

### §3. Базіс лінейнай прасторы. Каардынаты.

Азн. 1. Сістэма вектараў лінейнай прасторы  $V$  называецца яе базісам, калі яна лінейна незалежная і ўся прастора  $V$  лінейна выражаецца праз гэтую сістэму.

Азн. 2. Лінейная прастора, што мае канцоўны базіс, называецца канцоўнамернай. Лінейную прастору, што складаецца толькі з аднаго нулявога вектара, таксама лічаць канцоўнамернай (нулявая прастора).

Азн. 3. Ненулявая лінейная прастора, што не мае канцоўнага базісу называецца бясконцамернай.

У далейшым будзем разглядаць канцоўнамерныя лінейныя прасторы.

Сцв. 1. Калі ў лінейнай прасторы існуе базіс з  $n$  вектараў, то кожны іншы базіс гэтай прасторы складаецца з  $n$  вектараў.

Доказ. Няхай у л.п.  $V$  існуе базіс з  $n$  вектараў. Тады адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз гэты базіс. Згодна тэарэме мінулага параграфу адвольная сістэма, што ўтрымлівае больш за  $n$  вектараў – л.з. Калі б у л.п. існаваў базіс з меншай за  $n$  колькасцю вектараў  $m$  ( $m < n$ ), то, аналагічна, адвольная сістэма вектараў колькасці, большай за  $m$ , у прыватнасці, зыходны базіс была б л.з.

- Азн. 4. Лінійная прастора, у якой існуе базіс з  $n$  вектараў, называецца  $n$  – мернай. Калі прастора  $V$   $n$  – вымерная, то лік  $n$  называюць **вымернасцю** (памернасцю) прасторы  $V$  і пішуць:  $n = \dim V$ .

- Прыклады:

- 1. Прастора свабодных вектараў  $V^3$ . Адвольныя тры некампланарныя вектары з'яўляюцца базісам.  $\dim V^3 = 3$ .
- 2.  $V^2$  – прастора вектараў, паралельных фіксаванай плоскасці. Адвольныя два некалінеярныя вектары з'яўляюцца базісам.  $\dim V^2 = 2$ .
- 3.  $V^1$  - прастора свабодных вектараў, паралельных фіксаванай прамой. Адвольны ненулявы вектар з'яўляецца базісам.  $\dim V^1 = 1$ .
- 4.  $P[x]$  - прастора паліномаў над полем  $P$ :  $P[x]$ , Базісам з'яўляецца, напрыклад, набор вектараў :  $x, x^2, \dots, x^n$  .  $\dim P[x] = n$ .

- Тэарэма 1. Маюць месца наступныя сцвяджанні для кожнай  $n$  – мернай лінейнай прасторы :
  - 1) адвольная сістэма вектараў, у якой іх колькасць большая за  $n$ , лінейна залежная;
  - 2) адвольная сістэма з  $n$  лінейна незалежных вектараў задае базіс;
  - 3) адвольную лінейна незалежную сістэму вектараў, колькасць вектараў у якой меншая за  $n$ , можна дапоўніць да базісу.
- Доказ. 1). Першае сцвяджанне вынікае з Тэарэмы аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў мінулага параграфа.
- 2). Хай сістэма вектараў  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  (1) л.н.з. сістэма вектараў  $n$  – мернай лінейнай прасторы, а  $\mathbf{b}$  – адвольны вектар прасторы. Згодна 1) сістэма вектараў  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$  (2) л.з. Згодна выніку з Тэарэмы аб лінейнай незалежнасці сістэмы вектараў вектар  $\mathbf{b}$  лінейна выражаецца праз сістэму (1). Значыць, (1) – базіс  $V$ .

- 3). Хай зададзены л.н.з. сістэма вектараў
  - $a_1, a_2, \dots, a_k$  (3) і базіс
  - $b_1, b_2, \dots, b_n$  (4) прасторы  $V$  і хай  $k < n$ . Тады сістэма
  - $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_n$  (5) л.з.
- Паслядоўна выключым з сістэмы (5) вектары, якія ёсць камбінацыі папярэдніх. Так як вектары сістэмы (3) л.н.з., то яны застаюцца ў сістэме і новая сістэма прыме выгляд
  - $a_1, a_2, \dots, a_k, b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_p}$  (6)
- Згодна Тэарэме аб лінейнай залежнасці, сістэма (6) л.н.з. Адвольны вектар прасторы лінейна выражаецца праз (4), а, значыць, і праз эквівалентную ёй сістэму (6). Такім чынам сістэма (6) - базіс лінейнай прасторы, атрыманы дапаўненнем сістэмы (3).

# Каардынаты

- Няхай  $V$  -  $n$ -мерная лінейная прастора над  $P$ ,  $a$  – адвольны вектар прасторы, а

- $v_1, v_2, \dots, v_n$  - базіс  $V$ . (7)

- Як вядома, вектар  $a$  можна раскласці ў лінейную камбінацыю вектараў базісу:  
$$a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n .$$
 (8)

- Азн. Прадстаўленне вектару  $a$  ў выглядзе (8) называецца раскладаннем вектара  $a$  па вектарам базісу (7). Каафіцыенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называюцца каардынатамі вектара  $a$  ў базісе (7). Слупок  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$  называецца каардынатым слупком вектара  $a$  ў базісе (7).

## Тэарэма 2. Каардынаты вектара ў фіксаваным базісе вызначаны адназначна.

- Доказ. Няхай вектар  $a$  побач з раскладаннем (8) мае іншае раскладанне
- $$a = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n. \quad (9)$$
- Тады  $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in P$ ,
- $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Адсюль  $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = \vec{0}$ . Так як вектары базісу л.н.з., то  $\alpha_i - \beta_i = 0$ , для ўсіх  $i = 1, 2, \dots, n$ . Такім чынам,  $\alpha_i = \beta_i$ , што даказвае тэарэму.

- Разгледзім прадстаўленне вектара  $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  у матрычным выглядзе .
- $a = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ . (10)
- Калі абазначыць  $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) = V$ , а  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = A$ , то роўнасць (8)
- можна задаць як здабытак базіснага радка  $V$  на каардынаты слупок  $A$  :
- $a = V A$  .
- Так як каардынаты слупок вектара ў дадзеным базісе вызначаны адназначна, то, (Практыкаванне!), складанню вектараў і множанню іх на лік будуць адпавядаць адпаведныя аперацыі над матрыцамі, прычым уласцівасці гэтых аперацый разгледжаныя раней для матрыц, будуць выконвацца і для вектараў – слупкоў і вектараў радкоў.
- **Сцв.** Сістэма вектараў л.н.з. тады і толькі тады, калі л.н.з сістэма іх слупкоў.