

Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

Задача из § 9

Задача 9.1. Пусть φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на \mathbb{R}^1 .

Отображение f действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения f .

Решение.

Вычислим производную $f'(a)$ в произвольной точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где
$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n = 1$ получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение отображения f (с учетом (1) и (2)) :

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a) = \varphi'(a)h + r_1(a).$$

Обоснование того, что $r_1(a) = o(\|h\|_E)$, почти дословно повторяет аналогичное доказательство из **примера 3**.

Тогда, очевидно,

$$(f'(a)h)(t) = \varphi'(a(t)) \cdot h(t) \quad \text{при } \forall h \in E \text{ и } \forall t \in [0,1].$$

§ 11. Вторая производная как билинейное отображение

1. Билинейные отображения.

Пусть E и F — ЛНП-ва, $B: E \times E \rightarrow F$ — отображение.
(вещное)

Опр. 1. Отобр-е B называется билинейным, если

$\forall h, k, h_1, h_2, k_1, k_2 \in E$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1) B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k),$$

$$2) B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).$$

Опр. 2. Билинейное от-е B называется симметричным,

если $\forall h, k \in E \quad B(h, k) = B(k, h).$

2. Производная второго порядка.

Пусть E и F — ЛНП-ва (вещные), U — открытое мнош-во в E , $f: U \rightarrow F$ — отображение.

Пусть отображ-е f дважды непрерывно дифференцируемо (по Фреше) на мнош-ве U , т.е. $\forall x \in U$

\exists -ют $f'(x)$ и $f''(x)$, причем $f''(x)$ непрерывна по x на U как операторное отображение

$f'': U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

Рассмотрим отображение $B: E \times E \rightarrow F$,
 $B(h, k) = [f''(x)h]k = [Ah]k$, где $A = f''(x): E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$

— л.о., элемент $x \in U$ — фиксирован.

Проверим условие 1) и 2) из опр. 1.

$$\begin{aligned}
 1) \quad B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) &= \underbrace{[A(\alpha h_1 + \beta h_2)]}_{\text{100}} k = [\alpha \cdot \underbrace{Ah_1}_{\substack{\text{100} \\ (\text{из } E \text{ и } F)}} + \beta \cdot \underbrace{Ah_2}_{\text{100}}] k = \\
 &= [\alpha \cdot Ah_1] k + [\beta \cdot Ah_2] k = \\
 &= \alpha \cdot [Ah_1] \cdot k + \beta \cdot [Ah_2] k = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) &= \underbrace{[Ah]}_{\substack{\text{100 из } E \text{ и } F}} (\alpha k_1 + \beta k_2) = \\
 &= \alpha \cdot [Ah] k_1 + \beta \cdot [Ah] k_2 = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).
 \end{aligned}$$

Итак, $B(h, k) = [Ah]k$ — билинейное отображение.

Положим, что $B(h, k)$ — симметричное дил. от-е.
Зафиксируем произвольные $h, k \in E$ и рассмотрим $l \in F^*$ (нона произвольный).

Рассмотрим функцию $\varphi(t, s) = l[f(x + th + sk)]$,
 $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^1$. Вычислим частные производные
функции φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) = l[f'(x + th + sk)h]$$

$$(l'(y) = l, \text{ т.к. } l - \text{лин. ф-л; } (x + th + sk)'_t = h);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)k)h];$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)h)k].$$

Пр-е $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$ непрерывны (как

композиция непрерывных отображений) \Rightarrow

Стр-е $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) \Rightarrow
 \Rightarrow эти производные равны (по теореме о маб. анализа).

Тогда при $t = s = 0$ имеем:

$$\mathcal{L}[(f''(x)k)h] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(0, 0) = \mathcal{L}[(f''(x)h)k] (*)$$

а) точным вид ф-ла ℓ .

Следствие из теоремы Хаана-Банаха:

для любого $y \in F$ ($y \neq \theta$) \exists л.о.ф. $\ell \in F^*$:

1) $\ell(y) = \|y\|$ и 2) $\|\ell\| = 1$.

Пусть $y = (f''(x)k)h - (f''(x)h)k \in F$. $\Pi: y \neq \theta$.

Тогда из (*) $\Rightarrow \|y\| = \ell(y) = 0 \Rightarrow \underline{y = \theta}$.

Получили противоречие. След-но, $y = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (f''(x)k)h = (f''(x)h)k \Rightarrow B(k, h) = B(h, k)$.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Теорема. Если отображение $f: U \rightarrow F$ дважды непрерывно дифференцируемо на множестве U , то вторая производная $f''(x)$ при $\forall x \in U$ представляет собой симметричное билинейное отображение.

Пусть $h = k$. Выражение $[f''(x)h]h \stackrel{\text{обозн.}}{=} d^2 f(x, h)$
наз-ая вторым дифференциалом отображения f в т. x .

Пример 1. Рассмотрим функционал V на банаховом пространстве E , дважды непрерывно дифференцируемый (по Фреше) на E . Пусть E непрерывно вложено в банахово пространство F , F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H .

Предположим, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, то есть задано отображение $f : E \rightarrow F$, такое, что

$$V'(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E \quad (1)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в ГП H , $V'(x)$ – производная Фреше функционала V).

Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *градиентом* функционала V и обозначается $gradV$.

Предположим также, что отображение $f : E \rightarrow F$ дифференцируемо по Фреше на E .

Зафиксируем $\forall x \in E$. По определению производной Фреше, $\forall k \in E$

$$V'(x+k) - V'(x) = (V')'(x)k + \omega(x,k) = V''(x)k + \omega(x,k),$$

где $\omega(x,k) = o(k)$, а $V'(x+k)$, $V'(x)$, $V''(x)k$ и $\omega(x,k)$ — линейные непрерывные функционалы на пространстве E (при каждом фиксированном $k \in E$).

$$V'(x+k) - V'(x) = (V')'(x)k + \omega(x,k) = V''(x)k + \omega(x,k),$$

где $\omega(x,k) = o(k)$, а $V'(x+k)$, $V'(x)$, $V''(x)k$ и $\omega(x,k)$ – линейные непрерывные функционалы на пространстве E (при каждом фиксированном $k \in E$).

Тогда $\forall h \in E$

$$\begin{aligned} V'(x+k)h - V'(x)h &= (V'(x+k) - V'(x))h = (V''(x)k + \omega(x,k))h = \\ &= (V''(x)k)h + \omega(x,k)h, \end{aligned}$$

где $(V''(x)k)h = V''(x)(k, h)$ – билинейное отображение, действующее из $E \times E$ в \mathbb{R}^1 (билинейная функция).

С другой стороны, с учетом (1), $\forall k, h \in E$

$$\begin{aligned} V'(x+k)h - V'(x)h &= \langle f(x+k), h \rangle - \langle f(x), h \rangle = \\ &= \langle f(x+k) - f(x), h \rangle = \langle f'(x)k + \tilde{\omega}(x, k), h \rangle = \\ &= \langle f'(x)k, h \rangle + \langle \tilde{\omega}(x, k), h \rangle, \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega}(x, k) = o(k)$.

Итак, получили, что

$$\begin{aligned} (V''(x)k)h + \omega(x, k)h &= V'(x+k)h - V'(x)h = \\ &= \langle f'(x)k, h \rangle + \langle \tilde{\omega}(x, k), h \rangle, \end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$\begin{aligned}(V''(x)k)h + \omega(x, k)h &= V'(x+k)h - V'(x)h = \\ &= \langle f'(x)k, h \rangle + \langle \tilde{\omega}(x, k), h \rangle,\end{aligned}$$

следовательно, вторая производная имеет вид

$$V''(x)(k, h) = (V''(x)k)h = \langle f'(x)k, h \rangle \quad \forall k, h \in E.$$

Второй дифференциал – это квадратичная форма

$$V''(x)(h, h) = \langle f'(x)h, h \rangle.$$

Пример 2. Пусть $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, то есть V – функция n переменных (частный случай примера 1).

Тогда значение производной Фреше функции V в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ на векторе $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ имеет вид

$$V'(x)h = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = \langle f(x), h \rangle,$$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = \text{grad } V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае $E = F = H = \mathbb{R}^n$.

Из примера 1 следует, что вторая производная

$$V''(x)(k, h) = \langle f'(x)k, h \rangle \quad \forall k, h \in \mathbb{R}^n.$$

Оператору $f'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответствует матрица Якоби

отображения $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T :$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют также *матрицей Гессе* функции V в точке x .

Итак, в данном случае вторая производная имеет вид

$$V''(x)(k, h) = \langle f'(x)k, h \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)k, h \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j$$

для $\forall k, h \in \mathbb{R}^n$.

Второй дифференциал – это квадратичная форма

$$V''(x)(h, h) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j .$$

§ 12. Гладкие отображения и диффеоморфизмы

Пусть E и F — ЛНП-ва, U — открытое мн-во в E ; $f: U \rightarrow F$ — отображение.

Определение 1. Отобр-е $f: U \rightarrow F$ называется магнем класса C^r (или C^r -магнем), если на мн-ве U существуют и непрерывны производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$ (r — натур-е число, $r \geq 1$).

Предположим, что $f: U \rightarrow V$, где V — открытое мн-во в F .

Предположим, что $f: U \rightarrow V$,
где V — открытое мно-во в F .

Определение 2. Об-е $f: U \rightarrow V$

наз-е C^r -диффеоморфизмом, если

- 1) f — биективное (взаимно-однозначное)
отображение U на V и
- 2) f и f^{-1} — C^r -гладкие отображ-е..

Замечание. От-е $f^{-1}: V \rightarrow \mathcal{U}$;

если $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$;

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in V \text{ и}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Определение 3. Отобра-е $f: U \rightarrow F$

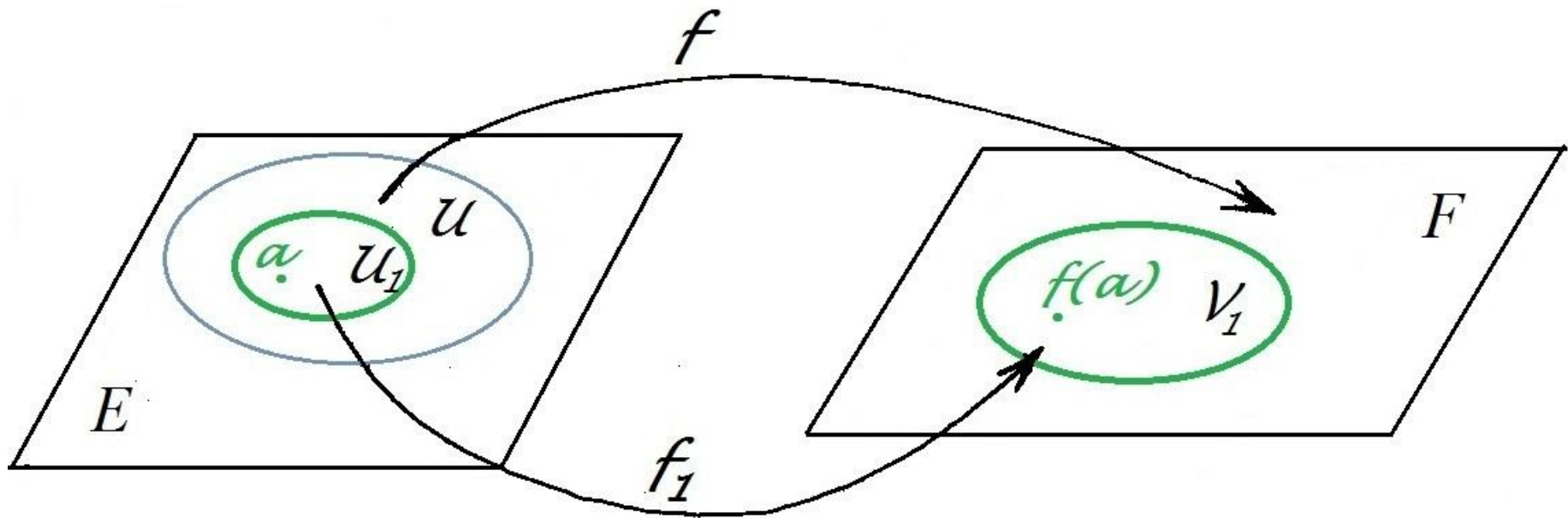
наз-ся локальным C^r -диффеомор-
физмом в окрестности т. $a \in U$, если

\exists открытое (в E) множество $U_1, \exists a$
($U_1 \subset U$) и \exists открытое (в F) мно-во
 $V_1, \exists f(a)$, такие, что существует

$f_1 = f|_{U_1}$ является C^r -диффеомор-

физмом мно-ва U_1 на мно-во

V_1 .



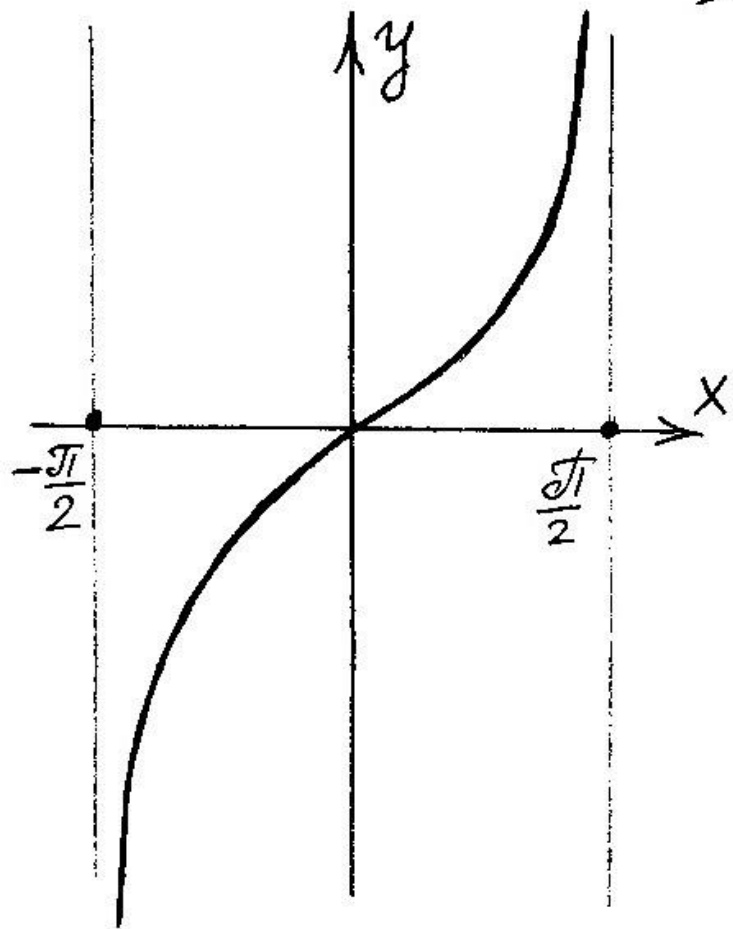
Примеры

1. $E = F = \mathbb{R}^1$; $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$;

$$f(x) = kx \quad (k = \text{const}); \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{k} y.$$

f — дифф-м класса C^∞ .

$$2. \quad E = F = \mathbb{R}^1; \quad U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ — невр. на}$$

$$U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f''(x) \text{ — также невр. на } U$$

и т. д.

Т.е. f — класс C^∞ .

Рассм-м $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$;

Рассмотрим $f^{-1}(y) = \arctan y$;

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y^2+1} - \text{непр. на } \mathbb{R}^1,$$

$(f^{-1})''(y)$ — непр. на \mathbb{R}^1 и т.д.

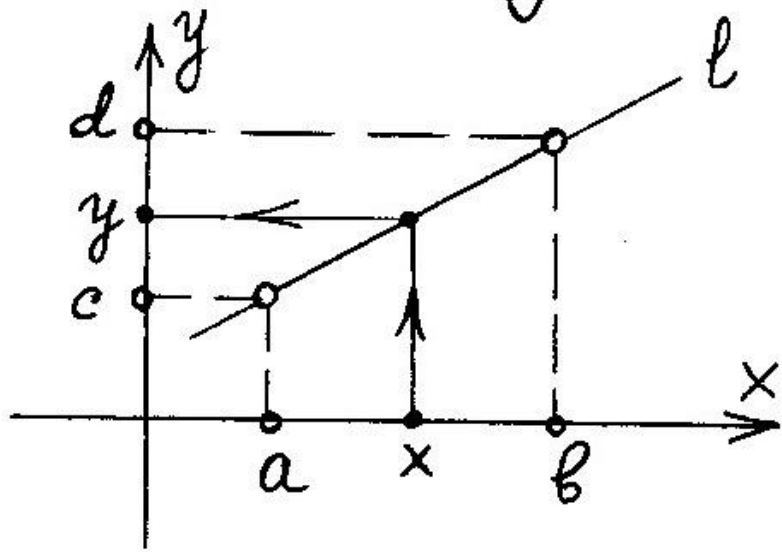
Т.е. f^{-1} — кл. C^∞ .

Итак, f — C^∞ -диффеоморфизм.

Вывод: числовая прямая и интервал

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ диффеоморфны.

3. Любые два интервала диффеоморфны.



$$l: \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$$

$$y = \frac{d-c}{b-a} (x-a) + c$$

$$y = kx + m = f(x)$$

$f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ — C^∞ -диффеоморфизм

Задача. Пусть $f: U \rightarrow V$ — C^2 -диффеоморфизм, $g: V \rightarrow W$ — C^2 -диффеоморфизм (U, V, W — открытые м-ва в некоем ЛНП-х). Доказать: отображение $g \circ f: U \rightarrow W$ — C^2 -диффеоморфизм.

Из задачи \Rightarrow теорема обратная диффеоморфизма \forall -му теореме.

4. Пример отображения, не являющегося
диффеоморфизмом.

$$f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f(x) = x^3.$$

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}; \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \text{ — разрывна} \\ \text{в т. } y=0.$$

Т.е. $f^{-1} \notin C^1$.

$f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гомеоморфизм, но не
диффеом.

§ 13. Теорема об обратном отображении

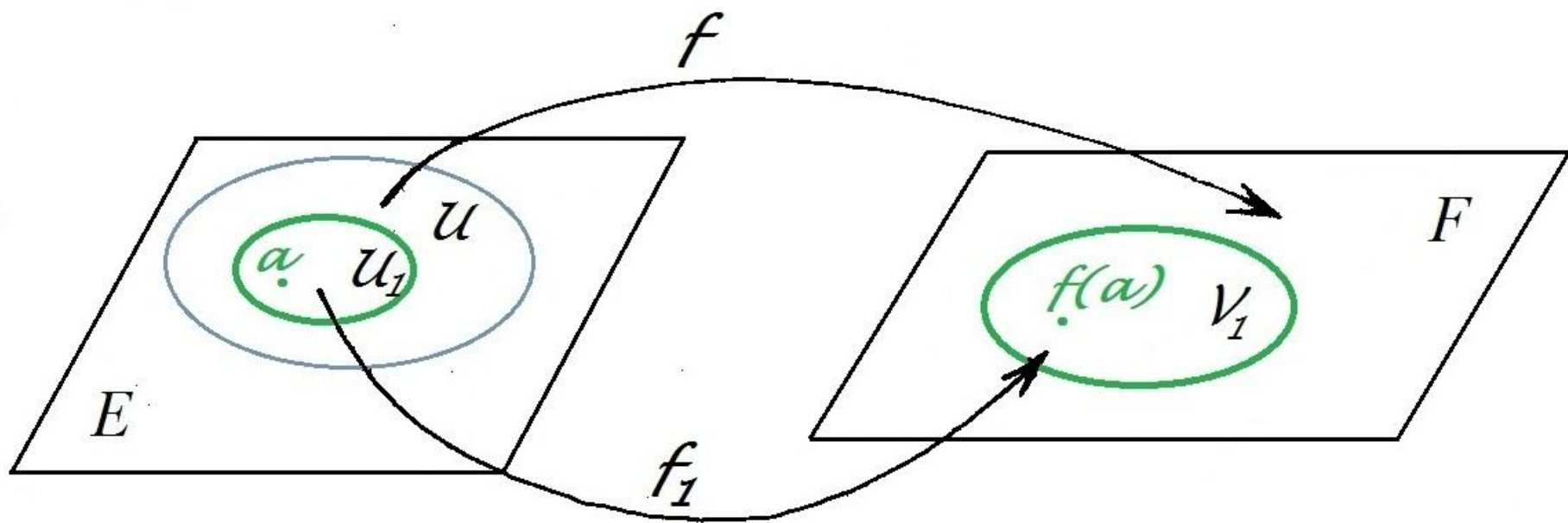
Опр. ЛОО $A: E \rightarrow F$ называется изоморфизмом, если A отображает E на F взаимно-однозначно и обратный оператор A^{-1} также ограничен.

Теорема. Пусть E и F — банаховы
пр-ва, U — открытое множ-во в E ,
отображение $f: U \rightarrow F$ — гладкое
класса C^z ($z \geq 1$) и в некоторой
точке $x_0 \in U$ левая производная
существует и является изомор-
физмом E на F . Тогда \exists открытое
множ-во $U_1 \ni x_0$ ($U_1 \subset U$) и открытое
множ-во $V_1 \subset F$, такие, что отображе-

$$f_1 = f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1 \text{ является}$$

C^z -диффеоморфизмом.

При этом $(f^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$ обрат.
оператор ($y_0 = f(x_0)$).



Задачи

№10.1. Пусть U — открытое мн-во в ЛНП E , V — открытое мн-во в ЛНП F ,
 $f: U \rightarrow V$ — C^r -диффеоморфизм ($r \geq 1$).

Доказать, что $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$

где $\forall y \in V, x = f^{-1}(y)$.

N 10.2. Зная производную функции $f(x)$, найти производную обратной функции $f^{-1}(y)$.

1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = e^x$;

4) $y = \operatorname{ch} x$; 5) $y = \operatorname{sh} x$.

$$1) y = \operatorname{tg} x = f(x); \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = x; \\ y \in \mathbb{R}^1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}}$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'}, = \cos^2 x = \cos^2(\operatorname{arctg} y);$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1};$$

$$(f^{-1})'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

№ 10.3. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
найти матрицу оператора $(f^{-1})'(y^0)$:

$$1) f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (1, 1);$$

$$2) f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (2, 1).$$

Решение. 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ — м-ца
кр-й $f'(x)$.

$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1, 1), x^2 = (-1, -1)$. — два
критических т. $y^0 = (1, 1)$.

$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — невырождена,

$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ — невырожд.

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{невырождена,}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \text{невырожд.}$$

След-но, операторы $f'(x^1)$ и $f'(x^2)$ —
изоморфизмы \mathbb{R}^2 на $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ по теореме
о локальном диффеом-ме (об обратном
отображении) f — локальный дифф-м

(кл. C^∞) в окрестности т. x^1 и x^2 ;

т.е. \exists окрестность O_1 точки x^1 и окрестность V_1 т. y^0 , такие, что существуют

$f_1 = f|_{O_1} : O_1 \rightarrow V_1$ — C^∞ -диффеоморфизм,

такие \exists окрестность O_2 т. x^2 и окрестность

V_2 т. y^0 , такие, что $f_2 = f|_{O_2} : O_2 \rightarrow V_2$ —

C^∞ -диффеоморфизм.

Тогда $\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}.$$

Найдем A_1^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0)$$
