Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

Задача из § 9

Задача 9.1. Пусть φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$. Отображение f действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения f.

Решение.

Вычислим производную $f'(a)$ в произвольной точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где $P_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n=1$ получим:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+r_1(a), \tag{1}$$

где

$$r_1(a)=\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2}\cdot h^2. \tag{2}$$

Рассмотрим приращение отображения f (с учетом (1) и (2)):

$$f(a+h)-f(a) = \varphi(a+h)- \varphi(a) = \varphi'(a)h+r_1(a).$$

Обоснование того, что $r_1(a)=o(\|h\|_E)$, почти дословно повторяет аналогичное доказательство из **примера 3**.

Тогда, очевидно,

$$\left(f'(a)h\right)(t)= \varphi'(a(t))\cdot h(t) \text{ при } \forall h\in E \text{ и } \forall t\in[0,1].$$

§ 11. Вторая производная как билинейное отображение

1. Билинейные отображения.

Пусть E и F — ЛНП-ва (веществ-е), $B : E \times E \longrightarrow F$ — отображение.

Опр. 1. Отобр-е B называется **билинейным**, если $\forall h, k, h_1, h_2, k_1, k_2 \in E$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k)$,

2) $B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2)$.

Опр. 2. Билинейное от-е B наз-ся **симметричным**, если $\forall h, k \in E$ $B(h, k) = B(k, h)$.

2. Производная второго порядка.

Пусть E и F — ЛНП-ва (вещест-е), $\mathcal{U}$ — открытое множ-во в E, $f: \mathcal{U} \longrightarrow F$ — отображение.
Пусть отображ-е f <u>дважды непрерывно дифференцируемо</u> (по Фреше) <u>на мн-ве $\mathcal{U}$</u>, т.е. $\forall x \in \mathcal{U}$ $\exists$-ют $f'(x)$ и $f''(x)$, причем $f''(x)$ непрерывна по x на $\mathcal{U}$ как операторное отображение $f'': x \longmapsto f''(x)$ $(f'': \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)))$.

Рассмотрим отображение $B: E \times E \to F$,
<u>$B(h,k) = [f''(x)h]k = [Ah]k$</u>, где $A = f''(x): E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ — лоо, элемент $x \in \mathcal{U}$ — фиксирован.

Проверим условия 1) и 2) из опр. 1.

1) $B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = [\underset{\text{ЛОО}}{A}(\alpha h_1 + \beta h_2)]k = [\alpha \cdot \underbrace{Ah_1}_{\substack{\text{ЛОО} \\ (\text{из } E \text{ в } F)}} + \beta \cdot \underbrace{Ah_2}_{\text{ЛОО}}]k =$

$= [\alpha \cdot Ah_1]k + [\beta \cdot Ah_2]k =$

$= \alpha \cdot [Ah_1] \cdot k + \beta \cdot [Ah_2]k = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k).$

2) $B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \underbrace{[Ah]}_{\text{ЛОО из } E \text{ в } F}(\alpha k_1 + \beta k_2) =$

$= \alpha \cdot [Ah]k_1 + \beta \cdot [Ah]k_2 = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).$

Итак, $\underline{B(h, k) = [Ah]k \text{ — билинейное отобр-е.}}$

Покажем, что $B(h,k)$ — <u>симметричное</u> бил. от-е
Зафиксируем произвольные $h, k \in E$ и рассмотрим $\ell \in F^*$ (пока произвольный).
Рассмотрим функцию $\varphi(t,s) = \ell[f(x+th+sk)]$, $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^1$. Вычислим частные производные функции φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s) = \ell[f'(x+th+sk)h]$$

($\ell'(y) = \ell$, т.к. ℓ — лин. ф-л; $(x+th+sk)'_t = h$);

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial s}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s)\right] = \ell\left[\left(f''(x+th+sk)k\right)h\right];$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\,\partial t}(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\right] = \ell\left[\left(f''(x+th+sk)h\right)k\right].$$

Пр-е $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial s}(t,s)$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\,\partial t}(t,s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) $\Rightarrow$

Пр-е $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(t,s)$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(t,s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти производные равны (по теореме из мат. анализа).

Тогда при $t=s=0$ имеем:

$$\ell[(f''(x)k)h] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(0,0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(0,0) = \ell[(f''(x)h)k] \quad (*)$$

Уточним вид ф-ла ℓ.

<u>Следствие из теоремы Хана-Банаха:</u>

для всякого $y \in F$ $(y \neq \theta)$ $\exists$ ЛОФ $\ell \in F^*$:

1) $\ell(y) = \|y\|$ и 2) $\|\ell\| = 1$.

Пусть $y = (f''(x)k)h - (f''(x)h)k \in F$. <u>П: $y \neq \theta$.</u>

Тогда из $(*)$ $\Rightarrow$ $\|y\| = \ell(y) = 0 \Rightarrow$ <u>$y = \theta$</u>.

Получили противоречие. След-но, $y = \theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{(f''(x)k)h = (f''(x)h)k \Rightarrow B(k,h) = B(h,k)}.$$

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

<u>Теорема</u>. Если отобр-е $f: U \to F$ дважды непрерывно дифференцируемо на множ-ве U, то вторая производная $f''(x)$ при $\forall x \in U$ представляет собой симметричное билинейное отображение.

Пусть $h = k$. Выражение $\underline{[f''(x)h]h \overset{\text{обозн.}}{=} d^2 f(x,h)}$ наз-ся <u>вторым дифференциалом отобр-я f в т. x</u>.

Пример 1. Рассмотрим функционал V на банаховом пространстве E, дважды непрерывно дифференцируемый (по Фреше) на E. Пусть E непрерывно вложено в банахово пространство F, F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H.

Предположим, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, то есть задано отображение $f: E \to F$, такое, что

$$V'(x)h = < f(x), h > \quad \forall x \in E, \ \forall h \in E \qquad (1)$$

($< \cdot , \cdot >$ – скалярное произведение в ГП H, $V'(x)$ – производная Фреше функционала V).

Отображение $f : E \to F$ называется *градиентом функционала* V и обозначается $gradV$.

Предположим также, что отображение $f : E \to F$ дифференцируемо по Фреше на E.

Зафиксируем $\forall x \in E$. По определению производной Фреше, $\forall k \in E$

$$V'(x+k) - V'(x) = (V')'(x)k + \omega(x,k) = V''(x)k + \omega(x,k),$$

где $\omega(x,k) = o(k)$, а $V'(x+k)$, $V'(x)$, $V''(x)k$ и $\omega(x,k)$ – линейные непрерывные функционалы на пространстве E (при каждом фиксированном $k \in E$).

$$V'(x+k)-V'(x)=(V')'(x)k+\omega(x,k)=V''(x)k+\omega(x,k),$$

где $\omega(x,k)=o(k)$, а $V'(x+k)$, $V'(x)$, $V''(x)k$ и $\omega(x,k)$ – линейные непрерывные функционалы на пространстве E (при каждом фиксированном $k\in E$).

Тогда $\forall h\in E$

$$V'(x+k)h-V'(x)h=(V'(x+k)-V'(x))h=(V''(x)k+\omega(x,k))h=$$

$$=(V''(x)k)h+\omega(x,k)h,$$

где $(V''(x)k)h=V''(x)(k,h)$ – билинейное отображение, действующее из $E\times E$ в $\mathbb{R}^1$ (билинейная функция).

С другой стороны, с учетом (1), $\forall k, h \in E$

$$V'(x+k)h - V'(x)h = < f(x+k), h > - < f(x), h > =$$

$$= < f(x+k) - f(x), h > = < f'(x)k + \tilde{\omega}(x,k), h > =$$

$$= < f'(x)k, h > + < \tilde{\omega}(x,k), h >,$$

где $\tilde{\omega}(x,k) = o(k)$.

Итак, получили, что

$$(V''(x)k)h + \omega(x,k)h = V'(x+k)h - V'(x)h =$$

$$= < f'(x)k, h > + < \tilde{\omega}(x,k), h >,$$

Итак, получили, что

$$(V''(x)k)h + \omega(x,k)h = V'(x+k)h - V'(x)h =$$

$$= < f'(x)k, h > + < \tilde{\omega}(x,k), h >,$$

следовательно, вторая производная имеет вид

$$V''(x)(k,h) = (V''(x)k)h = < f'(x)k, h > \quad \forall k,h \in E.$$

Второй дифференциал – это квадратичная форма

$$V''(x)(h,h) = \ < f'(x)h, h > .$$

Пример 2. Пусть $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, то есть V – функция n переменных (частный случай примера 1).

Тогда значение производной Фреше функции V в точке $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ на векторе $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)^T$ имеет вид

$$V'(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = \langle f(x), h \rangle,$$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = grad\, V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае $E = F = H = \mathbb{R}^n$.

Из примера 1 следует, что вторая производная

$$V''(x)(k,h) = < f'(x)k,\, h > \quad \forall k,h \in \mathbb{R}^n.$$

Оператору $f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ соответствует матрица Якоби отображения $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют также *матрицей Гессе* функции V в точке x.

Итак, в данном случае вторая производная имеет вид

$$V''(x)(k,h) = < f'(x)k,\, h > = < \frac{\partial f}{\partial x}(x)k,\, h > = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) h_i k_j$$

для $\forall k, h \in \mathbb{R}^n$.

Второй дифференциал – это квадратичная форма

$$V''(x)(h,h) = < \frac{\partial f}{\partial x}(x)h,\, h > = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) h_i h_j \ .$$

§ 12. Гладкие отображения и диффеоморфизмы

Пусть E и F – ЛНП-ва, $\mathcal{U}$ – открытое мн-во в E; $f: \mathcal{U} \to F$ – отображение.

<u>Определение 1.</u> Отобр-е $f: \mathcal{U} \to F$ называется <u>гладким класса C^r</u> (или <u>C^r-гладким</u>), если на мн-ве $\mathcal{U}$ существуют и непрерывны производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ (r – натур-е число, $r \geq 1$).

Предположим, что $f: \mathcal{U} \to V$, где V – открытое множ-во в F.

Предположим, что $f: U \to V$, где V — открытое множ-во в F.

<u>Определение 2.</u> Отобр-е $f: U \to V$ наз-ся <u>C^r-диффеоморфизмом</u>, если

1) f — биективное (взаимно-однозначное) отображение U на V и

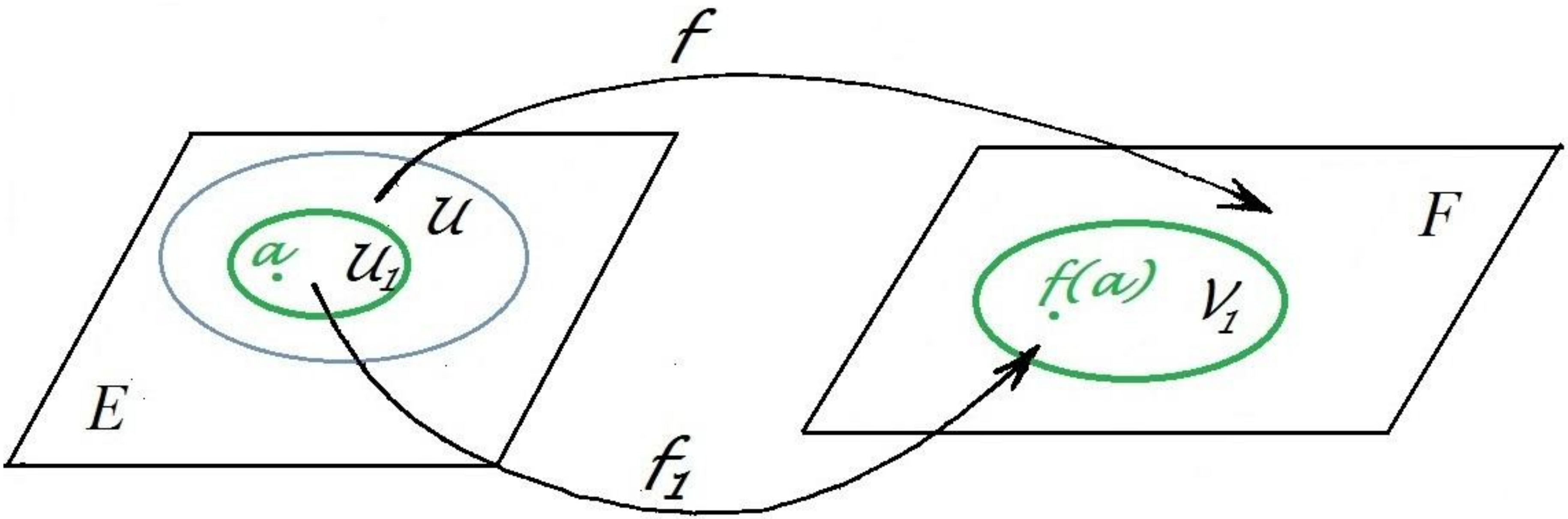
2) f и f^{-1} — C^r-гладкие отображ-я.

Замечание. Отобр-е $f^{-1}: V \to U$; если $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$;

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in V$$ и

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in U.$$

Определение 3. Отобр-е $f: \mathcal{U} \to F$ наз-ся локальным C^r-диффеоморфизмом в окрестности т. $a \in \mathcal{U}$, если $\exists$ открытое (в E) множество $\mathcal{U}_1 \ni a$ ($\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$) и $\exists$ открытое (в F) множ-во $V_1 \ni f(a)$, такие, что сужение $f_1 = f\big|_{\mathcal{U}_1}$ является C^r-диффеоморфизмом множ-ва $\mathcal{U}_1$ на множ-во V_1.


f
E
a
U
U1
f1
F
f(a)
V1

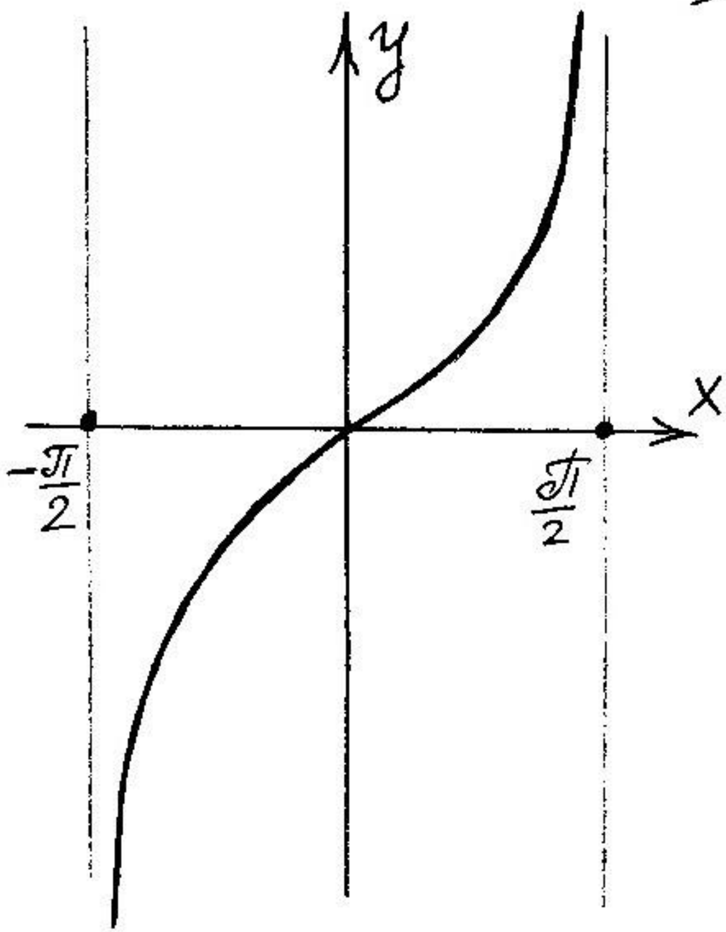
Примеры

1. $E = F = \mathbb{R}^1$; $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$;

$f(x) = kx \quad (k = const)$; $f^{-1}(y) = \frac{1}{k} y$.

f – дифф-м класса C^∞.

2. $E = F = \mathbb{R}^1$; $\mathcal{U} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



$f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^1$

$f(x) = \operatorname{tg} x$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ – непр. на $\mathcal{U} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$f''(x)$ – также непр. на $\mathcal{U}$

и т. д.

Т.е. f – класса C^∞.

Рассм-м $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$;

Рассм-м $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$;

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{y^2+1}$ — непр. на $\mathbb{R}^1$,

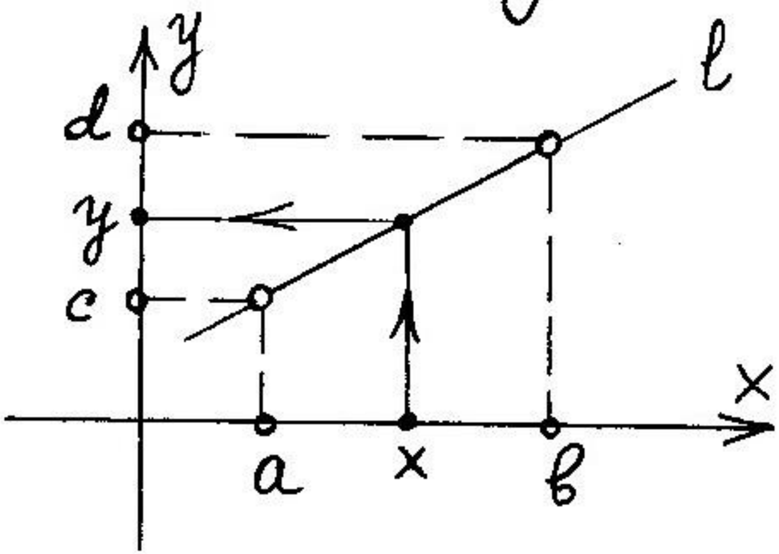
$(f^{-1})''(y)$ — непр. на $\mathbb{R}^1$ и т.д.

Т.е. f^{-1} — кл. C^∞.

Итак, f — C^∞— диффеоморфизм.

<u>Вывод:</u> числовая прямая и интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ диффеоморфны.

3. Любые два интервала диффеоморфны.



$$l:\ \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$$

$$y = \frac{d-c}{b-c}(x-a)+c$$

$$y = kx+m = f(x)$$

$f:(a,b)\longrightarrow(c,d)$ — C^∞-диффеоморфизм

Задача. Пусть $f: U \to V$ — C^2-диффеоморфизм, $g: V \to W$ — C^2-диффеом-м (U, V, W — открытые мн-ва в конечн-х ЛНП-х). Доказать: отобр-е $g \circ f: U \to W$ — C^2-диффеом-м.

Из задачи $\Longrightarrow$ числовая прямая диффеоморфна $\forall$-му интервалу.

4. Пример отобр-я, не являющегося диффеоморфизмом.

$f: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$.

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$; $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ – разрывна в т. $y=0$.

Т.е. $\underline{f^{-1} \notin C^1}$.

$f: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ – гомеоморфизм, но не дифф-м.

§ 13. Теорема об обратном отображении

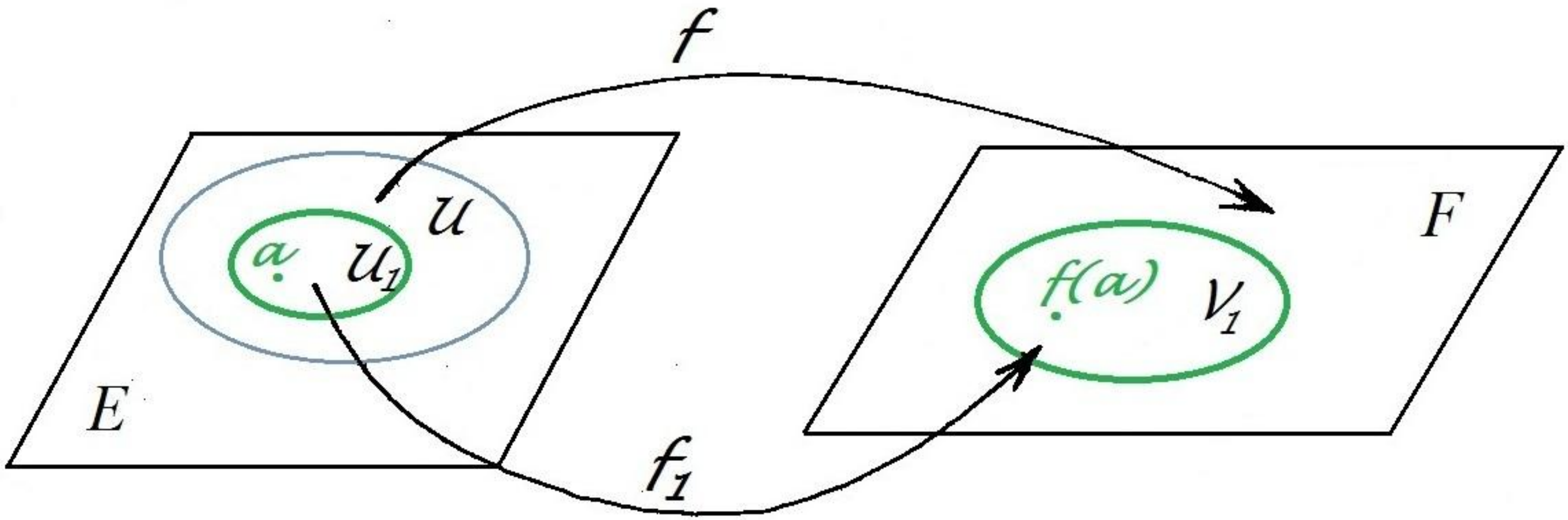
<u>Опр.</u> ЛОО $A: E \xrightarrow{\text{ЛНП}} F$ наз-ся <u>изоморфизмом</u>, если A отображает E на F взаимно-однозначно и обратный оператор A^{-1} также ограничен.

Теорема. Пусть E и F — банаховы пр-ва, U — открытое множ-во в E, отображение $f: U \to F$ — гладкое класса C^r $(r \geq 1)$ и в некоторой точке $x_0 \in U$ ЛОО $f'(x_0)$ явл-ся изоморфизмом E на F. Тогда $\exists$ открытое множ-во $U_1 \ni x_0$ $(U_1 \subset U)$ и открытое мн-во $V_1 \subset F$, такие, что отображ-е

$$f_1 = f\big|_{U_1} : U_1 \longrightarrow V_1$$ является

C^r-диффеоморфизмом.

При этом $\left(f_1^{-1}\right)'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$ – обрат. оператор ($y_0 = f(x_0)$).



Задачи

N10.1. Пусть U — открытое множ-во в ЛНП E, V — открытое мн-во в ЛНП F, $f : U \to V$ — C^r-диффеоморфизм ($r \geq 1$). Доказать, что $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$ для $\forall y \in V$, $x = f^{-1}(y)$.

№ 10.2. Зная производную функции $f(x)$, найти производную обратной функции $f^{-1}(y)$.

1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = e^x$;

4) $y = \operatorname{ch} x$; 5) $y = \operatorname{sh} x$.

1) $y = \mathrm{tg}\, x = f(x)$; $f^{-1}(y) = \mathrm{arctg}\, y = x$;

$y \in \mathbb{R}^1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}.}$

$$(\mathrm{arctg}\, y)' = \frac{1}{(\mathrm{tg} x)'} = \cos^2 x = \cos^2(\mathrm{arctg}\, y);$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1};$$

$$(f^{-1})'(y) = (\mathrm{arctg}\, y)' = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

N 10.3. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ найти матрицу оператора $(f^{-1})'(y^0)$:

1) $f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$, $y^0 = (1, 1)$;

2) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$, $y^0 = (2, 1)$.

Решение. 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ — м-ца пр-й $f'(x)$.

$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1, 1),\ x^2 = (-1, -1).$ — два прообраза т. $y^0 = (1, 1)$.

$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — невырождена,

$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ — невырожд.

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ — невырождена,}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ — невырожд.}$$

След-но, операторы $f'(x^1)$ и $f'(x^2)$ — изоморфизмы $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ по теореме о локальном диффеом-ме (об обратном отображении) f — локальный дифф-м

(кл. C^∞) в окрестности т. x^1 и x^2;
т.е. $\exists$ окрестность O_1 точки x^1 и окрестность V_1 т. y^0, такие, что сужение
$f_1 = f|_{O_1} : O_1 \longrightarrow V_1$ — C^∞-диффеом-м,
также $\exists$ окрестность O_2 т. x^2 и окрест-ть V_2 т. y^0, такие, что $f_2 = f|_{O_2} : O_2 \longrightarrow V_2$ — C^∞-диффеом-м.

Тогда $\dfrac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1)\right]^{-1} = A_1^{-1}$.

Тогда $\dfrac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1)\right]^{-1} = A_1^{-1}$.

Найдем A_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

$$\underline{A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0)}$$

$$\underline{A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0)}$$