

Популяционная динамика животных и микроорганизмов



Животные: простейшая модель

Имеется некоторая популяция одного вида (микроорганизмы, зайцы и т.п.), в которой происходят жизненные процессы во всем их многообразии.

Задача. Найти законы изменения численности популяции во времени.

Основные допущения:

1. Существуют только процессы размножения и естественной гибели, скорости которых пропорциональны численности особей в данный момент времени.
2. Не учитываем биохимические, физиологические процессы.
3. Нет борьбы между особями за место обитания, за пищу (бесконечно большое пространство и количество пищи).
4. Рассматриваем только одну популяцию, нет хищников.

Животные: простейшая модель

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx$$

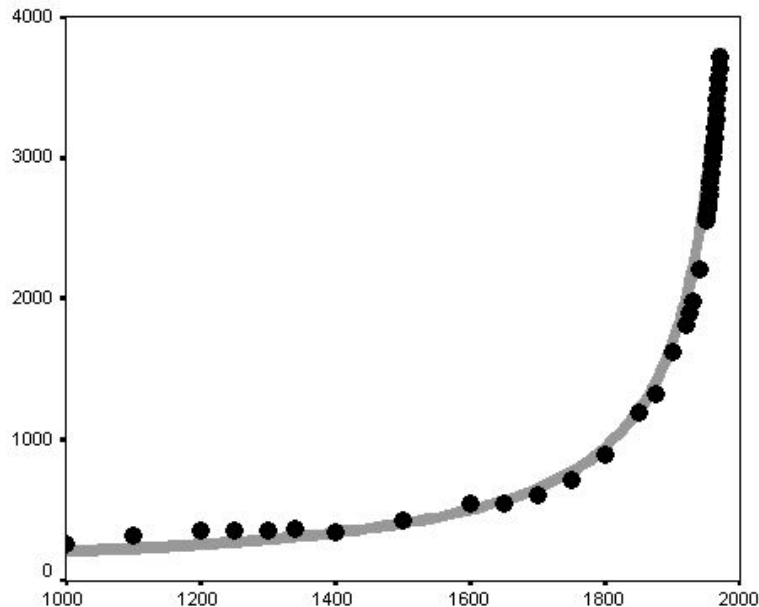
$$x = x_0 e^{(a-b)t}$$

x - количество животных

a - коэффициент размножения

b - коэффициент гибели животных

Люди: динамика популяции



Гиперболическая кривая

$$N = \frac{C}{T - T_0} = \frac{2 * 10^{11}}{T - 2025}$$

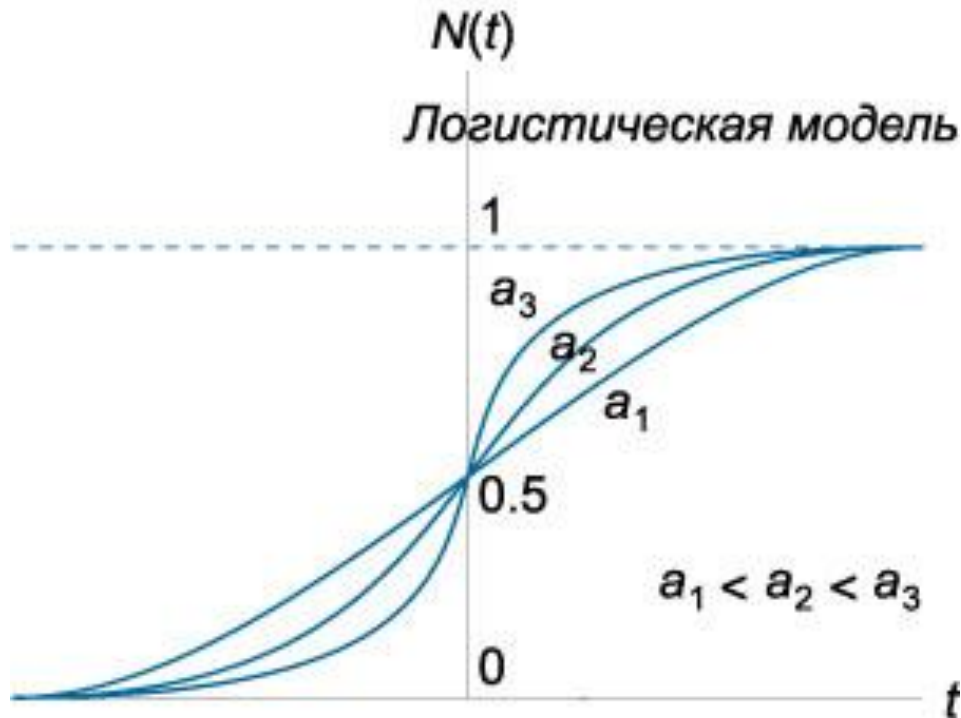
Форстер (1960), Хостер (1975), Шкловский (1980)

Животные: модель Ферхюльста

Логистическая кривая

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{b}\right)$$

$$N(t) = \frac{N_0 b}{N_0 + (b - N_0)e^{-at}}$$



Взаимодействие “хищник-жертва”

Модель Лотки-Вольтерра

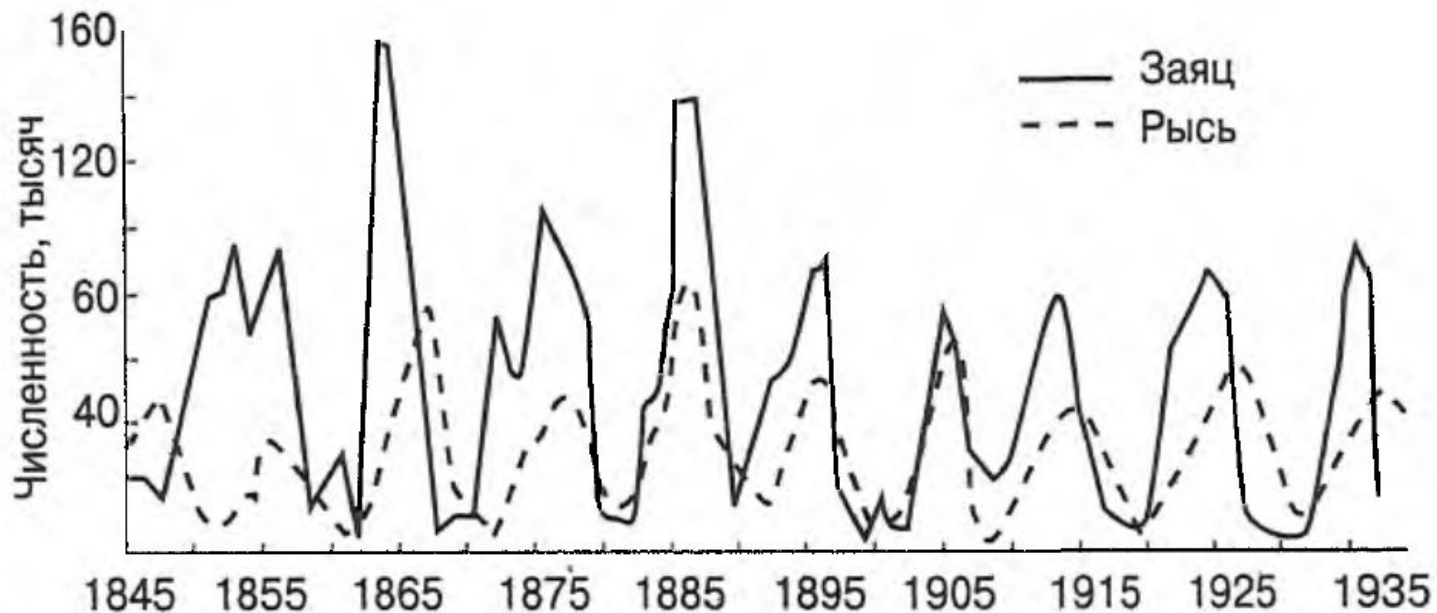
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma x - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \lambda y \end{cases}$$

↑
жертва

↑
хищник

Существует стационарное состояние:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cm1} = \frac{\lambda}{\beta} \\ y_{cm2} = \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases}$$



Взаимодействие “хищник-жертва”

Модель Лотки-Вольтерра

Фазовый портрет (связь между x и y):

$$x = \frac{x}{x_{cm}}$$

$$y = \frac{y}{y_{cm}}$$

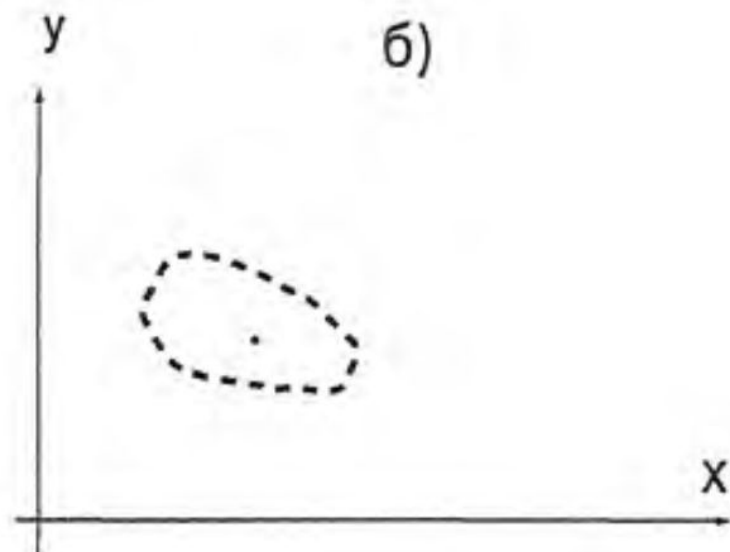
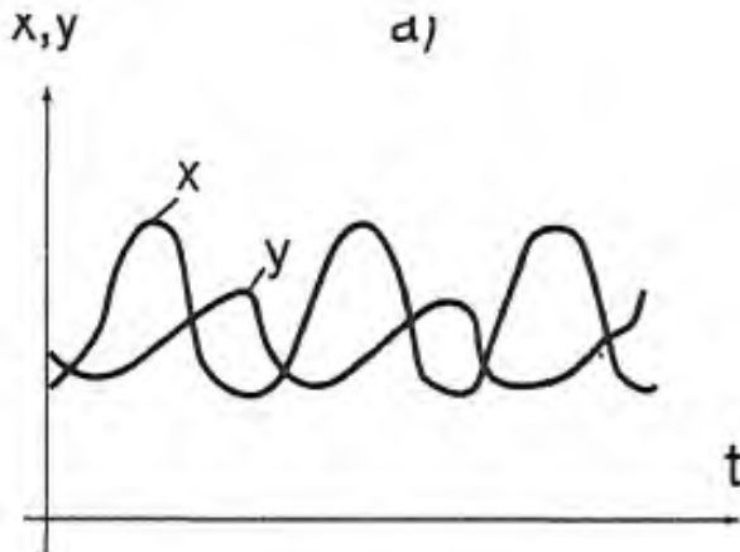
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma(1-y)x \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda(1-x)y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda(1-x)y}{\gamma(1-y)x}$$

$$\frac{1-y}{y} dy = -\frac{\lambda(1-x)}{\gamma x} dx$$



$$\left(\frac{x}{e^x}\right)^\lambda \left(\frac{y}{e^y}\right)^\gamma = const$$



Взаимодействие “хищник-жертва”: малые отклонения от равновесия

$$x(t) = x_{cm} + \Delta x(t)$$

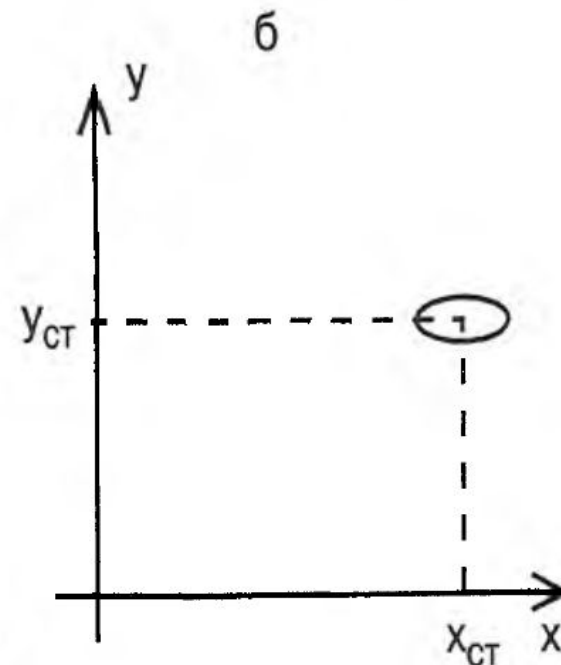
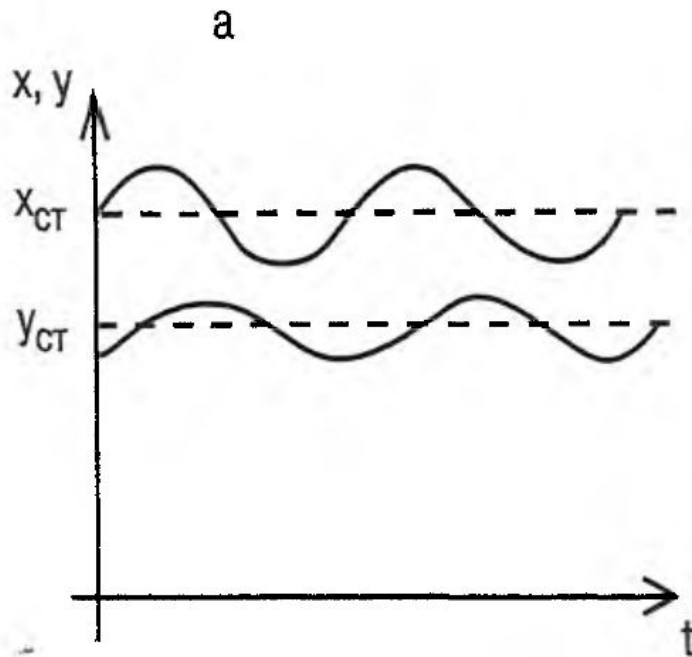
$$y(t) = y_{cm} + \Delta y(t)$$

$$\omega^2 = \lambda\gamma$$

$$\Delta x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$\Delta y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\frac{d^2 \Delta y}{dt^2} = -\omega^2 \Delta y$$



Эпидемический процесс

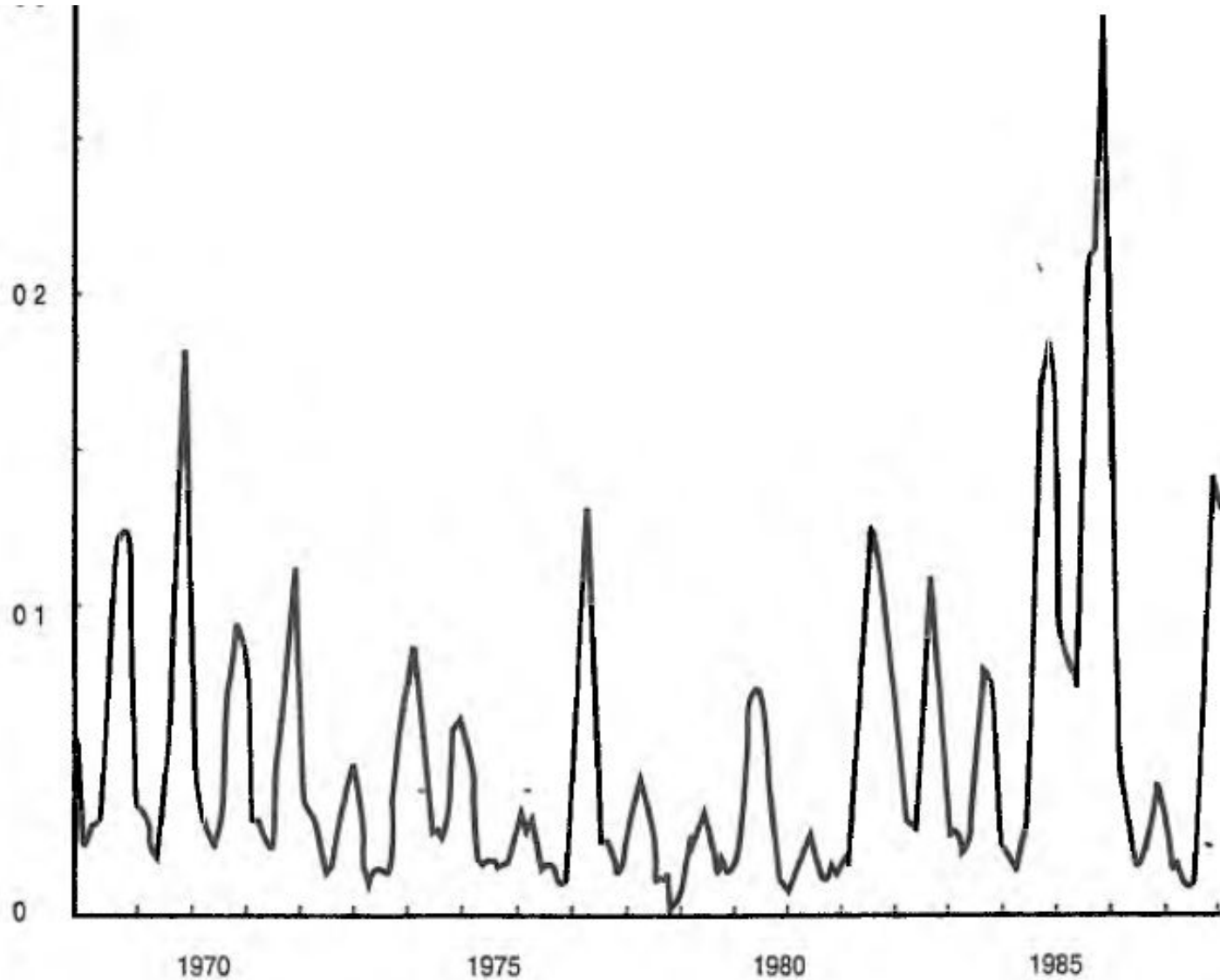


Рис. 1 Заболеваемость коклюшем (число заболевших на 1000 человек) в Москве в 1968—1987 годах. Данные регистрировались раз в месяц.

Моделирование эпидемического процесса

Сделаем ряд упрощений:

- 1) рассмотрим инфекционные заболевания с пожизненным иммунитетом
- 2) будем считать, что численность популяции людей не изменяется с течением времени
- 3) популяция возбудителя однородна
- 4) популяция людей однородна
- 5) вероятность смерти человека не зависит от возраста;
- 6) вероятность выздоровления человека не зависит от времени, прошедшего с момента заражения
- 7) вероятность передачи инфекции не зависит от времени года

Моделирование эпидемического процесса

Три состояния человека:

- 1) восприимчивый, т.е. не болеющий и еще не болевший этим инфекционным заболеванием человек, который впоследствии может заразиться;
- 2) инфицированный человек;
- 3) иммунный, т.е. имеющий иммунитет в результате перенесенного заболевания человек.

N -общая численность людей

N_I -число инфицированных

N_S -число восприимчивых

Моделирование эпидемического процесса

Переход “восприимчивые” - “инфицированные” $- \alpha N_S N_I dt$

Переход “инфицированные” - “здоровые” $+ \beta N_I dt$

Переход “восприимчивые” - “умершие” $- \gamma N_S dt$

Переход “инфицированные” - “умершие” $- \gamma N_I dt$

Рождение “восприимчивых” $+ \gamma N dt$

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha N_S N_I - \beta N_I - \gamma N_I \quad R = \alpha N \tau$$

$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha N_S N_I + \gamma (N - N_S) \quad R > 1 \quad \text{эпидемия}$$

Моделирование эпидемического процесса: случай малых отклонений

$$\frac{dw}{dt} = \gamma(R-1)v$$

$$\tau = \frac{2}{\gamma R}$$

$$w(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma R v - \beta w$$

$$\omega \approx \sqrt{\beta \gamma (R-1)}$$

$$v(t) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi_2)$$

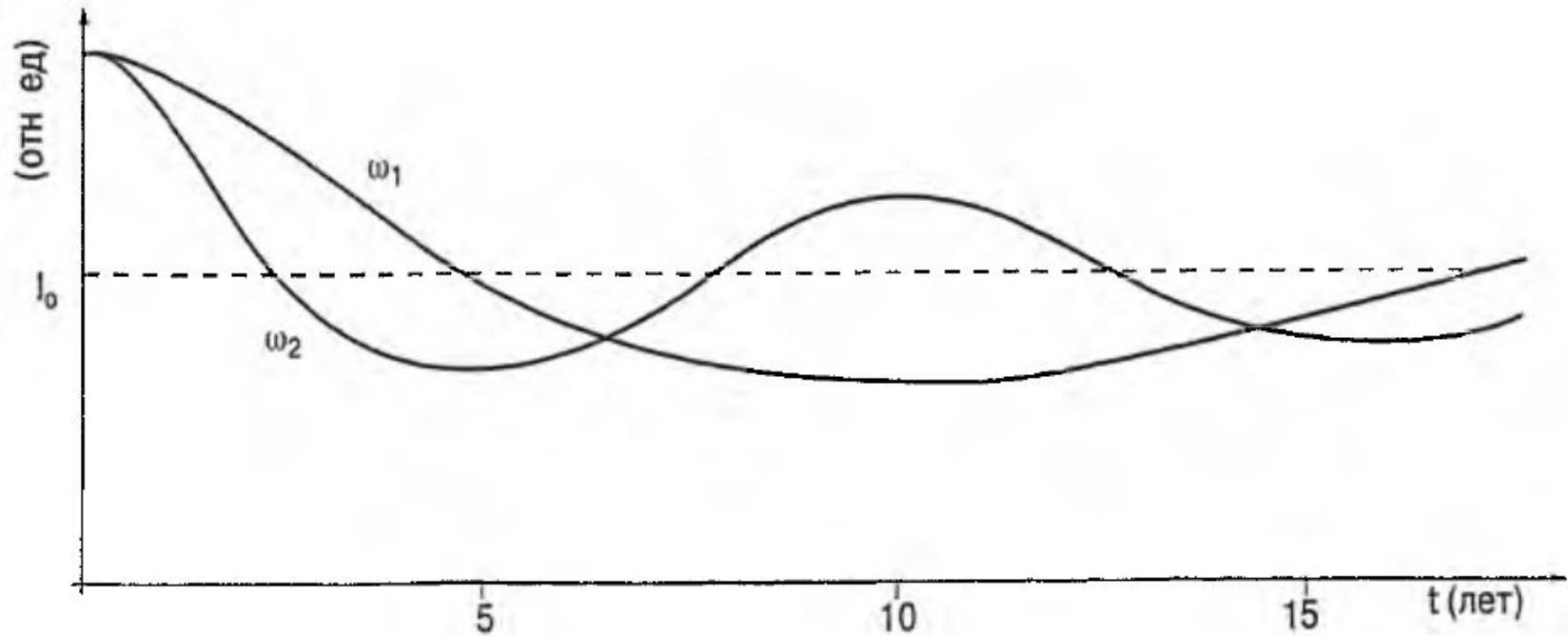


Рис. 2 Зависимость относительного числа инфицированных членов популяции от времени в простейшей модели

Эпидемический процесс: усложнение модели

Учет “лаг-фазы” инфекции

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha N_S N_I(t - \Delta t) - \beta N_I - \gamma N_I$$

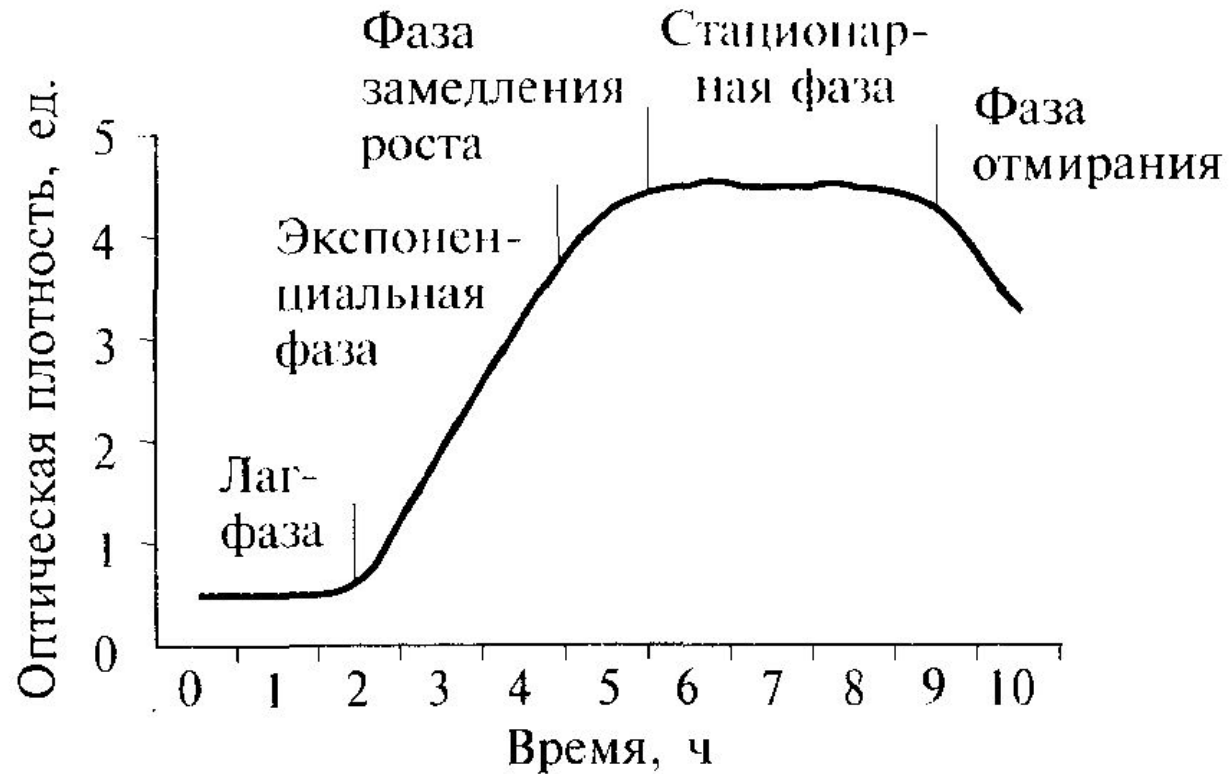
$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha N_S N_I(t - \Delta t) + \gamma(N - N_S)$$

Учет заразности инфекции от времени года

$$\frac{dN_I}{dt} = \alpha(t) N_S N_I - \beta N_I - \gamma N_I$$

$$\frac{dN_S}{dt} = -\alpha(t) N_S N_I + \gamma(N - N_S)$$

Динамика микробных популяций



Динамика микробных популяций

Культивирование клеток -> изучение клеточного цикла *in vitro*
(культуры, линии клеток).

Фазы роста:

- 1) индукционный (лаг-фаза) – адаптация клеток к среде, перестройка их метаболизма;
- 2) экспоненциальный рост (много митозов);
- 3) линейный рост (мало митозов);
- 4) замедление роста;
- 5) стационарная фаза;
- 6) отмирание культуры.

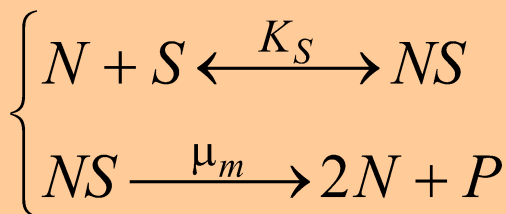
Причины замедления роста – истощение субстрата,
накопление токсических продуктов и др.

Экспоненциальная фаза роста

$$\frac{dN}{dt} = \mu N$$

$$N_c = N_{c0} e^{\mu t}$$

Предположим, что скорость роста *лимитируется* одним субстратом S :



$$N_c = [NS] + N = \frac{NS}{K_S} + N$$

$$[NS] = \frac{NS}{K_S} = \frac{N_c S}{K_S + S}$$

$$\frac{dN_c}{dt} = \mu_m [NS] = \frac{\mu_m N_c S}{K_S + S}$$

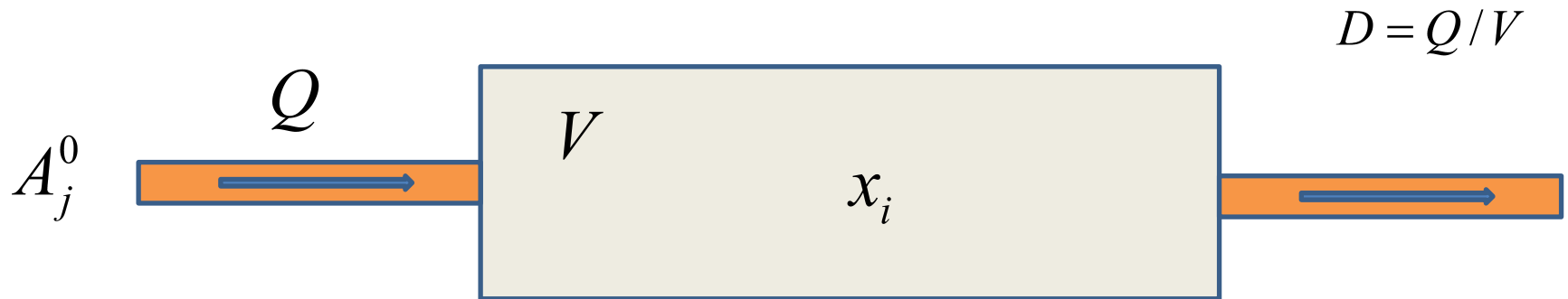
удельная скорость роста:

$$\mu = \frac{\mu_m S}{K_S + S}$$

(уравнение Моно)

Типичные значения: $\mu_m \sim 10^{-2} \div 10^{-5} \text{ с}^{-1}$,
 $K_S \sim 10^{-2} \div 10^{-8} \text{ М}$.

Рост микробных популяций : хеостат

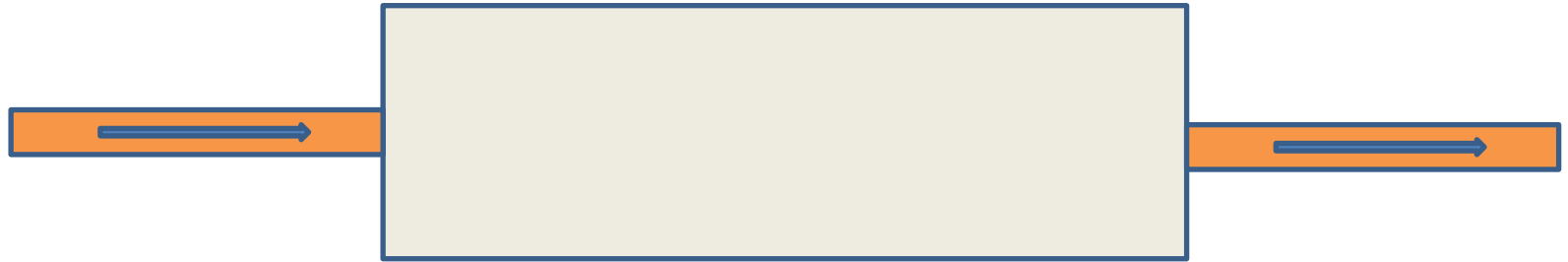


μ - удельная скорость роста, зависит от концентрации пит. веществ

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu_i \left(\vec{A} \right) x_i - Dx_i, i \in (1, n)$$

$$\frac{dA_j}{dt} = (A_j^0 - A_j)D - \sum_k a_{jk} \mu_k \left(\vec{A} \right) x_k, j \in (1, m)$$

Рост микробных популяций : хеостат



Стационарное состояние

$$\mu_i \left(\vec{A} \right) = D x_i, i \in (1, n)$$

$$A_j = A_j^0 + \sum_k a_{jk} x_k, j \in (1, m)$$

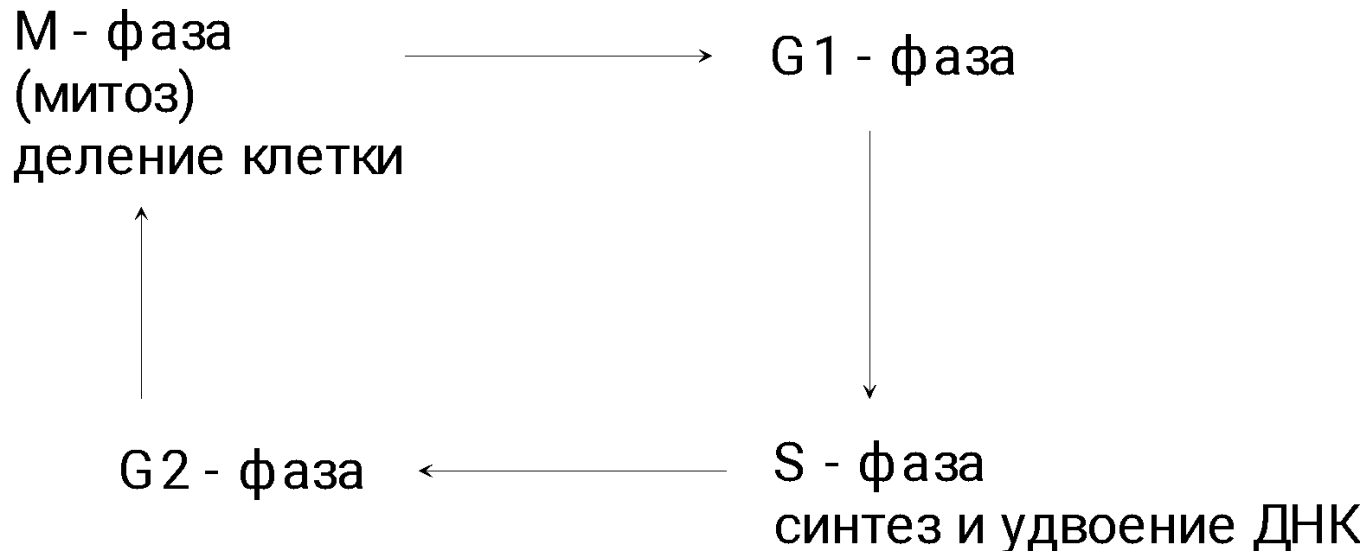
Закон Гаузе:

Нетривиальные решения

существуют только при $m \geq n$

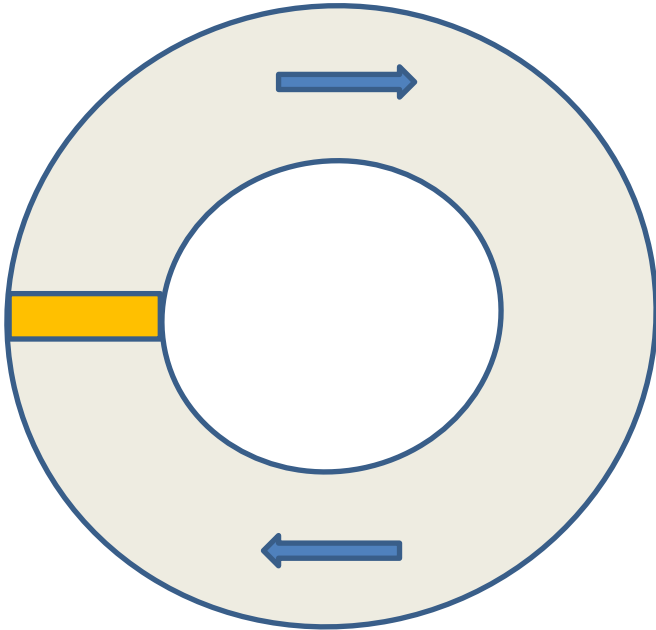
Клеточный рост

Клеточный цикл:



*1 час (эмбриональные и микробные клетки)
~10 лет (гепатоциты, нейроны).*

Клеточный цикл:



Волновое уравнение

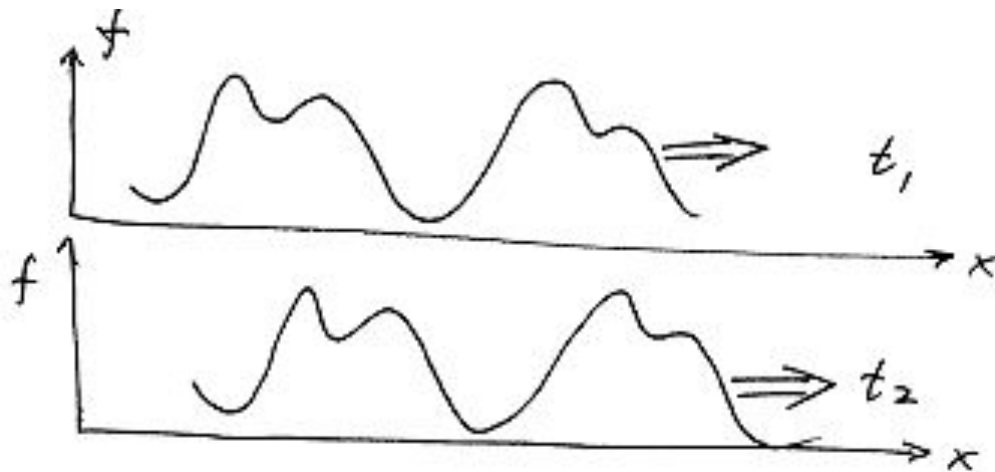
$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} = 0$$

Волновое уравнение:
неограниченный случай $s \in [0, \infty)$

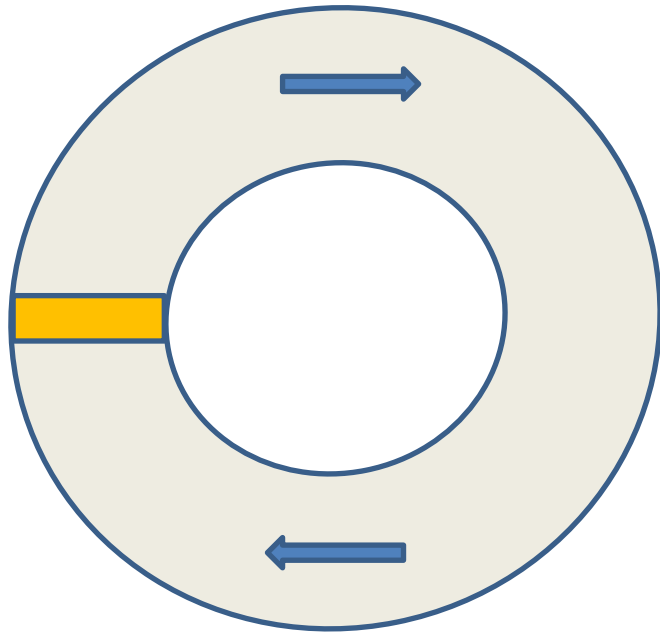
$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} = 0$$

решение

$$f(t, s) = f(t - s)$$



Клеточный цикл:



Волновое уравнение

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} = 0$$

Граничные условия

$$s \in [0, 2\pi]$$

$$x(t, s = 0) = 2x(t, s = 2\pi)$$