

ЛЕКЦИЯ 6 (продолжение)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

НЕЛИНЕЙНЫХ

УРАВНЕНИЙ

(метод итераций, метод

хорд, комбинированный

метод)

2. Метод простой итерации решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$y=f(x), \quad (3)$$

где $f(x)=g(x)+x$.

$$g(x)=0$$

Предположим, что функция f удовлетворяет следующим условиям:

- $f \in C^1[a, b]$,
- для любого $x \in [a, b]$ выполняется $f(x) \in [a, b]$,
- $|f'(x)| \leq k < 1$.

В этом случае уравнение (1) имеет один единственный корень.

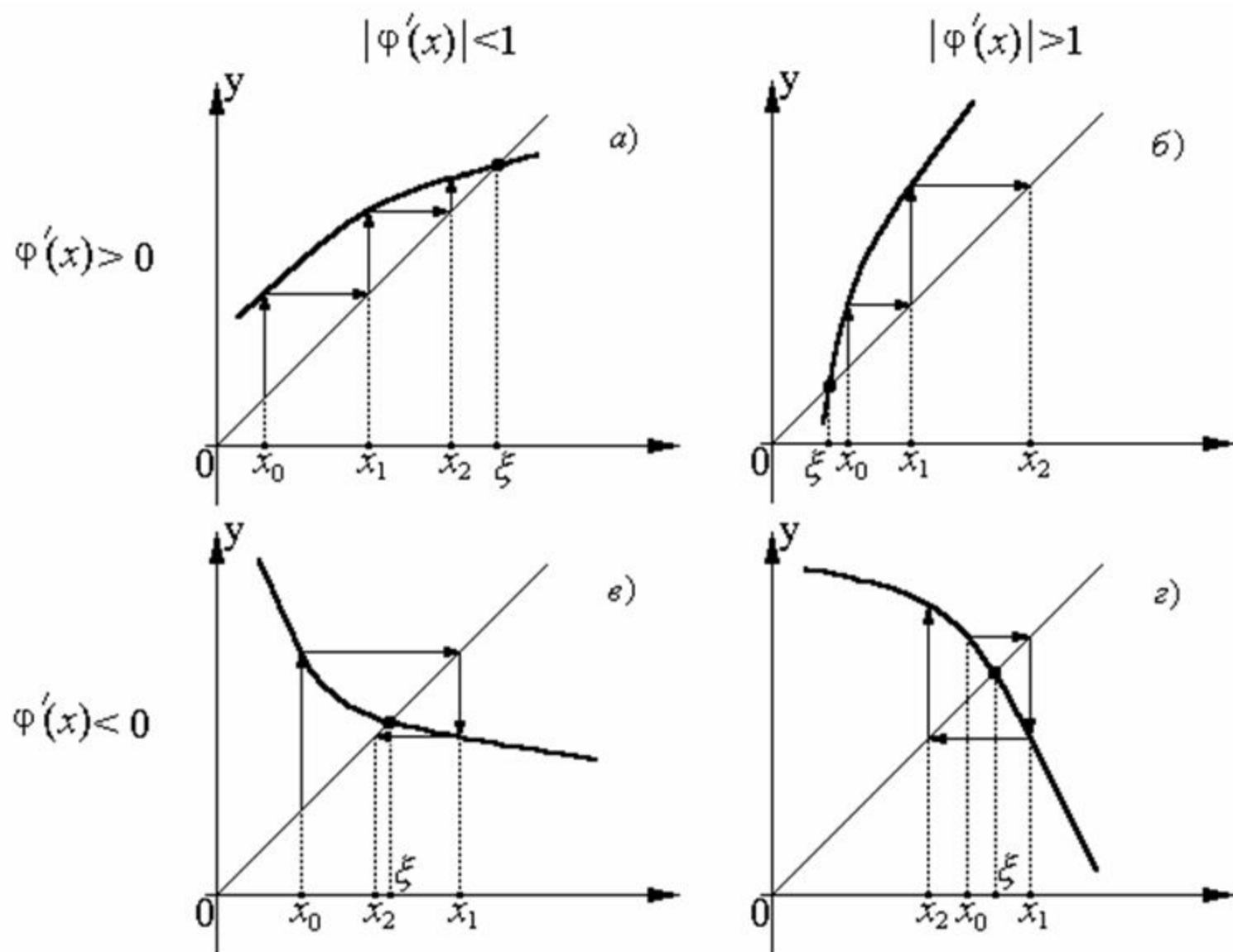


Рис. Метод простых итераций

Из графиков видно, что при $\varphi'(x) > 0$ (рис. 2, а, б) и при $\varphi'(x) < 0$ (рис. 2, в, г) возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы.

Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной $\varphi'(x)$.

Чем меньше $|\varphi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

Таким образом, при переходе от уравнения $g(x)=0$ к уравнению $x = \varphi(x) = f(x)$ необходимо, чтобы выполнялось условие $|\varphi'(x)| < 1$.

Итерационные процессы могут быть односторонними, если $\varphi'(x) > 0$ и двусторонними, если $\varphi'(x) < 0$.

В качестве начального приближения обычно берут середину отрезка $[a, b]$:
 $x_0 = (a + b) / 2$.

На практике часто в качестве $\varphi(x)$ берут функцию $\varphi(x) = x - cf(x)$,
где c – некоторая постоянная.

Постоянную c выбирают таким образом, чтобы $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для всех $x \in [a, b]$.

При таком выборе функции $\varphi(x)$ метод простой итерации называют **методом релаксации**.

Получим условия на выбор c :

$$|\varphi'(x)| = |1 - cf'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - cf'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -cf'(x) < 0$$

Получим условия на выбор c :

$$|\varphi'(x)| = |1 - cf'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - cf'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -cf'(x) < 0$$

Таким образом,

если $f'(x) < 0$, то $2 / f'(x) < c < 0$

если $f'(x) > 0$, то $2 / f'(x) > c > 0$

Видно, что знак у c совпадает со знаком $f'(x)$

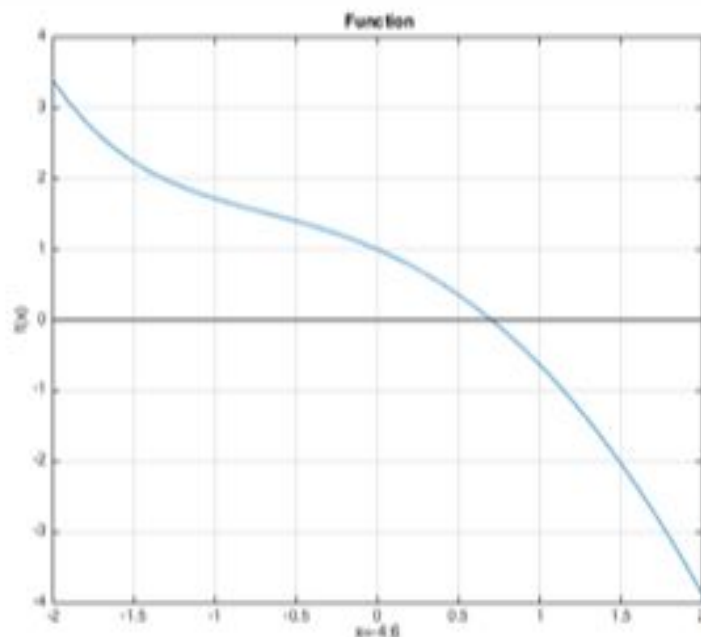
Часто c берут в виде:

$c = 2 / (M + m)$, где $M = \max(f'(x))$, $m = \min(f'(x))$.

Пример. Требуется решить нелинейное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$.

Допустим, что в результате аналитического отделения корней было найдено, что корень уравнения находится на интервале $[0, 1]$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3.389	1.718	1	-0.632	-3.865



Приведем исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

к эквивалентному виду $x = \varphi(x)$. Возможны варианты.

Какие?

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

$$1) x = \varphi(x) = -2 \ln(x)$$

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

$$2) \quad x = \varphi(x) = \sqrt{e^{-x}}$$

исходное уравнение $g(x) = e^{-x} - x^2 = 0$

1) $x = \varphi(x) = -2 \ln(x)$

2) $x = \varphi(x) = \sqrt{e^{-x}}$

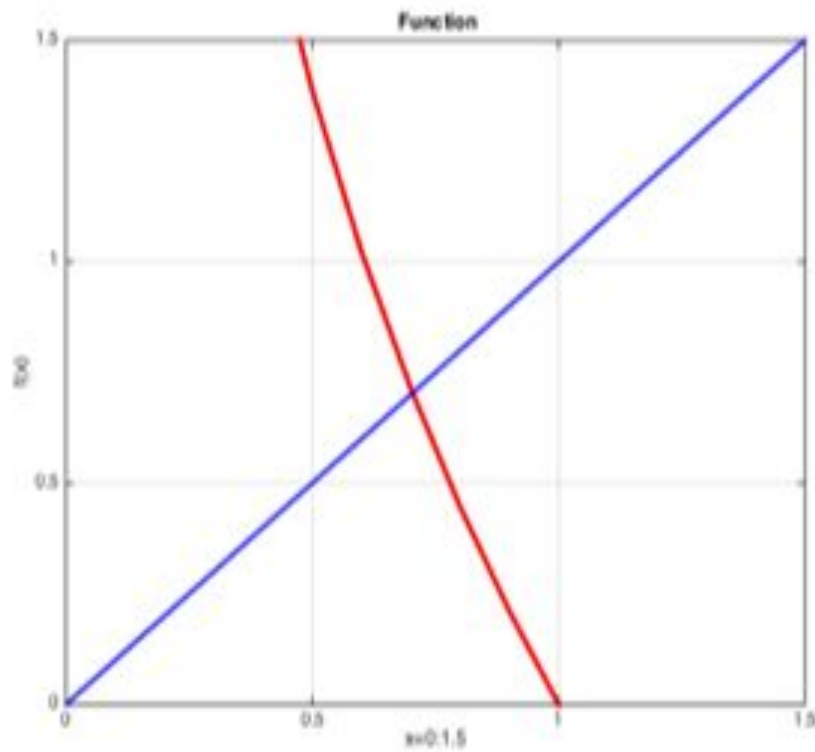
Проверим для каждого из них условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$:

1) $\varphi'(x) = -\frac{2}{x}$ и очевидно, что на интервале $[0, 1]$ $|\varphi'(x)| > 1$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$ -2/x $	$+\infty$	8	4	2.667	2

и, следовательно, метод итераций при таком эквивалентном уравнении $x = \varphi(x) = -2 \ln(x)$ сходиться не будет.

$$x = \varphi(x) = -2 \ln(x)$$



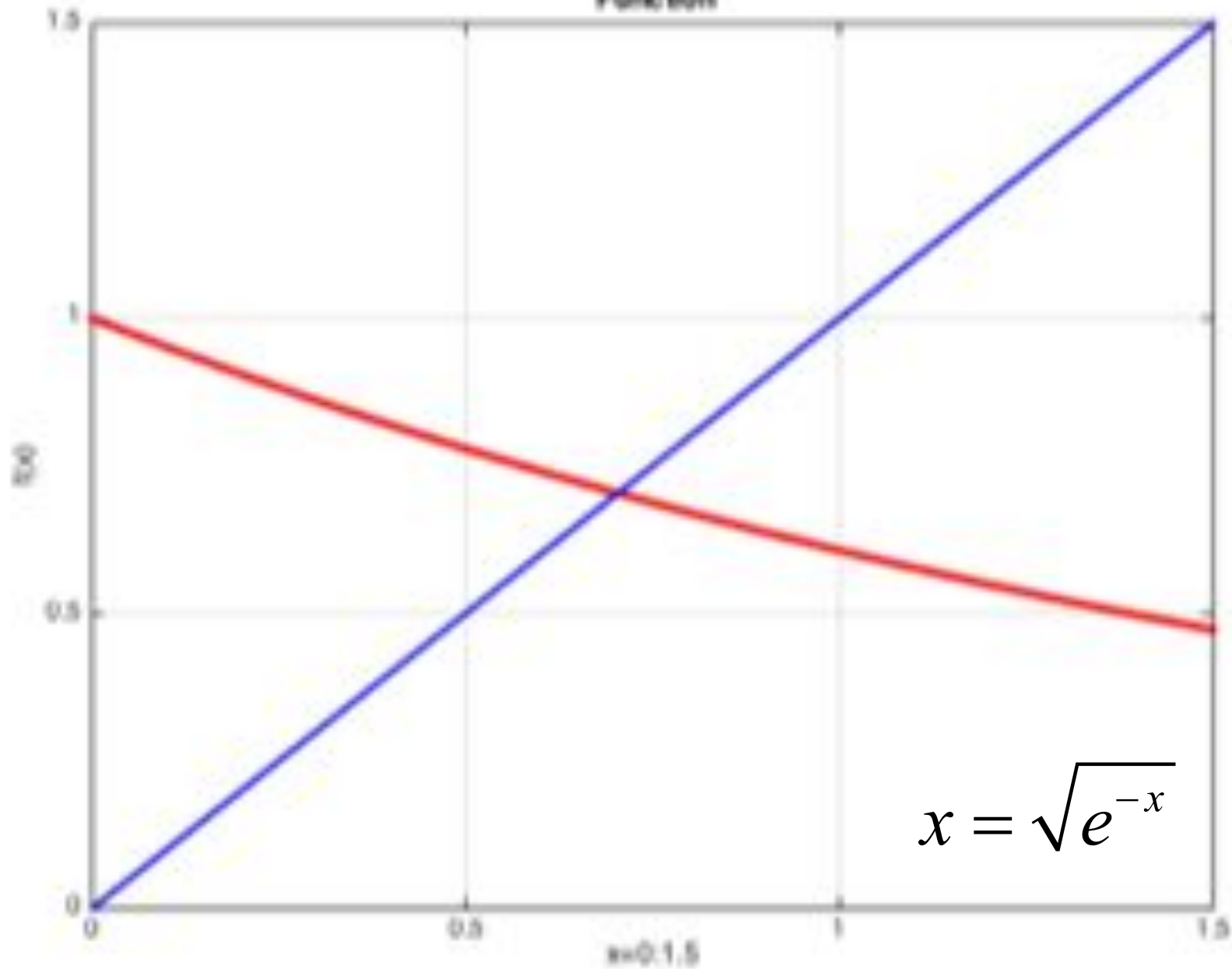
```
x=0:0.1:1.5;  
%y=exp(-x)-x.^2;  
y=-2*log(x); y2=x.*1;y1=x.*0;  
plot(x, y, '-r', 'LineWidth',3);  
hold on  
plot(x, y1, '-k')  
plot(x, y2, '-b', 'LineWidth',2)  
xlabel('x=0:1.5');ylabel('f(x)')  
title(' Function')  
ylim([0,1.5]);xlim([0,1.5]);  
grid on
```


2) $\varphi'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$. На интервале $[0, 1]$ $|\varphi'(x)| < 1$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$\frac{e^{-x/2}}{2}$	0.5	0.441	0.384	0.345	0.303

и, следовательно, метод итераций при таком эквивалентном уравнении $x = \sqrt{e^{-x}}$ сходится, что хорошо видно из приведенных ниже результатов расчета.

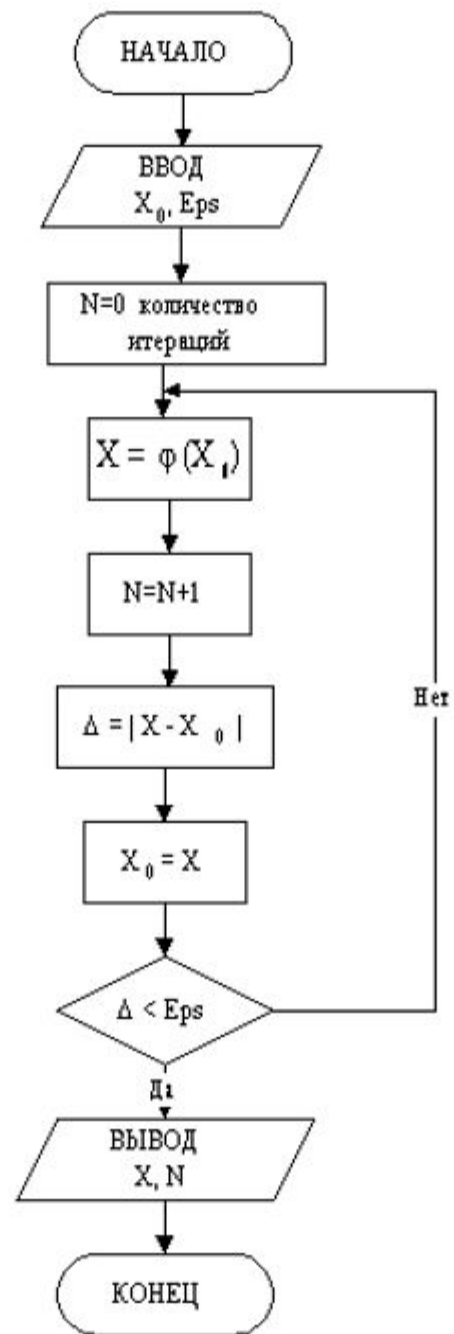
Function



$$x = \sqrt{e^{-x}}$$

В качестве начального приближения может быть выбрано любое число, принадлежащее исходному интервалу, например, $x_0=0$.

n	x_n	$x = \sqrt{e^{-x}}$
0	0	1
1	1	0.607
2	0.607	0.738
3	0.738	0.691
4	0.691	0.708
5	0.708	0.702
6	0.702	0.704
7	0.704	0.703



Действительно, в силу теоремы Лагранжа,

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| |x' - x''| \leq k |x' - x''|.$$

Теорема Лагранжа о среднем значении утверждает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x = \xi$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

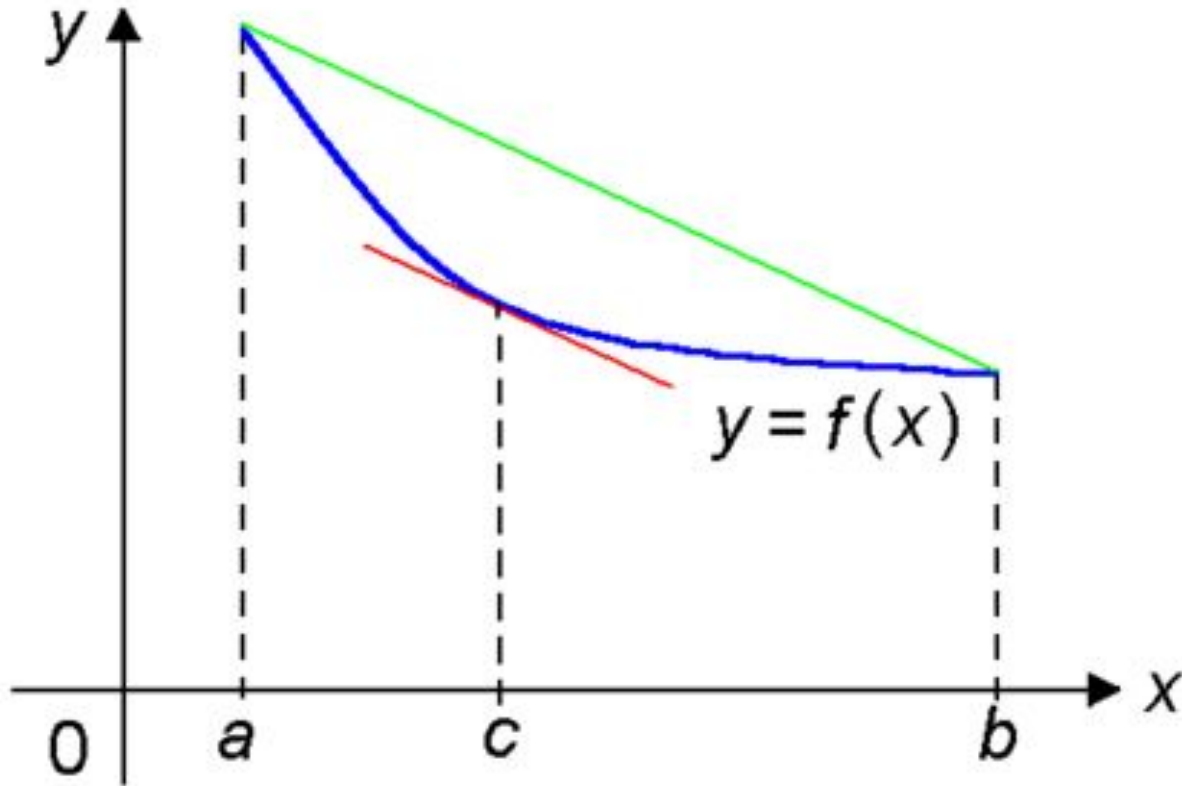
Данная теорема называется также *формулой конечных приращений*, поскольку она выражает приращение функции на отрезке через значение производной в промежуточной точке этого отрезка.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Представим формулу (1) в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) . \quad (2)$$

Число $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через концы графика функции $y = f(x)$ — точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к этому графику в точке $(c, f(c))$. Из формулы (2) следует, что существует точка с $O(a, b)$, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней) (рис. 2).



Поэтому отображение $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ является сжатым отображением полного метрического пространства $[a, b]$ в себя.

По теореме С. Банаха, такое отображение имеет единственную неподвижную точку, значит, уравнение (1) имеет единственный корень \tilde{x} .

Пусть $x_0 \in [a, b]$ - произвольная точка. Тогда последовательность точек

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

сходится к точке \tilde{x} .

Кроме того, имеет место оценка погрешности:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq k^n \frac{|x_0 - x_1|}{1 - k}.$$

Итак, для решения уравнения (1) выбирается некоторое начальное приближение $x_0 \in [a, b]$ и последовательно находятся приближенные решения (итерации) уравнения (1).

Значение итерации x_{n+1} выражается через известную предыдущую итерацию. Данный метод носит название метода итераций.

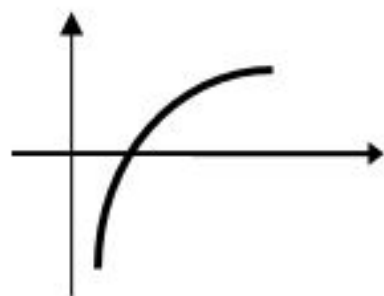
3. Метод хорд

Предположим, что функция $g(x)$ в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям:

- $g \in C^2([a, b])$, $g(a)g(b) < 0$;
- $g'(x) > 0$, $g''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$.

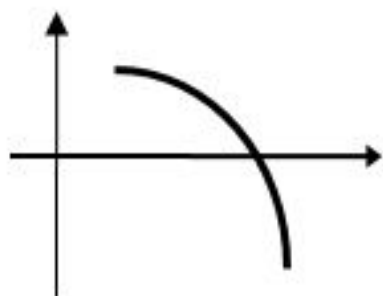
Остальные случаи для знаков производных разбираются аналогично. Обозначим через ξ корень уравнения (1).

Возможные случаи поведения $f(x)$ на $[a, b]$:



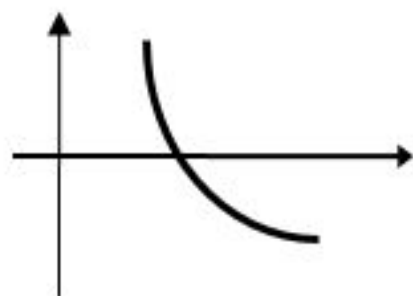
$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) < 0$$



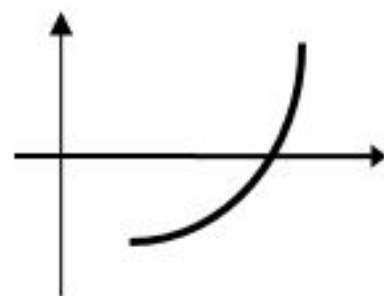
$$f'(x) < 0$$

$$f''(x) < 0$$



$$f'(x) < 0$$

$$f''(x) > 0$$



$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) > 0$$

Метод хорд состоит в следующем.

График функции g заменяется его хордой, т.е. отрезком, соединяющим точки $(a, g(a))$, $(b, g(b))$ (рис. 1). Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня.

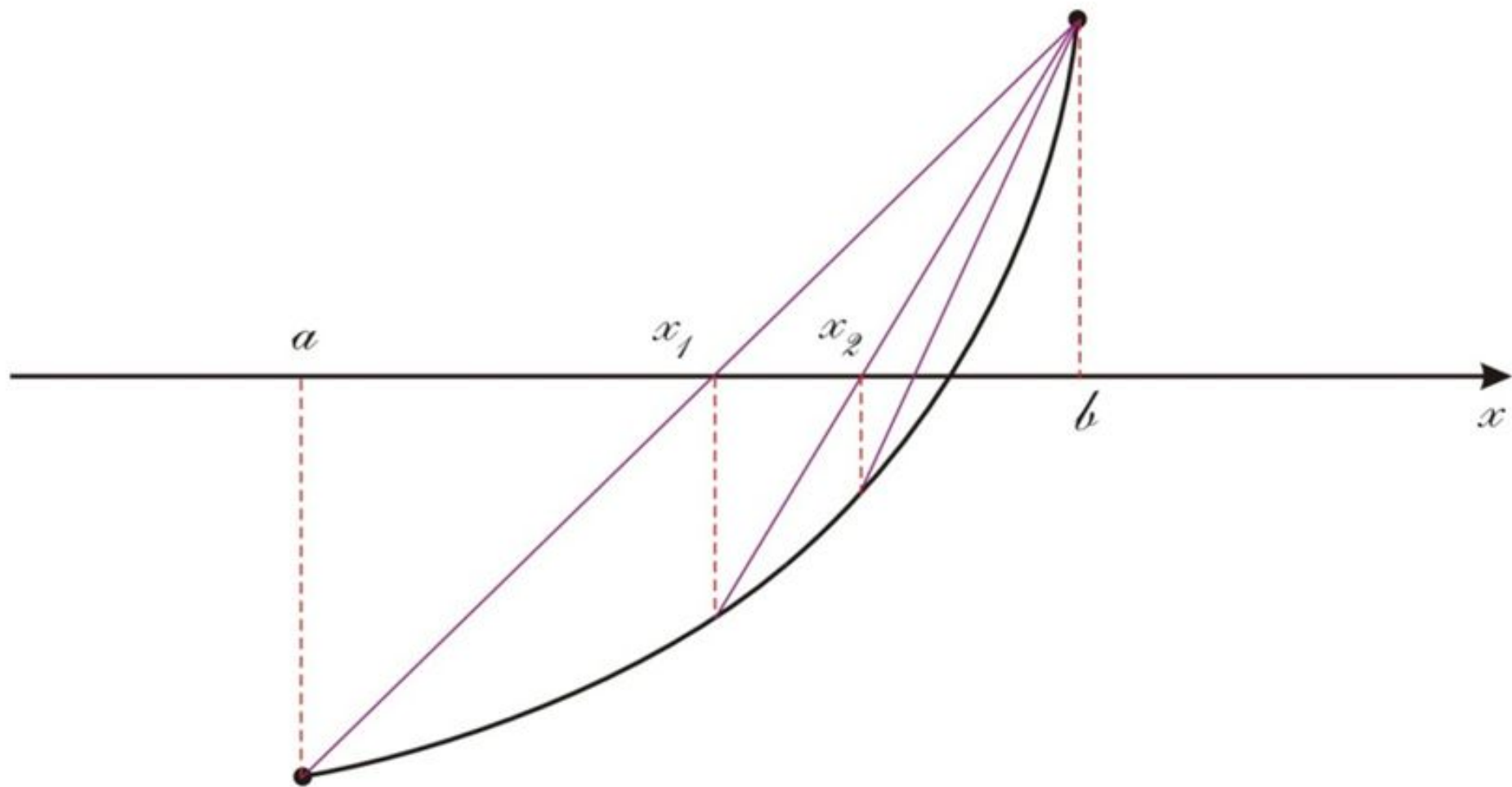


Рис 1. Решение уравнения по методу хорд

Уравнение хорды имеет вид $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-g(a)}{g(b)-g(a)}$.

Его можно переписать в виде $y = g(a) + \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)$.

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$.

Решая уравнение $l(x)=0$, находим

$$x_1 = a - \frac{g(a)}{g(b)-g(a)}(b-a).$$

Так как $g(b) > 0$, $g(a) < 0$, то $a < x_1 < b$.

Действительно, $b - x_1 = (b - a) \frac{g(b)}{g(b) - g(a)} > 0$ и,

кроме того, $x_1 - a = -\frac{g(a)}{g(b) - g(a)}(b - a) > 0$.

Так как $g''(x) > 0$, то функция выпукла вниз, следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции g , лежит над соответствующей точкой графика функции g , т.е.

$$l(x) > g(x), \quad a < x < b.$$

Поэтому, $l(\xi) > g(\xi) = 0$.

Так как $0 = l(x_1) < l(\xi)$, то, в силу возрастания функции $y = l(x)$, получаем, что $x_1 < \xi$.

Снова проводим хорду через точки $(x_1, g(x_1))$, $(b, g(b))$ и находим

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g(b) - g(x_1)}(b - x_1).$$

Продолжая описанный процесс, получим ограниченную монотонно возрастающую последовательность $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots < \xi < b$, где

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g(b) - g(x_n)}(b - x_n). \quad (4)$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Переходя к пределу в равенстве (4), получим $g(c) = 0$. Таким образом, последовательность сходится к корню уравнения (1).

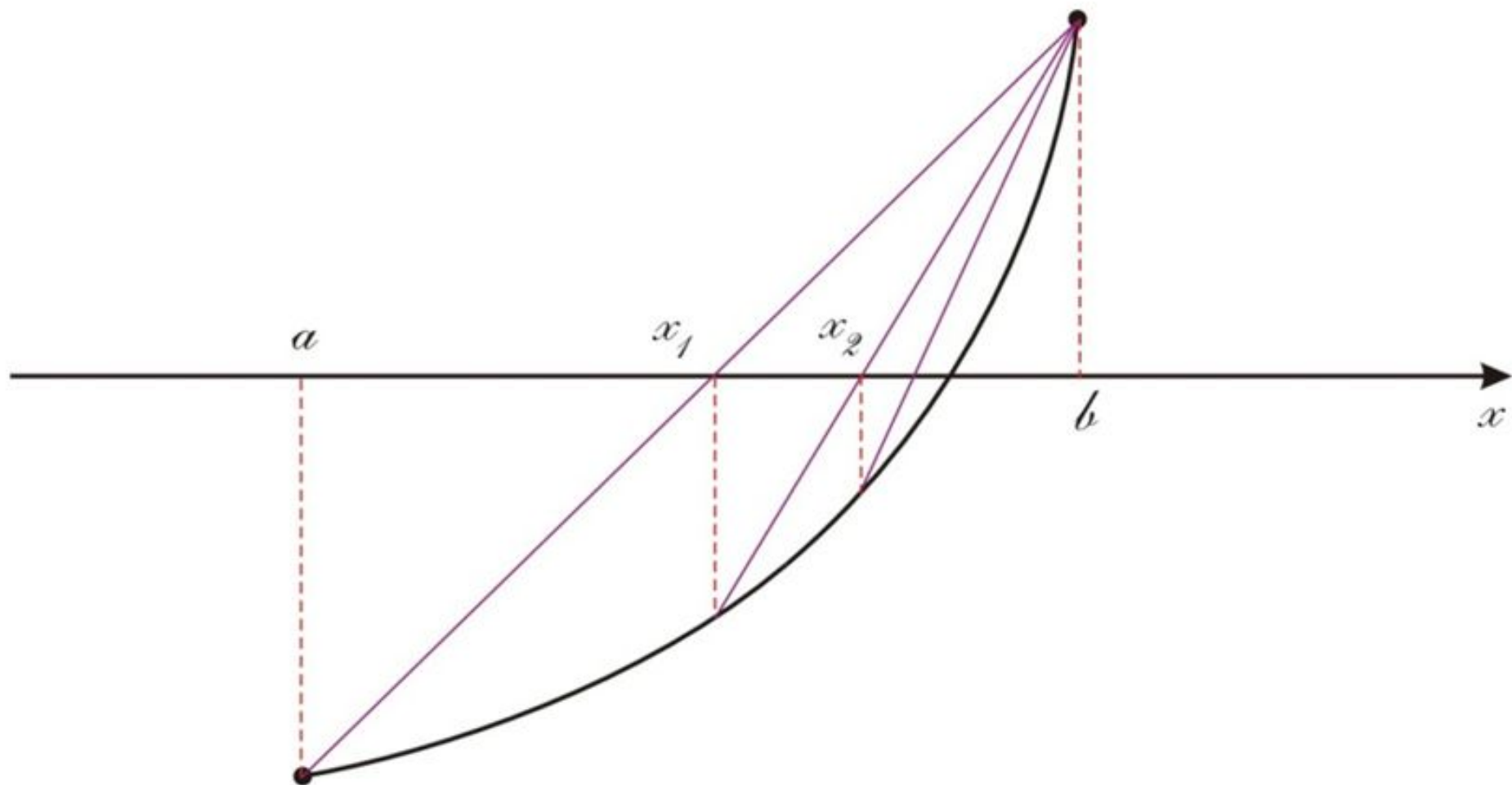


Рис 1. Решение уравнения по методу хорд

Предположим, что $|g'(x)| \geq m > 0$, $a < x < b$.

Тогда, по теореме Лагранжа, получим

$$g(x_n) = g(x_n) - g(\xi) = g'(c_n)(x_n - \xi).$$

Отсюда

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|g(x_n)|}{m}. \quad (5)$$

Неравенство (5) дает оценку погрешности приближенного корня.

Практический выбор той или иной формулы осуществляется, пользуясь следующим **правилом**: неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.

Комбинированный метод (хорд и касательных)

Метод хорд и метод касательных дают приближения к корню с разных сторон (см. рис.1.7). Совместное использование методов позволяет на каждой итерации находить приближенные значения с недостатком и с избытком, что ускоряет процесс сходимости.

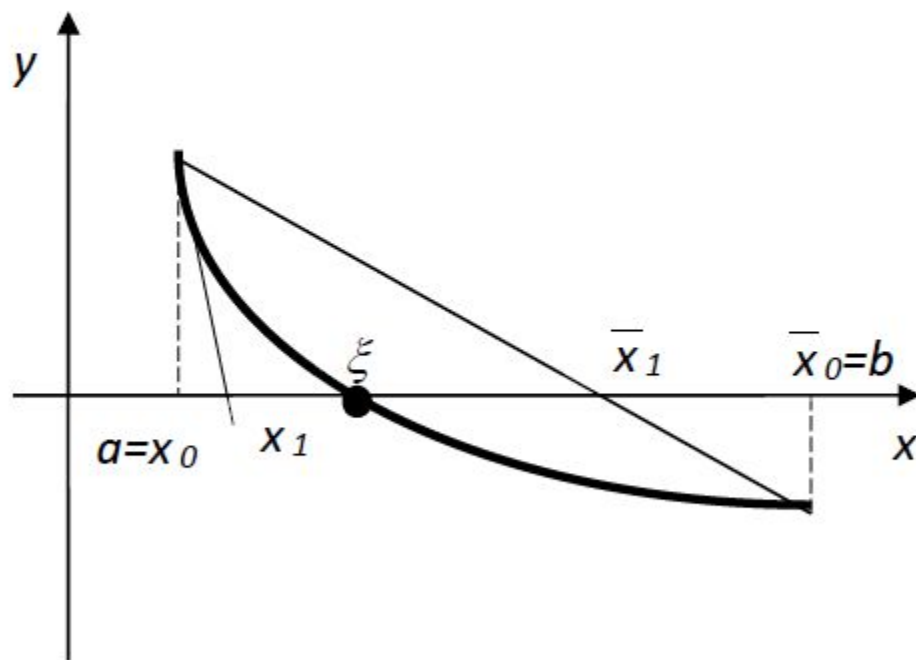


Рис. 1.7