

практика

5117

# **БАЗИС И КООРДИНАТЫ.**

# Была задана домашняя работа:

## Задача 3.

**Дано:** треугольник  $\Delta ABC$ ;  $AD, BE, CF$  – медианы.

**Доказать:**  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$ .

## Задача 4.

**Дано:** треугольник  $\Delta ABC$ ;  $M$  – точка пересечения медиан;  $O$  – любая точка.

**Доказать:**  $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$

# Задача 3

**Дано:** треугольник  $\Delta ABC$ ;  $AD, BE, CF$  — медианы.

**Доказать:**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ .

**Доказательство:**

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

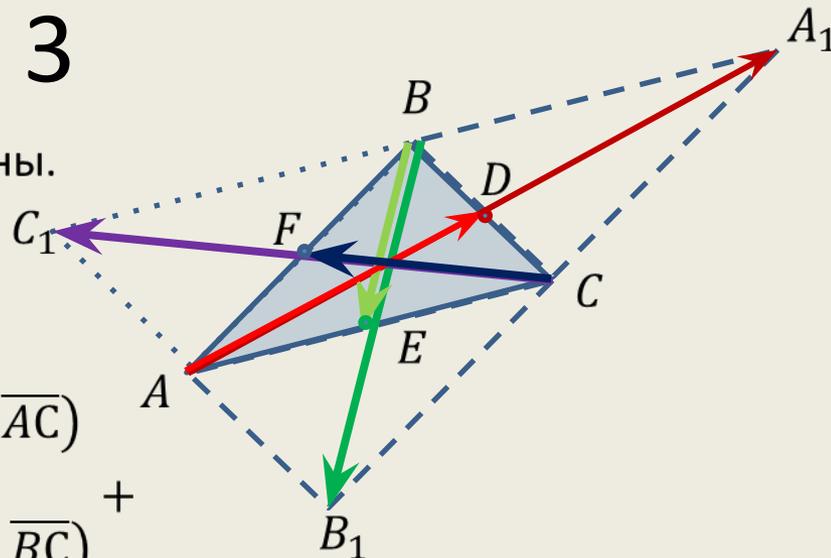
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}; \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\cancel{\overrightarrow{AB}} + \cancel{\overrightarrow{AC}} + \cancel{\overrightarrow{BA}} + \cancel{\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{CB}} + \cancel{\overrightarrow{CA}})$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \cdot \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}, \text{ что и требовалось доказать.}$$



# Задача 4

Дано: треугольник  $\Delta ABC$ ;  $M$  — точка пересечения медиан;  $O$  — любая точка.

Доказать:  $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ .

Доказательство :

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD};$$

+

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BE};$$

+

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CF};$$

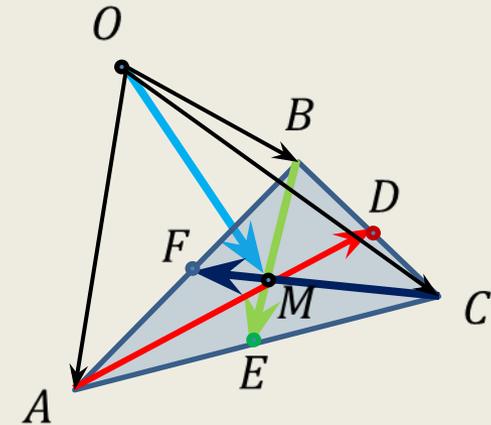
---

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \frac{2}{3}(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF})$$

$\overline{0}$  по задаче 3

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \Rightarrow$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}), \text{ что и требовалось доказать.}$$



Медианы в  
треугольнике  
точкой пересечения делятся  
в отношении 2 : 1,  
считая от вершины:

$$|AM| : |MD| = 2 : 1 \Rightarrow |AM| = \frac{2}{3}|AD|;$$

$$|BM| : |ME| = 2 : 1 \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$|CM| : |MF| = 2 : 1 \Rightarrow \overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CF};$$

Лекция 7(окончание)

# **ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ**

# Линейные операции в

## координатах

### РАВЕНСТВО

### ВЕКТОРОВ

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z)$$

Два  
вектора  
РАВНЫ

РАВНЫ их

СООТВЕТСТВУЮ  
ЩИЕ  
КООРДИНАТЫ

### СЛОЖЕНИЕ и ВЫЧИТАНИЕ

### ВЕКТОРОВ

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

При  
СЛОЖЕНИИ  
векторов

одноименные  
координаты  
СКЛАДЫВАЮТ  
СЯ

При  
ВЫЧИТАНИИ  
векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

одноименные  
координаты

ВЫЧИТАЮТС  
Я

### УМНОЖЕНИЕ на

### ЧИСЛО

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

При  
УМНОЖЕНИИ  
вектора на

каждая координата  
УМНОЖАЕТСЯ  
на это ЧИСЛО

# Коллинеарность векторов

Выясним условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Пусть  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ;  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ . Так как дано, что  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то по теореме 1

можно найти такое число  $\lambda$ , что  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ .

В координатах это

значит:  $b_x = \lambda \cdot a_x$ ;  $b_y = \lambda \cdot a_y$ ;  $b_z = \lambda \cdot a_z$ ;

$$\frac{b_x}{a_x} = \lambda \quad \frac{b_y}{a_y} = \lambda \quad \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

**Вывод :**

**ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ  $\Leftrightarrow$  КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ.**

**ПРИМЕР.** Проверить коллинеарность векторов  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  и  $\vec{b} = (6, -4, 2)$ ;

**РЕШЕНИ**

$$\vec{a} = (3, -2, 1) \text{ и } \vec{c} = (9, 6, 3);$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{6}{3} = 2; \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad \frac{b_z}{a_z} = \frac{2}{1} = 2; \quad 2 = 2 = 2 \Rightarrow \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} .$$

$$\frac{c_x}{a_x} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{c_y}{a_y} = \frac{6}{-2} = -3; \quad 3 \neq -3 \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{c}$$

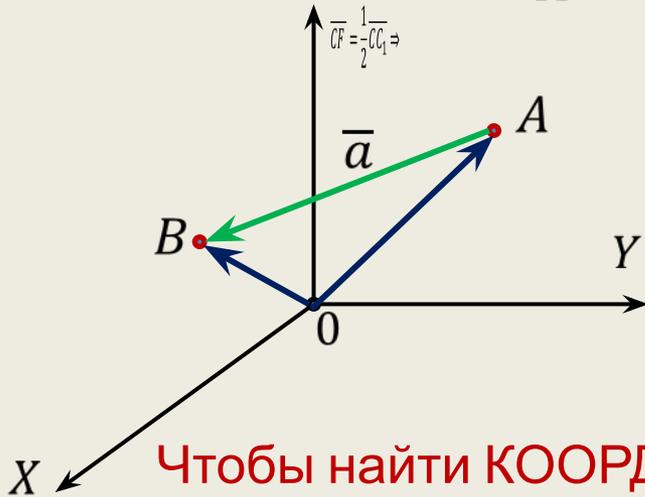
$\vec{a}$  и  $\vec{c}$  **НЕ КОЛЛИНЕАРНЫ.**

**ВОПРОС :** что можно сказать про направление векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ?

# Координаты вектора

Найдем координаты вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$ , если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); B = (x_B, y_B, z_B);$$



$$\vec{a} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} =$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);$$

Чтобы найти **КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА**, надо из **КООРДИНАТ** точки **КОНЦА** вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие **КООРДИНАТЫ** точки **НАЧАЛА** вектора.

**ПРИМЕ**  $A = (4, -2, -4); B = (6, -3, 2);$

**Р:**

$$\overline{AB} = (6 - 4, -3 - (-2), 2 - (-4)) = (2, -3 + 2, 2 + 4) = (2, -1, 6).$$

$$C = (-10, 5, -14); D = (6, -8, 0);$$

$$\overline{CD} = (6 - (-10), -8 - 5, 0 - (-14)) = (6 + 10, -13, 0 + 14) = (16, -13, 14).$$

# Задача

При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  коллинеарны:

$$\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}; \quad \bar{b} = \beta\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k};$$

**РЕШЕНИЕ:**

**ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ  $\Leftrightarrow$  КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ:**

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

$$\frac{\beta}{-2} = -2 = \frac{2}{\alpha}$$

$$\frac{\beta}{-2} = -2 = \frac{2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \beta = (-2) \cdot (-2) = 4;$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{-2} = -1;$$

**ОТВЕТ:**  $\alpha = -1; \beta = 4$

# Задача 2

**ДАНО** : координаты точек  $A(3, -1, 2)$ ;  $B(-1, 2, 1)$ ;

**НАЙТИ** : координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{BA}$ .

## РЕШЕНИ

**Е:** Чтобы найти **КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА**, надо из **КООРДИНАТ** точки **КОНЦА** вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие **КООРДИНАТЫ** точки

**НАЧАЛА** вектора.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-1 - 3, 2 - (-1), 1 - 2) = (-4, 3, -1);$$

$$\overline{BA} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) = (3 - (-1), -1 - 2, 2 - 1) = (4, -3, 1);$$

## СПОСОБ

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = -(-4, 3, -1) = (4, -3, 1);$$

**ОТВЕТ:**

$$\overline{AB} = (-4, 3, -1);$$

$$\overline{BA} = (4, -3, 1);$$

# Задача 3

ДАНО:  $\bar{a} = (3, -2, 6)$ ;  $\bar{b} = (-2, 1, 0)$ ;

НАЙТИ:

1)  $\bar{a} + \bar{b} = (1, -1, 6)$ ;

2)  $\bar{a} - \bar{b} = (5, -3, 6)$ ;

3)  $2\bar{a} = (6, -4, 12)$ ;

4)  $-\frac{1}{2}\bar{b} = B_1$

5)  $2\bar{a} + 3\bar{b} =$

6)  $\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b} =$

# Домашняя работа

**На отдельном листе:** (свой вариант РГР)

Найти

1. Длину вектора  $\overline{A_1A_2}$ .

**В** Задача

**тетради:** **Дано:**  $ABCD$  – параллелограмм :

$A(3, -4, 7), B(-5, 3, 2), C(1, 2, -3)$ .

**Найти** координаты его вершины  $D(x, y, z)$ , противоположной  $B$ .

**ДЛЯ  
ЖЕЛАЮЩИХ:**

Задач

а) Определить координаты вершин треугольника, если известны координаты середин его сторон:  $K(2; -4), M(6; 1), N(-2; 3)$ .

Задач

Дано : координаты вершин треугольника  $\triangle ABC$  :  $A(3, -1, 5); B(4, 2, -5), C(-4, 0, 3)$ ;

Найти : длину медианы, проведенной из вершины  $A$ .