ЛЕКЦИЯ 6 (продолжение)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(метод итераций, метод хорд, комбинированный метод)

2. Метод простой итерации решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$y = f(x), \qquad (3)$$

где $f(x) = g(x) + x$.

$$g(x) = 0$$

Предположим, что функция f удовлетворяет следующим условиям:

- $f \in C^1[a,b]$,
- для любого $x \in [a,b]$ выполняется $f(x) \in [a,b]$,
- $|f'(x)| \le k < 1$.

В этом случае уравнение (1) имеет один единственный корень.

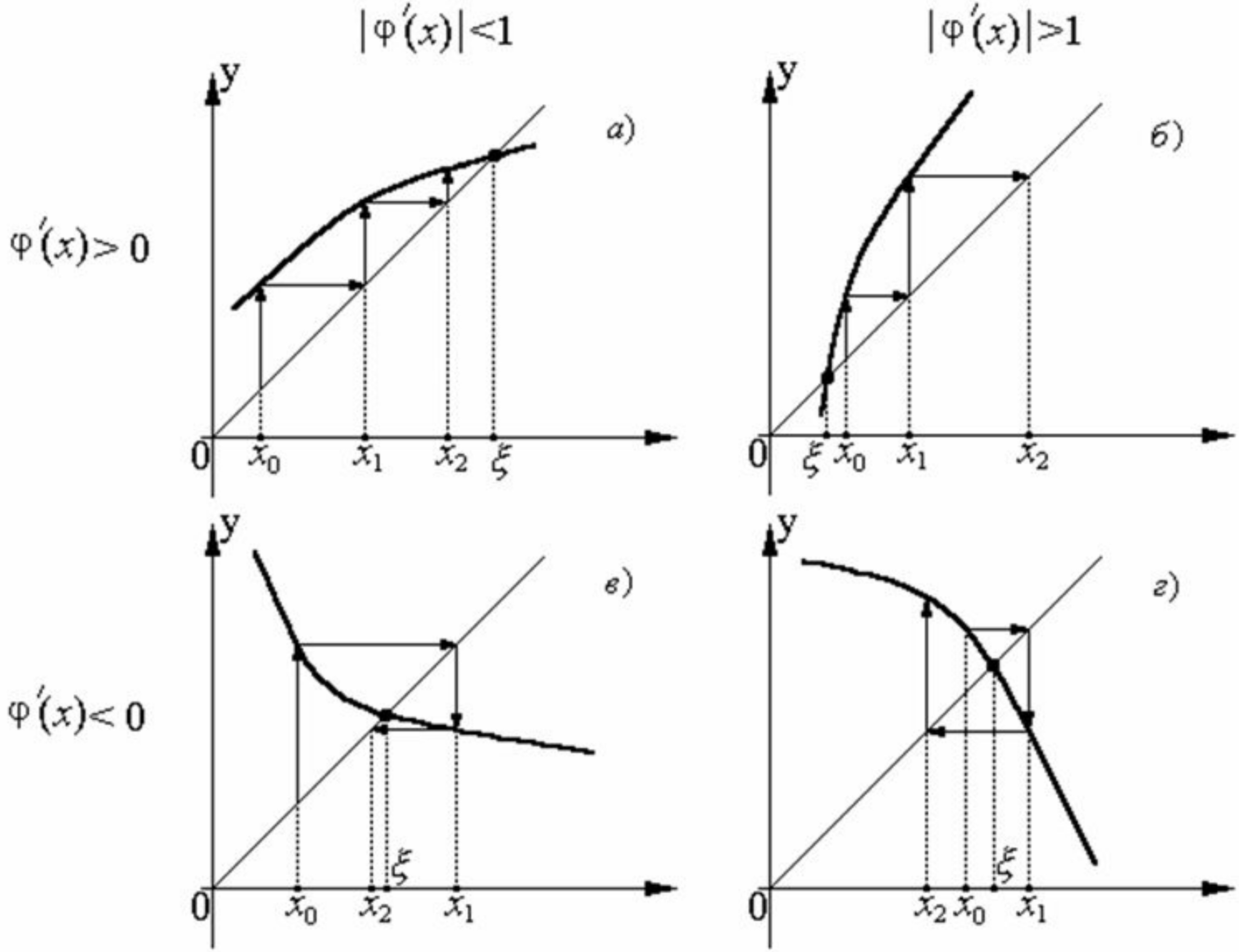


Рис. Метод простых итераций

Из графиков видно, что при $\varphi'(x) > 0$ (рис. 2, а, б) и при $\varphi'(x) < 0$ (рис. 2, в, г) возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы.

Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной $\varphi'(x)$.

Чем меньше $|\varphi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

Таким образом, при переходе от уравнения $g(x)=0$ к уравнению $x = \varphi(x) = \mathrm{f(x)}$ необходимо, чтобы выполнялось условие $|\varphi'(\mathrm{x})| < 1$.

Итерационные процессы могут быть односторонними, если $\varphi'(x) > 0$ и двусторонними, если $\varphi'(x) < 0$.

В качестве начального приближения обычно берут середину отрезка [a, b]:
$x_0 = (a + b) / 2$.

На практике часто в качестве $\varphi(x)$ берут функцию $\varphi(x) = x - cf(x)$,

где c – некоторая постоянная.

Постоянную c выбирают таким образом, чтобы $|\varphi'(x)| \le q < 1$ для всех $x \in [a, b]$.

При таком выборе функции $\varphi(x)$ метод простой итерации называют **методом релаксации.**

Получим условия на выбор $\boldsymbol{c}$:

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|1 - cf'(x)\right| < 1 \Rightarrow \quad -1 < 1 - cf'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -cf'(x) < 0$$

Получим условия на выбор c:

$$|\varphi'(x)| = |1 - cf'(x)| < 1 \Rightarrow \quad -1 < 1 - cf'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -cf'(x) < 0$$

Таким образом,

$$\textit{если } f'(x) < 0, \ \textit{то} \quad 2/f'(x) < c < 0$$

$$\textit{если } f'(x) > 0, \ \textit{то} \quad 2/f'(x) > c > 0$$

Видно, что знак у c совпадает со знаком $f'(x)$

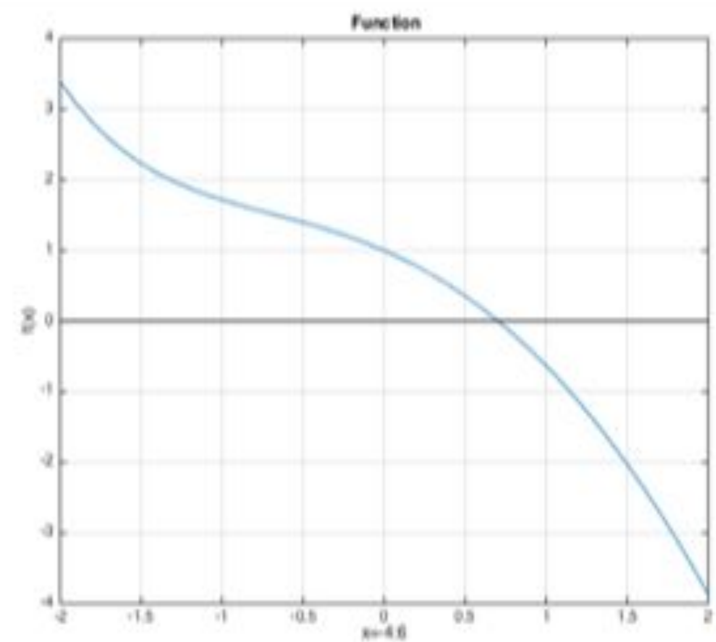
Часто c берут в виде:

$c = 2/(M+m)$, где $M = \max\left(f'(x)\right)$, $m = \min\left(f'(x)\right)$.

Пример. Требуется решить нелинейное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$.

Допустим, что в результате аналитического отделения корней было найдено, что корень уравнения находится на интервале [0,1].

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3.389	1.718	1	-0.632	-3.865



Приведем исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

к эквивалентному виду x=φ (x). Возможны варианты.

Какие?

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

1) $x = \varphi(x) = -2\ln(x)$

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

$$2)\ x = \varphi(x) = \sqrt{e^{-x}}$$

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

1) $x = \varphi(x) = -2\ln(x)$

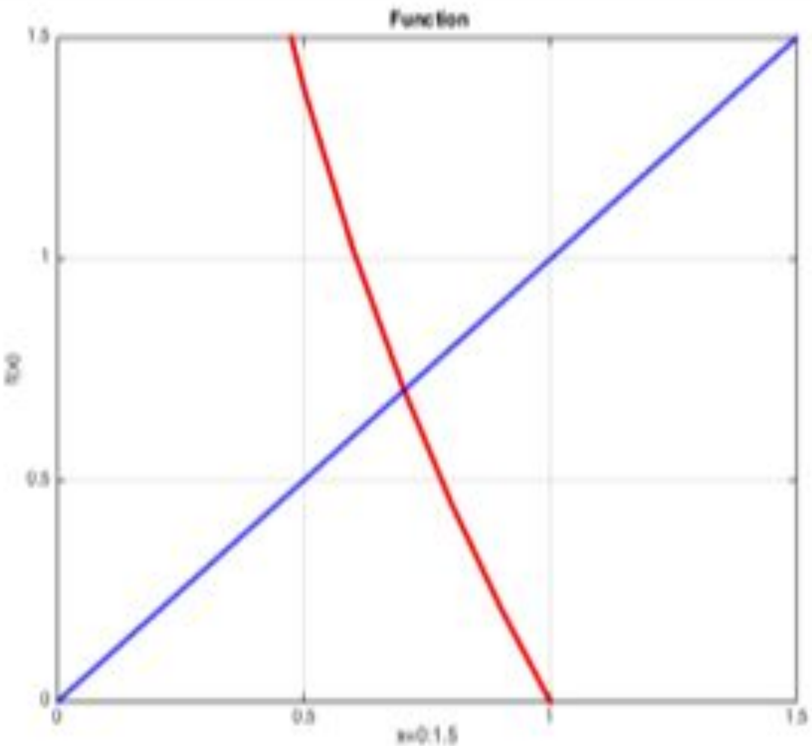
2) $x = \varphi(x) = \sqrt{e^{-x}}$

Проверим для каждого из них условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$:

1) $\varphi'(x) = -\frac{2}{x}$ и очевидно, что на интервале [0, 1] $|\varphi'(x)| > 1$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$\|-2/x\|$	$+\infty$	8	4	2.667	2

и, следовательно, метод итераций при таком эквивалентном уравнении $x = \varphi(x) = -2\ln(x)$ сходиться не будет.



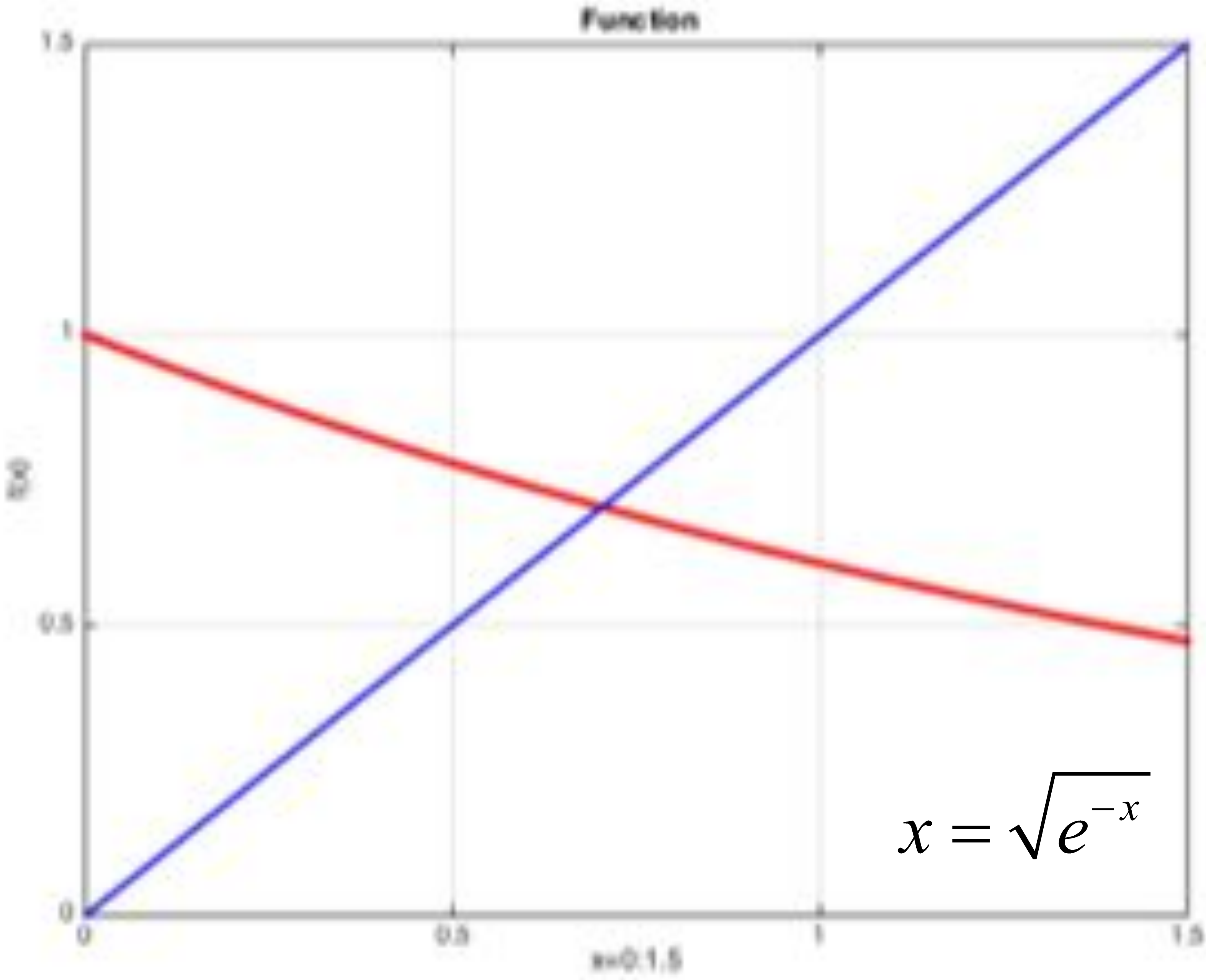
$$x = \varphi(x) = -2\ln(x)$$

```
x=0:0.1:1.5;
%y=exp(-x)-x.^2;
y=-2*log(x); y2=x.*1;y1=x.*0;
plot(x, y,'-r','LineWidth',3);
hold on
plot(x, y1,'-k')
plot(x, y2,'-b','LineWidth',2)
xlabel('x=0:1.5');ylabel('f(x)')
title(' Function')
ylim([0,1.5]);xlim([0,1.5]);
grid on
```

2) $\varphi'(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}$. На интервале [0, 1] $|\varphi'(x)| < 1$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$\frac{e^{-x/2}}{2}$	0.5	0.441	0.384	0.345	0.303

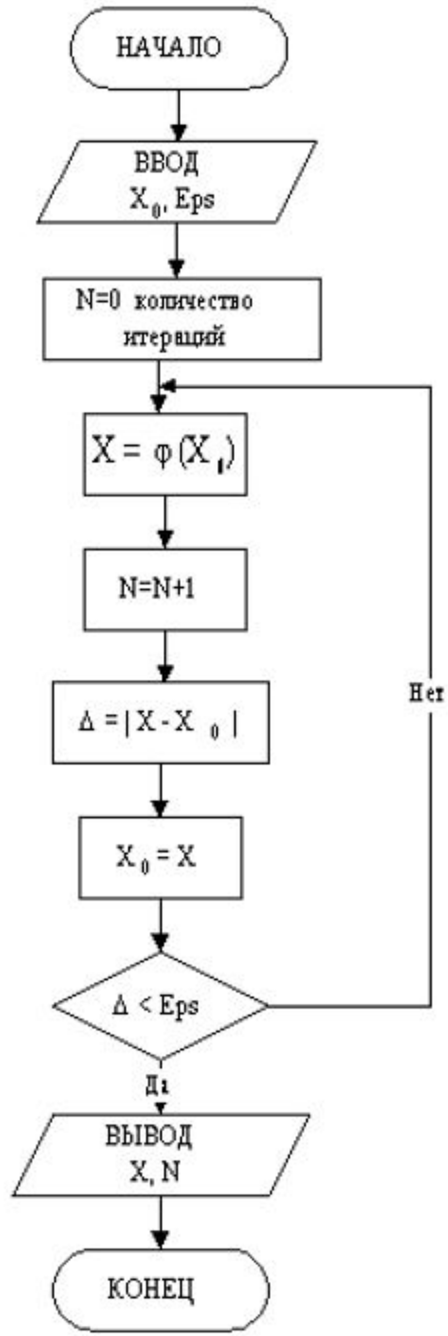
и, следовательно, метод итераций при таком эквивалентном уравнении $x = \sqrt{e^{-x}}$ сходится, что хорошо видно из приведенных ниже результатов расчета.



$$x = \sqrt{e^{-x}}$$

В качестве начального приближения может быть выбрано любое число, принадлежащее исходному интервалу, например, x_0=0.

n	x_n	$x=\sqrt{e^{-x}}$
0	0	1
1	1	0.607
2	0.607	0.738
3	0.738	0.691
4	0.691	0.708
5	0.708	0.702
6	0.702	0.704
7	0.704	0.703


НАЧАЛО
ВВОД
X0, Eps
N=0 количество
итераций
X = φ(X0)
N=N+1
Δ = | X - X0 |
X0 = X
Нет
Δ < Eps
Да
ВЫВОД
X, N
КОНЕЦ

Действительно, в **силу теоремы Лагранжа,**

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|f'(\xi)\right|\left|x'-x''\right|\le k\left|x'-x''\right|.$$

Теорема Лагранжа о среднем значении утверждает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x = \xi$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

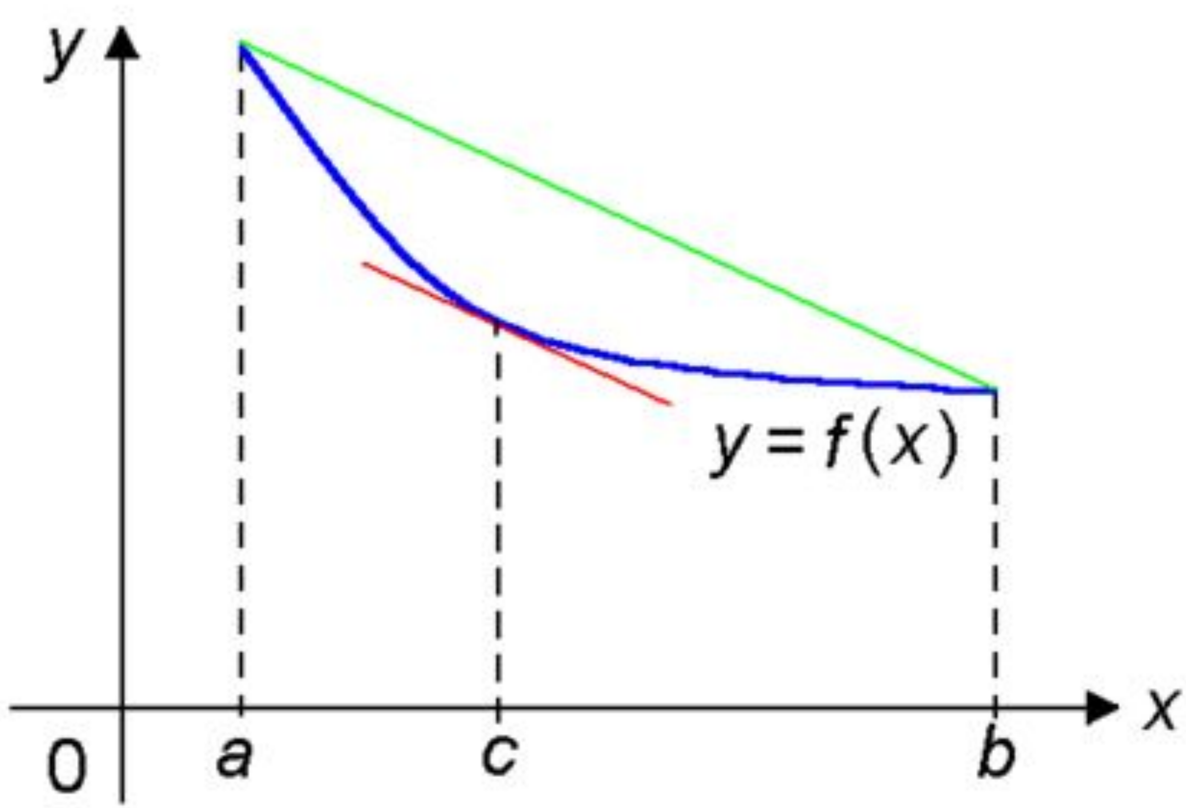
Данная теорема называется также *формулой конечных приращений*, поскольку она выражает приращение функции на отрезке через значение производной в промежуточной точке этого отрезка.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Представим формулу (1) в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\,'(c)\ . \qquad (2)$$

Число $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через концы графика функции $y = f(x)$ — точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а $f\,'(c)$ — угловой коэффициент касательной к этому графику в точке
$(c, f(c))$. Из формулы (2) следует, что существует точка c O (a, b), в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней) (рис. 2).



Поэтому отображение $f:[a,b]\to[a,b]$ является сжатым отображением полного метрического пространства $[a,b]$ в себя.

По **теореме С. Банаха**, такое отображение имеет единственную неподвижную точку, значит, уравнение (1) имеет единственный корень $\tilde{x}$.

Пусть $x_0 \in [a,b]$ - произвольная точка. Тогда последовательность точек

$$x_1 = f\left(x_0\right), x_2 = f\left(x_1\right), \ldots, x_n = f\left(x_{n-1}\right), \ldots$$

сходится к точке $\tilde{x}$.

Кроме того, имеет место оценка погрешности:

$$\left|x_n - \tilde{x}\right| \le k^n \frac{\left|x_0 - x_1\right|}{1-k}.$$

Итак, для решения уравнения (1) выбирается некоторое начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ и последовательно находятся приближенные решения (итерации) уравнения (1).

Значение итерации x_{n+1} выражается через известную предыдущую итерацию. Данный метод носит название метода итераций.

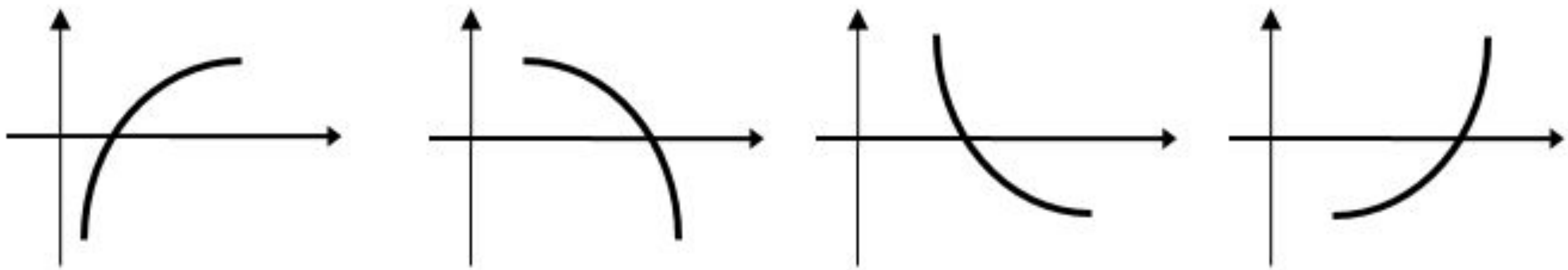
3. Метод хорд

Предположим, что функция $g(x)$ в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям:

- $g \in C^2([a,b]),\ g(a)g(b) < 0$;
- $g'(x) > 0, g''(x) > 0$ для любого $x \in (a,b)$.

Остальные случаи для знаков производных разбираются аналогично. Обозначим через ξ корень уравнения (1).

Возможные случаи поведения $f(x)$ на [a, b]:



$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
$f''(x)<0$	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$	$f''(x)>0$

Метод хорд состоит в следующем.

График функции g заменяется его хордой, т.е. отрезком, соединяющим точки $(a, g(a)), (b, g(b))$ (рис. 1). Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня.

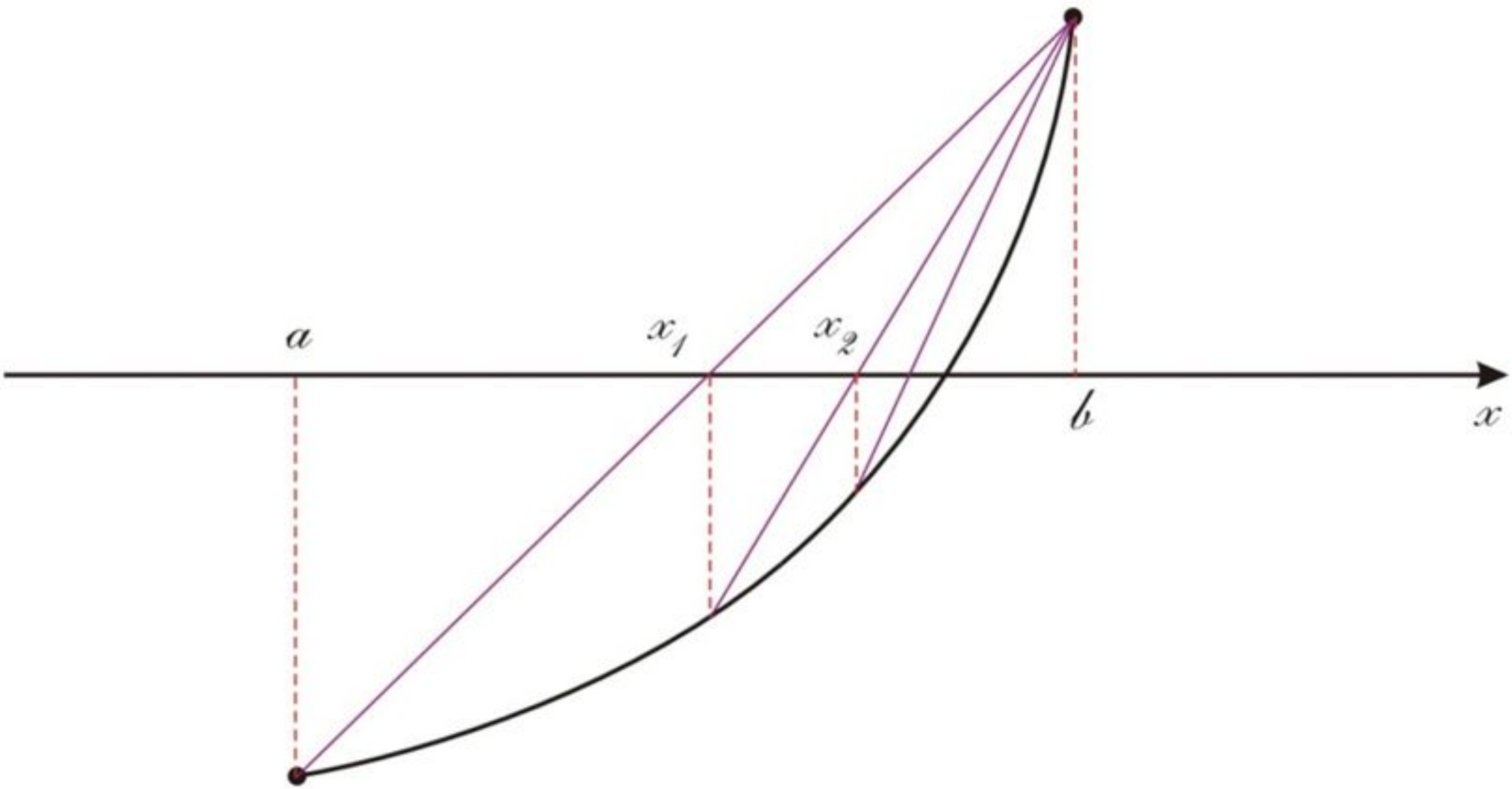


Рис 1. Решение уравнения по методу хорд

Уравнение хорды имеет вид $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-g(a)}{g(b)-g(a)}$.

Его можно переписать в виде $y=g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)$.

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$.

Решая уравнение $l(x)=0$, находим

$$x_1=a-\frac{g(a)}{g(b)-g(a)}(b-a).$$

Так как $g(b)>0,\ g(a)<0$, то $a<x_1<b$.

Действительно, $b - x_1 = (b-a)\dfrac{g(b)}{g(b)-g(a)} > 0$ и,

кроме того, $x_1 - a = -\dfrac{g(a)}{g(b)-g(a)}(b-a) > 0$.

Так как $g''(x) > 0$, то функция выпукла вниз, следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции g, лежит над соответствующей точкой графика функции g, т.е.

$$l(x) > g(x),\ a < x < b.$$

Поэтому, $l(\xi) > g(\xi) = 0$.

Так как $0 = l(x_1) < l(\xi)$, то, в силу возрастания функции $y=l(x)$, получаем, что $x_1 < \xi$.

Снова проводим хорду через точки $(x_1, g(x_1))$, $(b, g(b))$ и находим

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g(b) - g(x_1)}(b - x_1).$$

Продолжая описанный процесс, получим ограниченную монотонно возрастающую последовательность $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < \xi < b$, где

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g(b) - g(x_n)}(b - x_n). \qquad (4)$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

.

Переходя к пределу в равенстве (4), получим $g(c)=0$. Таким образом, последовательность сходится к корню уравнения (1).

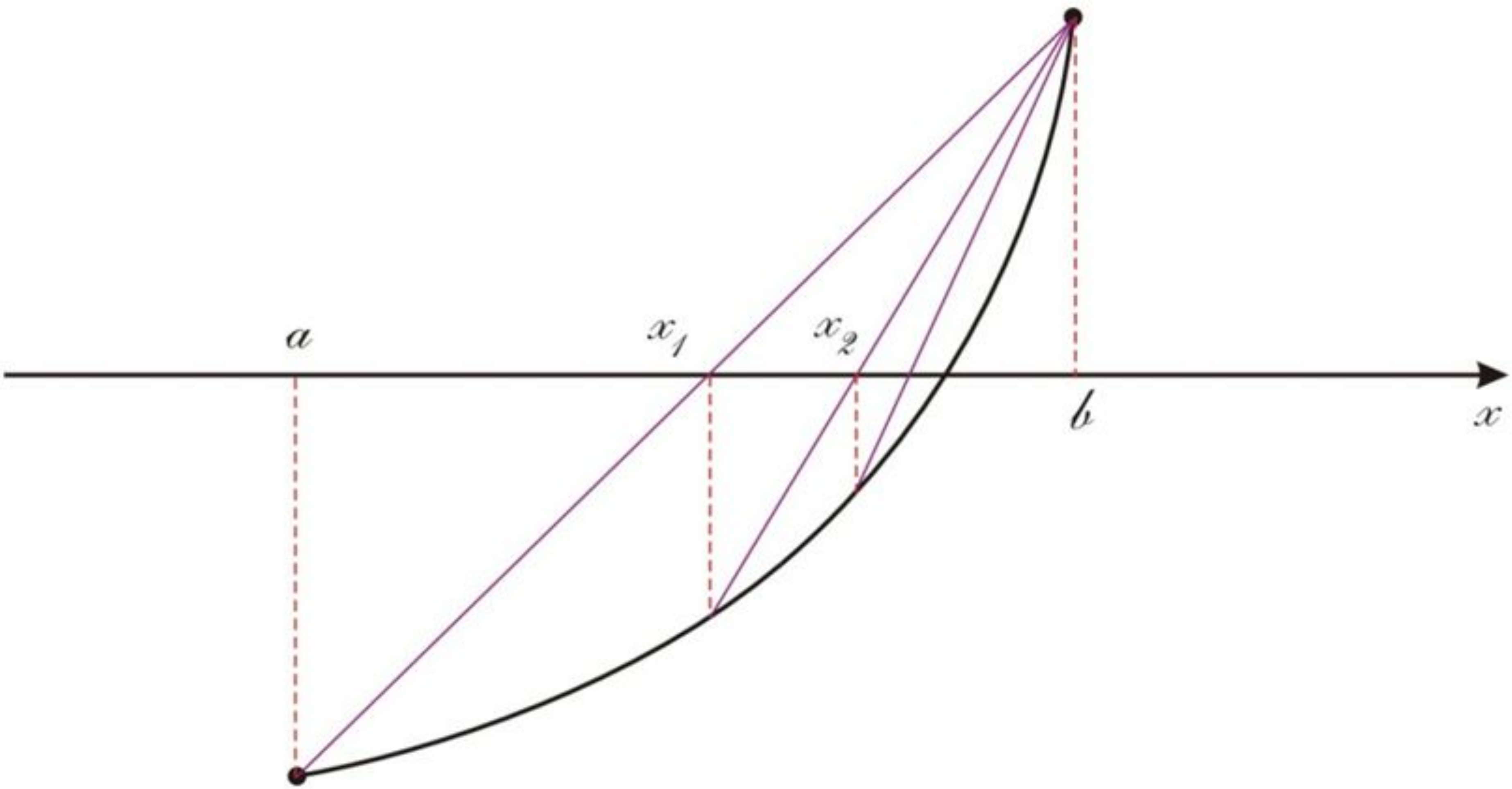


Рис 1. Решение уравнения по методу хорд

Предположим, что $\left|g'(x)\right| \geq m > 0,\ a < x < b$.

Тогда, по теореме Лагранжа, получим

$$g(x_n) = g(x_n) - g(\xi) = g'(c_n)(x_n - \xi).$$

Отсюда

$$\left|x_n - \xi\right| \leq \frac{\left|g(x_n)\right|}{m}. \qquad (5)$$

Неравенство (5) дает оценку погрешности приближенного корня.

Практический выбор той или иной формулы осуществляется, пользуясь следующим **правилом**: неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.

Комбинированный метод *(хорд и касательных)*

Метод хорд и метод касательных дают приближения к корню с разных сторон (см. рис.1.7) . Совместное использование методов позволяет на каждой итерации находить приближенные значения с недостатком и с избытком, что ускоряет процесс сходимости.

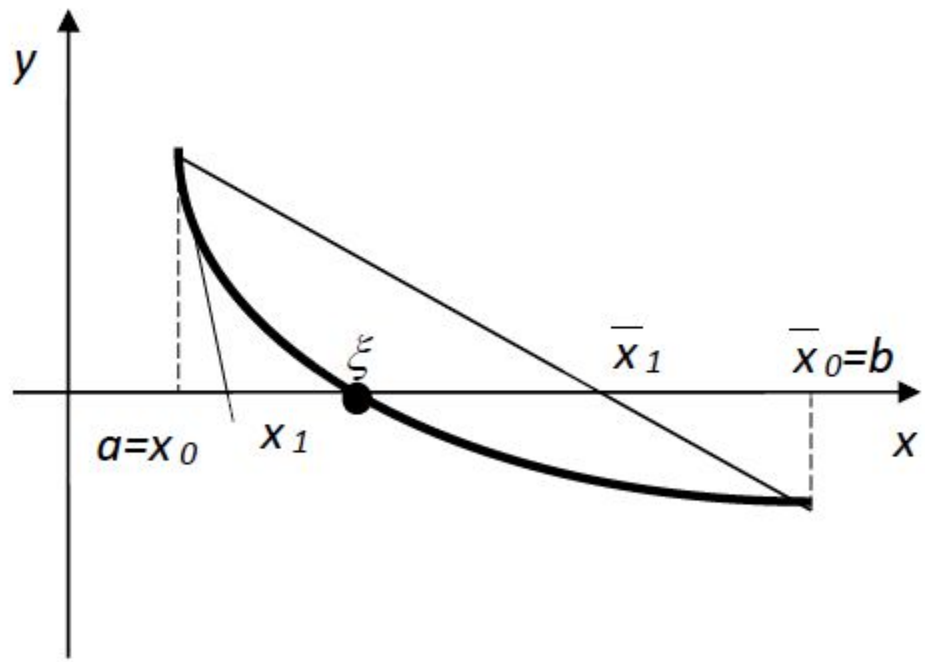


Рис. 1.7