§3. Базіс лінейнай прасторы. Каардынаты.

Азн. 1. Сістэма вектараў лінейнай прасторы V называецца яе **базісам**, калі яна **лінейна незалежная** і ўся прастора V **лінейна выражаецца** праз гэтую сістэму.

Азн. 2. Лінейная прастора, што мае **канцоўны базіс,** называецца **канцоўнамернай**. Лінейную прастору, што складаецца толькі з аднаго нулявога вектара, таксама лічаць канцоўнамернай (**нулявая прастора**).

Азн. 3. Ненулявая лінейная прастора, што не мае канцоўнага базісу называецца **бясконцамернай**.

У далейшым будзем разглядаць **канцоўнамерныя лінейныя прасторы**.

Сцв. 1. Калі ў лінейнай прасторы існуе базіс з n вектараў, то кожны іншы базіс гэтай прасторы складаецца з n вектараў.

Доказ. Няхай у л.п. V існуе базіс з n вектараў. Тады адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз гэты базіс. Згодна тэарэме мінулага параграфа адвольная сістэма, што ўтрымлівае больш за n вектараў – л.з. Калі б у л.п. існаваў базіс з меньшай за n колькасцю вектараў m ($m< n$), то, аналагічна, адвольная сістэма вектараў колькасці, большай за m, у прыватнасці, зыходны базіс была б л.з.

- **Азн. 4.** Лінейная прастора, у якой існуе базіс з n вектараў, называецца **n – мернай**. Калі прастора **V** **n** – вымерная, то лік n называюць **вымернасцю (памернасцю) прасторы** V і пішуць: **n = dim V**.

- **Прыклады:**

- **1**. Прастора свабодных вектараў $\mathbf{V}^3$. Адвольныя **тры** некампланарныя вектары з'яўляюцца базісам. **dim** $\mathbf{V}^3$ = 3.

- **2**. $\mathbf{V}^2$ – прастора вектараў, паралельных фіксаванай плоскасці. Адвольныя **два** некалінеярныя вектары з'яўляюцца базісам. **dim** $\mathbf{V}^2$ = 2.

- **3**. $\mathbf{V}^1$ - прастора свабодных вектараў, паралельных фіксаванай прамой. Адвольны ненулявы **вектар** з'яўляецца базісам. **dim** $\mathbf{V}^1$ = 1.

  4. P[x] - прастора паліномаў над полем P: P[x], Базісам з'яўляецца, напрыклад, набор вектараў : $x, x^2, \dots, x^n$. **dim** P[x] = **n.**

- **Тэарэма 1. Маюць месца наступныя сцведжанні для кожнай n – мернай лінейнай прасторы :**
- **1) адвольная сістэма вектараў, у якой іх колькасць большая за n, лінейна залежная;**
- **2) адвольная сістэма з n лінейна незалежных вектараў задае базіс;**
- **3) адвольную лінейна незалежную сістэму вектараў, колькасць вектараў у якой меньшая за n, можна дапоўніць да базісу.**
- **Доказ. 1).** Першае сцверджанне вынікае з **Тэарэмы** аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў мінулага параграфа.
- **2).** Хай сістэма вектараў $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_n$ **(1)** л.н.з. сістэма вектараў n – мернай лінейнай прасторы, а **b** – адвольны вектар прасторы. Згодна **1)** сістэма вектараў $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_n$, **b** **(2)** л.з. Згодна выніку з **Тэарэмы** аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў вектар **b** лінейна выражаецца праз сістэму **(1)**. Значыць, **(1) –** базіс V.

- 3). Хай зададзены л.н.з. сістэма вектараў
- $a_1, a_2, .., a_k$ (3) і базіс
- $b_1, b_2, .., b_n$ (4) прасторы V і хай $k < n$. Тады сістэма
- $a_1, a_2, .., a_k$, $b_1, b_2, .., b_n$ (5) л.з.
- Паслядоўна выключым з сістэмы (5) вектары, якія ёсць камбінацыі папярэдніх. Так як вектары сістэмы (3) л.н.з., то яны застануцца ў сістэме і новая сістэма прыме выгляд
- $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $\boldsymbol{b_{i_1}}, \boldsymbol{b_{i_2}}, \ldots, \boldsymbol{b_{i_p}}$. (6)
- Згодна Тэарэме аб лінейнай залежнасці, сістэма (6) л.н.з. Адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз (4), а, значыць, і праз эквівалентную ёй сістэму (6). Такім чынам сістэма (6) - базіс лінейнай прасторы, атрыманы дапаўненнем сістэмы (3).

Каардынаты

- Няхай V - **n**-мерная лінейная прастора над **P**, **a** – адвольны вектар прасторы, a
- $v_1, v_2, \dots, v_n$ - **базіс** V. (7)
- Як вядома, вектар **a** можна раскласці ў лінейную камбінацыю вектараў базісу: $\mathbf{a} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. (8)
- **Азн**. Прадстаўленне вектару **a** ў выглядзе (8) называецца **раскладаннем** вектара **a** па вектарам базісу (7). Каафіцыенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называюцца **каардынатамі** вектара **a** ў базісе (7). Слупок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ называецца **каардынатным слупком** вектара **a** ў базісе (7).

Тэарэма 2. **Каардынаты вектара ў фіксаваным базісе вызначаны адназначна.**

- **Доказ**. Няхай вектар **a** побач з раскладаннем (8) мае іншае раскладанне
- $\mathbf{a} = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v_n}$. (9)
- Тады $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v_n} = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v_n}$, $\alpha_i, \beta_i \in P$,
- $i = 1,2,\ldots,n$.
- Адсюль $(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v_2} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v_n} = \bar{\mathrm{O}}$. Так як вектары базісу л.н.з., то $\alpha_i - \beta_i = 0$, для ўсіх $i = 1,2,\ldots,n$. Такім чынам, $\alpha_i = \beta_i$, што даказвае тэарэму.

- Разгледзім прадстаўленне вектара $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

у матрычным выглядзе .

- $a = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$. (10)
- Калі абазначыць $(v_1\ v_2\ \ldots\ v_n) = V$, а $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T = A$, то роўнасць (8)
- можна задаць як здабытак базіснага радка V на каардынатны слупок A :
- $a = V A$.
- Так як каардынатны слупок вектара ў дадзеным базісе вызначаны адназначна, то, **(Практыкаванне!)** , складанню вектараў і множанню іх на лік будуць адпавядаць адпаведныя аперацыі над матрыцамі, прычым уласцівасці гэтых аперацый разгледжаныя раней для матрыц, будуць выконвацца і для вектараў – слупкоў і вектараў радкоў.
- **Сцв**. Сістэма вектараў л.н.з. тады і толькі тады, калі л.н.з сістэма іх слупкоў.