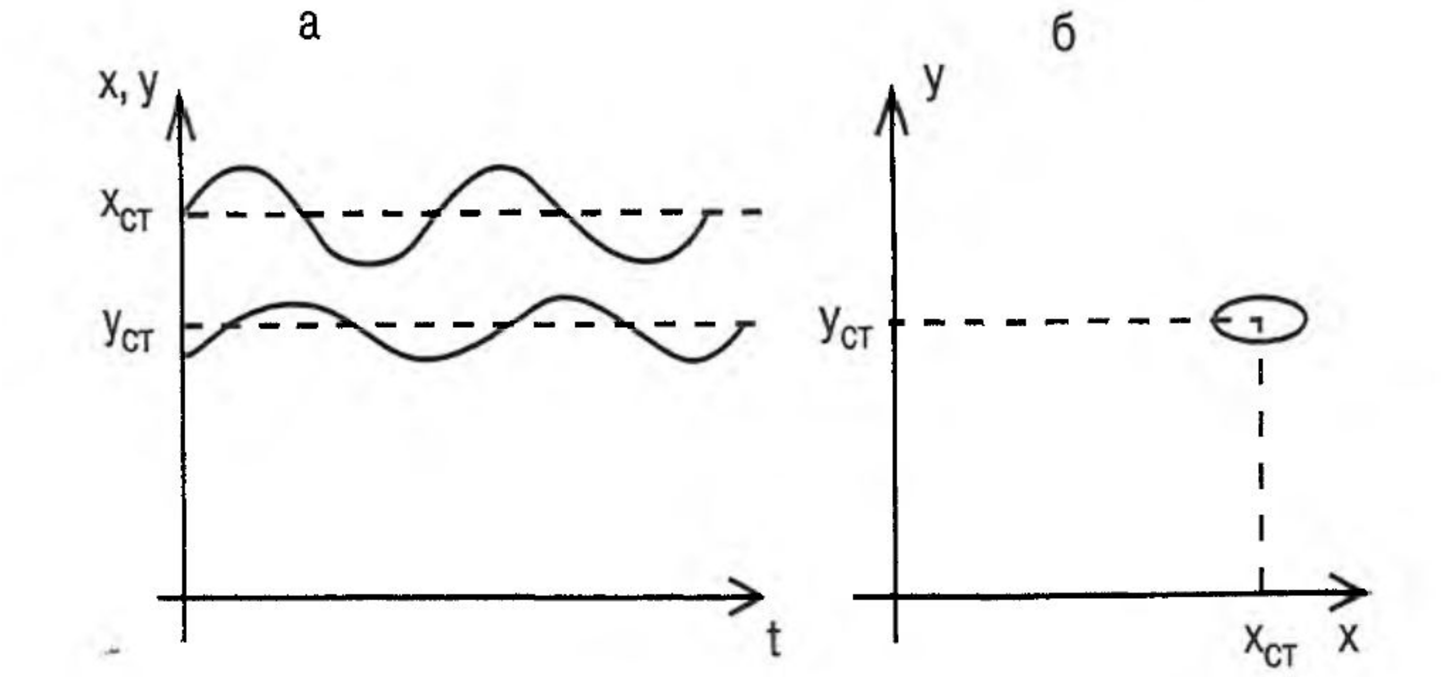
$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\omega^2 \Delta x$$

$$\Delta x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$\Delta y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\frac{d^2 \Delta y}{dt^2} = -\omega^2 \Delta y$$

$$\omega^2 = \lambda\gamma$$



Эпидемический процесс

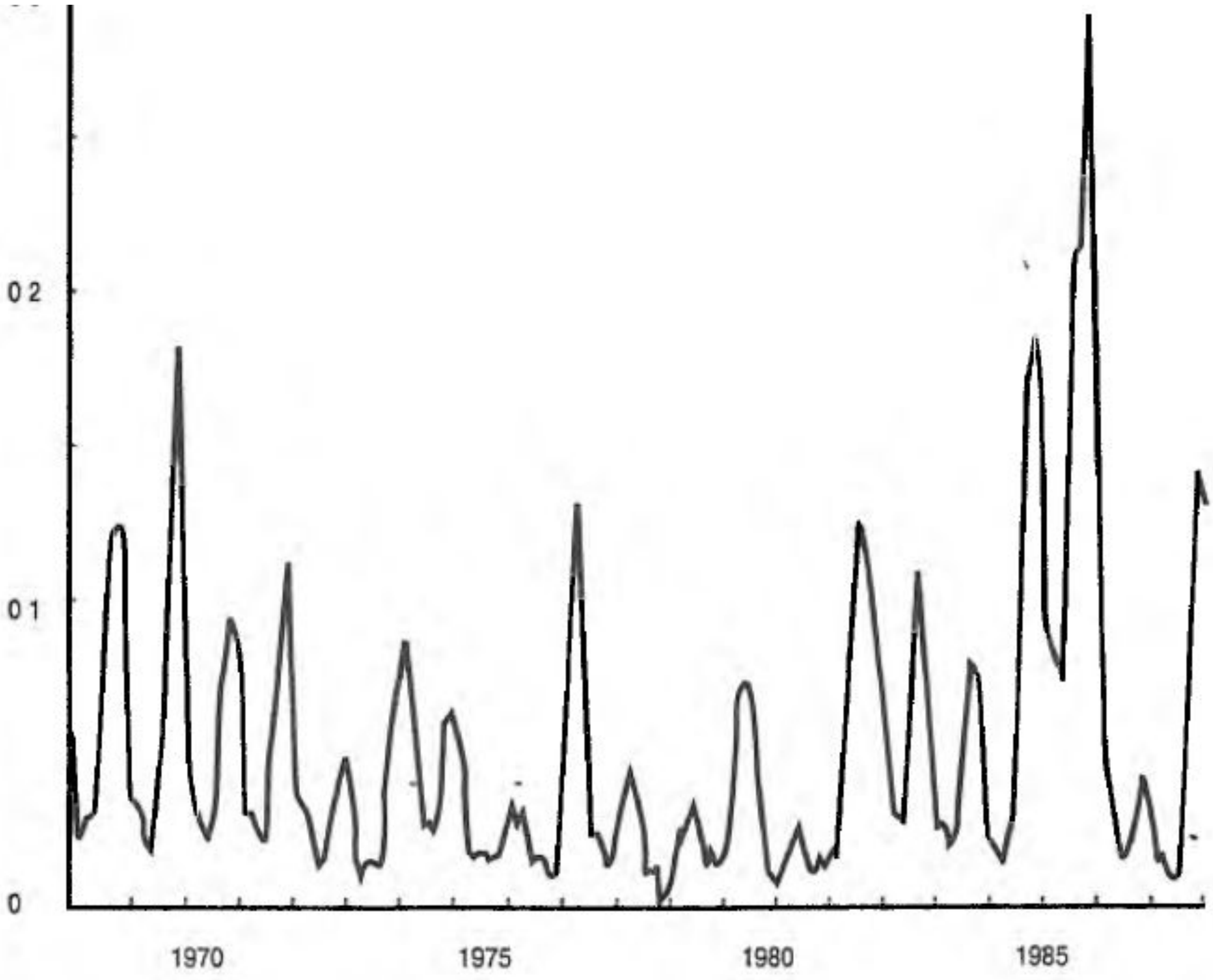


Рис. 1 Заболеваемость коклюшем (число заболевших на 1000 человек) в Москве в 1968—1987 годах Данные регистрировались раз в месяц

Моделирование эпидемического процесса

Сделаем ряд упрощений:

1) рассмотрим инфекционные заболевания с пожизненным иммунитетом

2) будем считать, что численность популяции людей не изменяется с течением времени

3) популяция возбудителя однородна

4) популяция людей однородна

5) вероятность смерти человека не зависит от возраста;

6) вероятность выздоровления человека не зависит от времени, прошедшего с момента заражения

7) вероятность передачи инфекции не зависит от времени года

Моделирование эпидемического процесса

Три состояния человека:
1) восприимчивый, т.е. не болеющий и еще не болевший этим инфекционным заболеванием человек, который впоследствии может заразиться;
2) инфицированный человек;
3) иммунный, т.е. имеющий иммунитет в результате перенесенного заболевания человек.

N -общая численность людей

N_I -число инфицированных

N_S -число восприимчивых

Моделирование эпидемического процесса

Переход “восприимчивые” - “инфицированные”	$-\alpha N_s N_I dt$
Переход “инфицированные” - ”здоровые”	$+\beta N_I dt$
Переход “восприимчивые” - “умершие”	$-\gamma N_s dt$
Переход “инфицированные” - “умершие”	$-\gamma N_I dt$
Рождение “восприимчивых”	$+\gamma N dt$

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha N_S N_I - \beta N_I - \gamma N_I$$

$$R = \alpha N \tau$$

$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha N_S N_I + \gamma (N - N_S)$$

$R > 1$ эпидемия

Моделирование эпидемического процесса: случай малых отклонений

$$\frac{dw}{dt} = \gamma(R-1)v \qquad \tau = \frac{2}{\gamma R} \qquad w(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma R v - \beta w \qquad \omega \approx \sqrt{\beta\gamma(R-1)} \qquad v(t) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi_2)$$

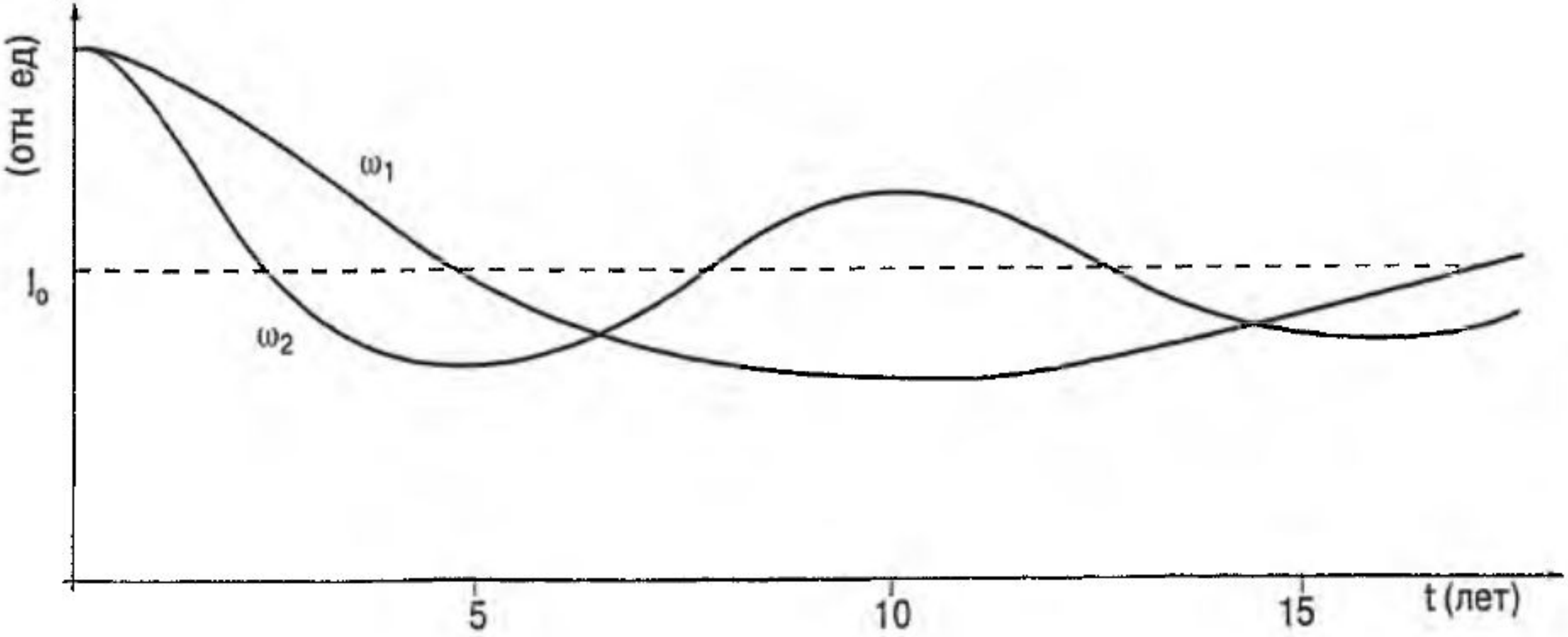


Рис. 2 Зависимость относительного числа инфицированных членов популяции от времени в простейшей модели

Эпидемический процесс: усложнение модели

Учет “лаг-фазы” инфекции

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha N_S N_I(t-\Delta t) - \beta N_I - \gamma N_I$$

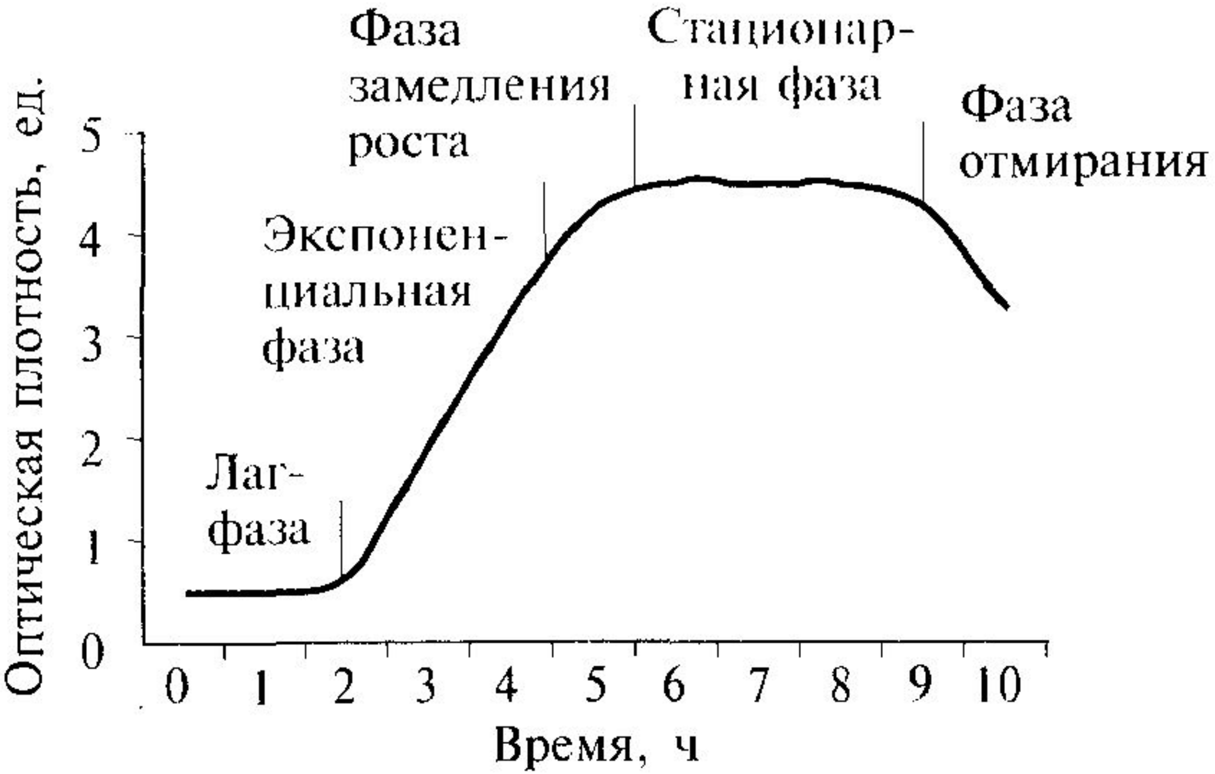
$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha N_S N_I(t-\Delta t) + \gamma(N - N_S)$$

Учет заразности инфекции от времени года

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha(t) N_S N_I - \beta N_I - \gamma N_I$$

$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha(t) N_S N_I + \gamma(N - N_S)$$

Динамика микробных популяций



Динамика микробных популяций

Культивирование клеток -> *изучение клеточного цикла in vitro (культуры, линии клеток).*

Фазы роста:

1) индукционный (лаг-фаза) – адаптация клеток к среде, перестройка их метаболизма;
2) экспоненциальный рост (много митозов);
3) линейный рост (мало митозов);
4) замедление роста;
5) стационарная фаза;
6) отмирание культуры.

Причины замедления роста – *истощение субстрата, накопление токсических продуктов и др.*

Экспоненциальная фаза роста

$$\frac{dN}{dt} = \mu N$$

$$N_c = N_{c0}\, e^{\mu\, t}$$

Предположим, что скорость роста лимитируется одним субстратом S:

$$\begin{cases} N + S \xleftrightarrow{K_S} NS \\ NS \xrightarrow{\mu_m} 2N + P \end{cases}$$

$$N_c = [NS] + N = \frac{NS}{K_S} + N$$

$$[NS] = \frac{N\,S}{K_S} = \frac{N_c\,S}{K_S + S}$$

$$\frac{dN_c}{dt} = \mu_m [NS] = \frac{\mu_m N_c S}{K_S + S}$$

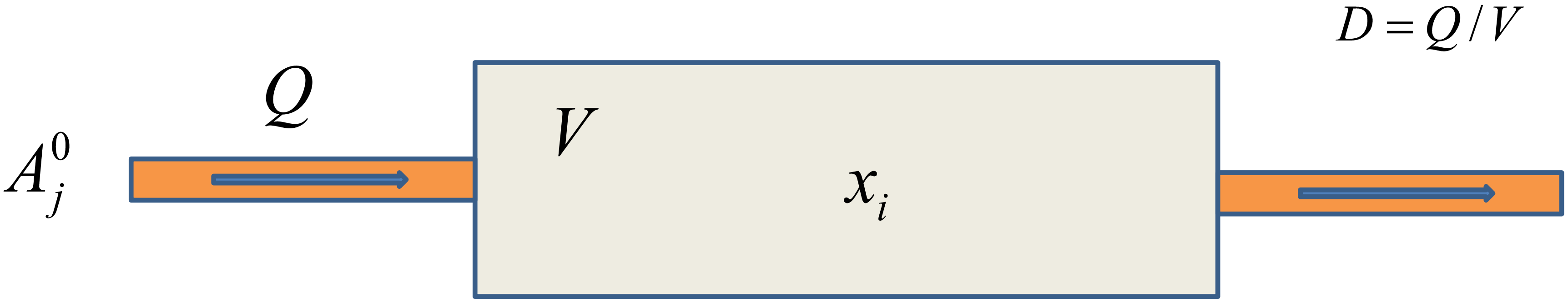
удельная скорость роста:

$$\mu = \frac{\mu_m S}{K_S + S}$$

(уравнение Моно)

Типичные значения: μ_m ~ 10-2 ÷ 10-5 с-1,
K_S ~ 10-2 ÷ 10-8 М.

Рост микробных популяций : хемостат

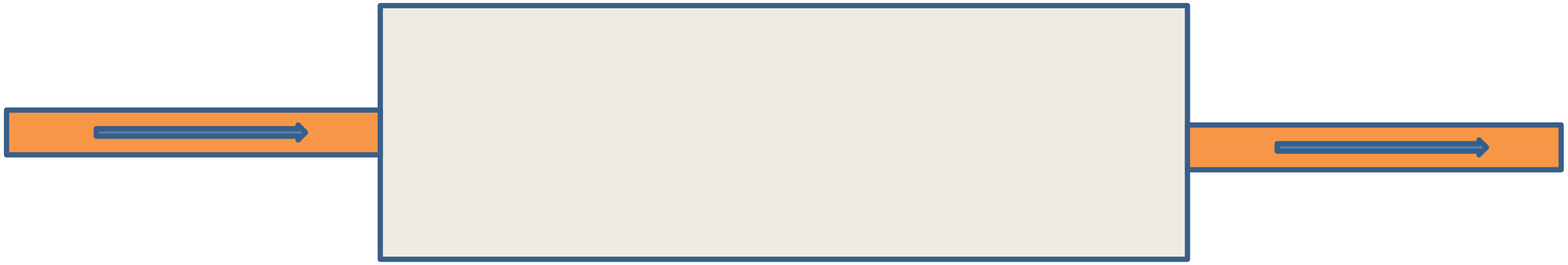


μ - удельная скорость роста, зависит от концентрации пит. веществ

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu_i\left(\vec{A}\right)x_i - Dx_i, i \in (1, n)$$

$$\frac{dA_j}{dt} = (A_j^0 - A_j)D - \sum_k a_{jk}\mu_k\left(\vec{A}\right)x_k, j \in (1, m)$$

Рост микробных популяций : хемостат



Стационарное состояние

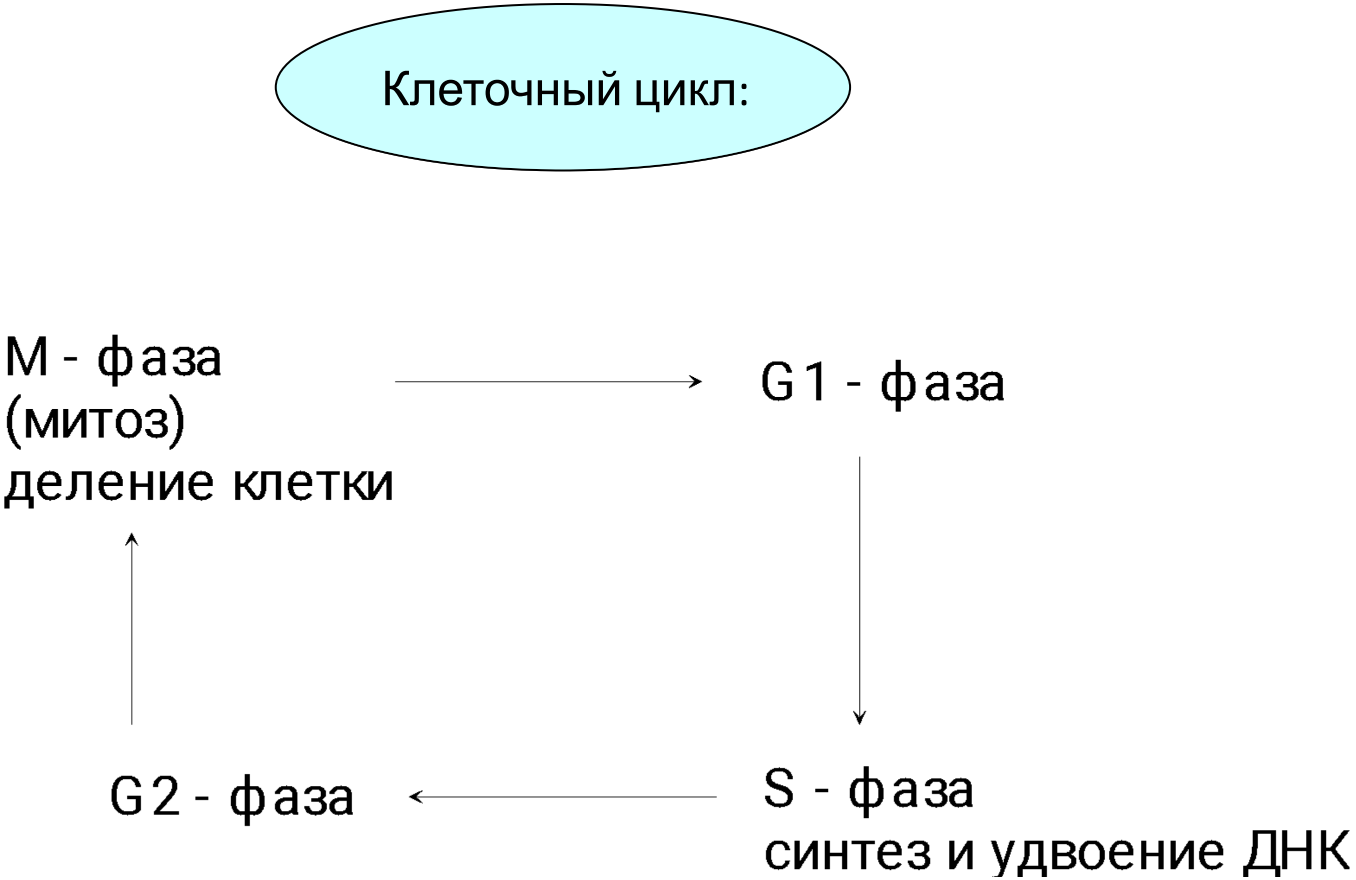
$$\mu_i\left(\vec{A}\right) = Dx_i, i \in (1,n)$$

$$A_j = A_j^0 + \sum_k a_{jk} x_k, j \in (1,m)$$

Закон Гаузе:

Нетривиальные решения существуют только при $m \geq n$

Клеточный рост



Клеточный цикл:

M - фаза
(митоз)
деление клетки

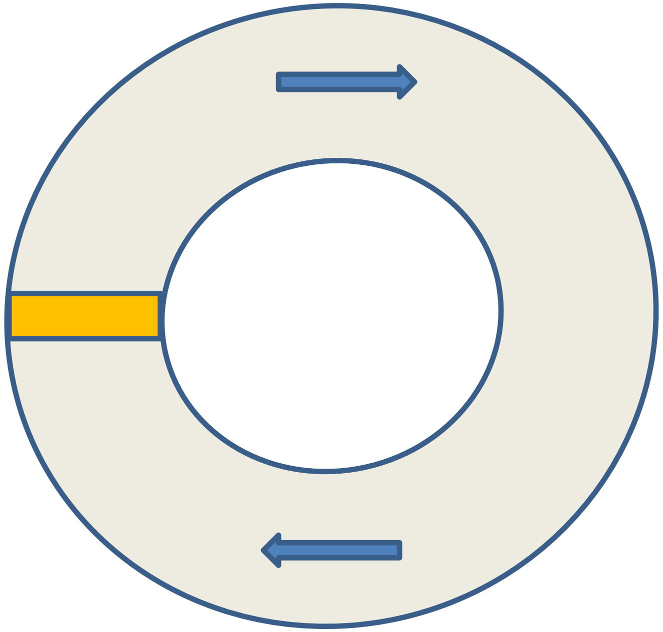
G1 - фаза

S - фаза
синтез и удвоение ДНК

G2 - фаза

1 час (эмбриональные и микробные клетки)
~10 лет (гепатоциты, нейроны).

Клеточный цикл:



Волновое уравнение

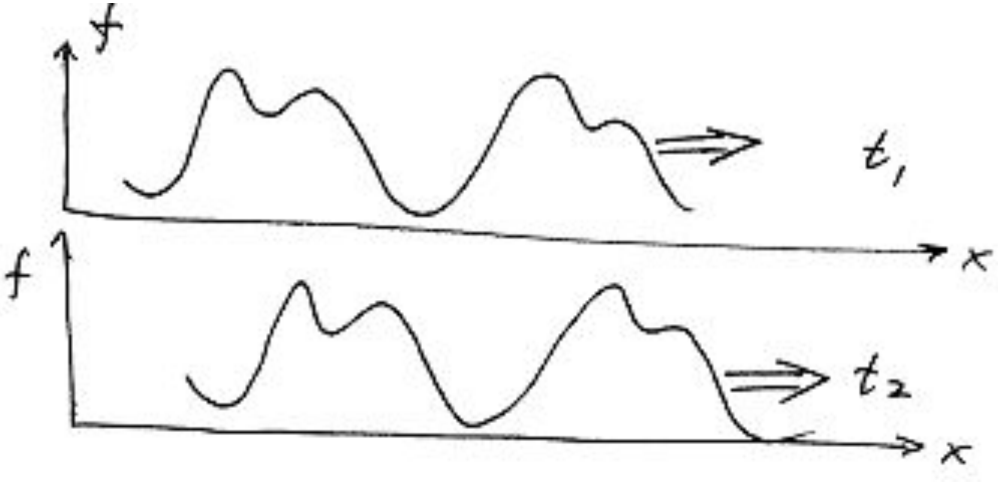
$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} = 0$$

Волновое уравнение: неограниченный случай $s \in [0, \infty)$

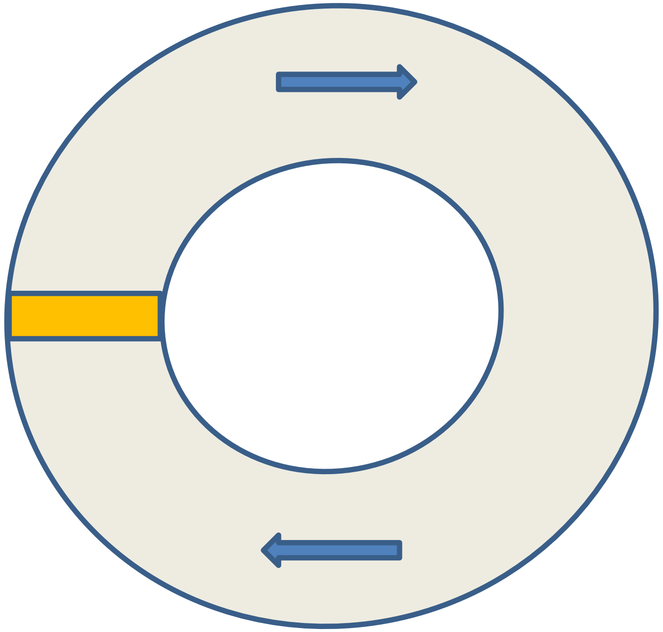
$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} = 0$$

решение

$$f(t,s) = f(t-s)$$



Клеточный цикл:



Волновое уравнение

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} = 0$$

Граничные условия

$$s \in [0,2\pi]$$

$$x(t,s=0) = 2x(t,s=2\pi)$$