практика

5117

БАЗИС И КООРДИНАТЫ.

Была задана домашняя работа:

Задача 3.

Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; AD, BE, CF $-$ медианы.

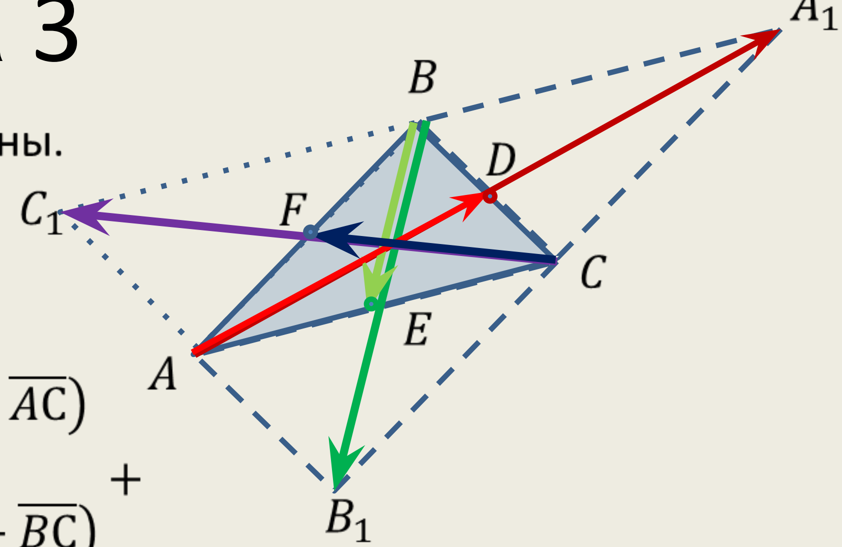
Доказать: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

Задача 4.

Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; M $-$ точка пересечения медиан; O $-$ любая точка.

Доказать: $\overline{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \right)$

Задача 3



Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; AD, BE, CF – медианы.

Доказать: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

Доказательство :

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{AC};\quad \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} \;\Rightarrow\; \overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)$$

$$+$$

$$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{BC};\quad \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BB_1} \Rightarrow \quad \overline{BE} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC}\right)$$

$$+$$

$$\overline{CC_1} = \overline{CB} + \overline{CA};\quad \overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{CC_1} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CA}\right)$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CA}\right)$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cancel{\overline{AB}} + \cancel{\overline{AC}} + \cancel{\overline{BA}} + \cancel{\overline{BC}} + \cancel{\overline{CB}} + \cancel{\overline{CA}}\right)}_{\overline{0}}$$

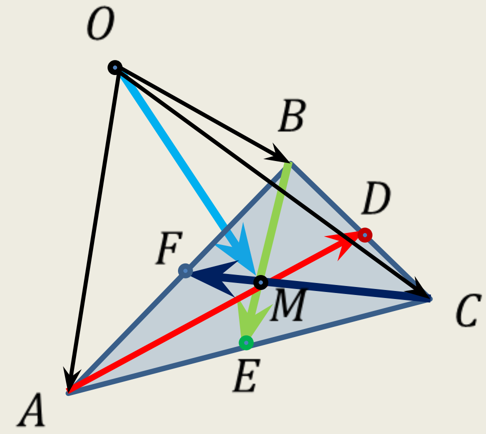
$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{0}$$

$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$, **чтд.**

Задача 4

Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; M — точка пересечения медиан; O — любая точка.

Доказать: $\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$.



Доказательство :

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD};$$

$$+$$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$+$$

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CF};$$

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \frac{2}{3}\underbrace{\left(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}\right)}_{\overline{0}\ \text{по задаче 3}}$$

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \Rightarrow$$

$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$, чтд.

Медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$|AM| : |MD| = 2 : 1 \Rightarrow |AM| = \frac{2}{3}|AD|;$$

$$|BM| : |ME| = 2 : 1 \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$|CM| : |MF| = 2 : 1 \Rightarrow \overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CF};$$

Лекция 7(окончание)

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Линейные операции в координатах

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора РАВНЫ

$$\overline{a} = \overline{b} \iff (a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z)$$

РАВНЫ их СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КООРДИНАТЫ

СЛОЖЕНИЕ и ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

При СЛОЖЕНИИ векторов

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

одноименные координаты СКЛАДЫВАЮТСЯ

При ВЫЧИТАНИИ векторов

$$\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

одноименные координаты ВЫЧИТАЮТСЯ

УМНОЖЕНИЕ на ЧИСЛО

При УМНОЖЕНИИ вектора на

$$\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

каждая координата УМНОЖАЕТСЯ на это ЧИСЛО

Коллинеарность векторов

Выясним условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Так как дано , что $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то по теореме 1

можно найти такое число λ, что $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$.

В координатах это

значит:

$$b_x = \lambda \cdot a_x\ ; \quad b_y = \lambda \cdot a_y\ ; \quad b_z = \lambda \cdot a_z\ ;$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \lambda \qquad \frac{b_y}{a_y} = \lambda \qquad \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda}$$

Вывод :

ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ $\Leftrightarrow$ КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ.

ПРИМЕР. Проверить коллинеарность векторов $\overline{a} = (3, -2, 1)$ и $\overline{b} = (6, -4, 2)$;

$\overline{a} = (3, -2, 1)$ и $\overline{c} = (9, 6, 3)$;

РЕШЕНИЕ:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{6}{3} = 2; \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad \frac{b_z}{a_z} = \frac{2}{1} = 2; \quad 2 = 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = 2 \cdot \overline{a} \quad \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}\ .$$

$$\frac{c_x}{a_x} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{c_y}{a_y} = \frac{6}{-2} = -3; \quad 3 \neq -3 \quad \Rightarrow \quad \overline{a} \nparallel \overline{c}$$

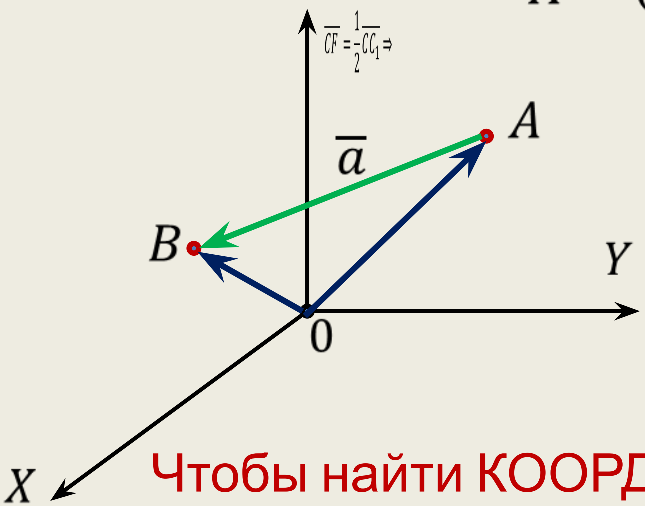
$\overline{a}$ и $\overline{c}$ **НЕ КОЛЛИНЕАРНЫ.**

ВОПРОС : что можно сказать про направление векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A);\ \ B = (x_B, y_B, z_B);$$



$$\overline{a} = \overline{AB} = \overline{0B} - \overline{0A} =$$

$$\boxed{= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);}$$

Чтобы найти КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА, надо из КООРДИНАТ точки КОНЦА вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие КООРДИНАТЫ точки НАЧАЛА вектора.

ПРИМЕР: $A = (4, -2, -4); B = (6, -3, 2);$

$$\overline{AB} = \big(6 - 4, -3 - (-2\,), 2 - (-4)\big) = (2, -3 + 2, 2 + 4) = (2, -1, 6).$$

$$C = (-10, 5, -14); D = (6, -8, 0);$$

$$\overline{CD} = \big(6 - (-10), -8 - 5, 0 - (-14)\big) = \ (6 + 10, -13, 0 + 14) = (16, -13, 14).$$

Задача 1

При каких значениях α и β вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны:

$$\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \alpha\overline{k}\,; \quad \overline{b} = \beta\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}\,;$$

РЕШЕНИЕ: ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ ⇔ КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ:

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda}$$

$$= -2$$

$$\frac{\beta}{-2} = -2 = \frac{2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \beta = (-2)\cdot(-2) = 4; \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{2}{-2} = -1;$$

ОТВЕТ: $\alpha = -1;\ \beta = 4$

Задача 2

ДАНО : координаты **точек** $A(3,-1,2)$; $B(-1,2,1)$;

НАЙТИ : координаты **векторов** $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

РЕШЕНИЕ: Чтобы найти КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА, надо из КООРДИНАТ точки КОНЦА вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие КООРДИНАТЫ точки НАЧАЛА вектора.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-1-3\,, 2-(-1), 1-2) = \mathbf{(-4,3,-1)};$$

$$\overline{BA} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) = (3-(-1), -1-2, 2-1) = (4,-3,1);$$

СПОСОБ 2:

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = - \qquad = (4,-3,1);$$

ОТВЕТ:

$\overline{AB} = (-4,3,-1);$

$\overline{BA} = (4,-3,1);$

Задача 3

ДАНО: $\overline{a} = (3, -2, 6)$; $\overline{b} = (-2, 1, 0)$;

НАЙТИ:

1) $\overline{a} + \overline{b} = (1, -1, 6)$;

2) $\overline{a} - \overline{b} = (5, -3, 6)$;

3) $2\overline{a} = (6, -4, 12)$;

4) $-\frac{1}{2}\overline{b} =$ B_1

5) $2\overline{a} + 3\overline{b} =$

6) $\frac{1}{2}\overline{a} - \overline{b} =$

Домашняя работа

На отдельном листе: (свой вариант РГР)

Найти

1. Длину вектора $\overline{A_1A_2}$.

В тетради:

Задача

Дано: $ABCD$ $-$параллелограмм :

$A(3,-4,7), B(-5,3,2), C(1,2,-3)$.

Найти координаты его вершины $D(x,y,z)$, противоположной B.

ДЛЯ ЖЕЛАЮЩИХ:

Задача

Определить координаты вершин треугольника, если известны координаты середин его сторон: $K(2;-4), M(6;1), N(-2;3)$.

Задача

Дано : координаты вершин треугольника ΔABC : $A(3,-1,5)$; $B(4,2,-5), C(-4,0,3)$;

Найти : длину медианы, проведенной из вершины A.