

Задание №15: делимость чисел

Время выполнения: 5 минут

Повторение: упрощение логических операций

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

Законы инверсии
(де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Формулы

поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Закон двойного
отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$\overline{(A \rightarrow B)} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$$

$$= (\bar{A} \vee B) \& (A \vee \bar{B})$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\bar{A} \& (A \vee B) = \bar{A} \& B$$

$$A \vee (\bar{A} \& B) = A \vee B$$

Задача 1

Задача 1

Обозначим через **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 1

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

Введём обозначения:

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$21 = \text{ДЕЛ}(x, 21)$$

$$35 = \text{ДЕЛ}(x, 35)$$

Получаем: $A \rightarrow (21 \vee 35)$

Упростим: $\neg A \vee 21 \vee 35$

Решение задачи 1

$\neg A \vee 21 \vee 35$

С учётом наших обозначений получаем:

или x **не** делится на A , или x делится на 21, или x делится на 35.

Если x делится на 21, результат – истина.

Если x делится на 35, результат – истина.

Но если x не делится ни на 21, ни на 35, то чтобы результат был истиной, x также не должно делиться на A . Значит, если разложить A на множители, среди них должны быть либо 21, либо 35.

Решение задачи 1

Требуется найти наименьшее A , среди делителей которого есть либо 21, либо 35.

Это число 21.

Ответ: 21

Решение задачи 1

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения: $A \rightarrow (21 \vee 35)$

2) упростили: $\neg A \vee 21 \vee 35$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A , во второй части выражений с A нет

$\neg A$ – первая часть

$21 \vee 35$ – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$$\neg(21 \vee 35) = \neg 21 \wedge \neg 35$$

Решение задачи 1

5) По условию задачи требуется найти минимальное A , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное A , что если выполняется $\neg 21 \wedge \neg 35$, то выполняется и $\neg A$ (первая часть выражения).

X не делится на 21 и X не делится на 35. Минимальное A , на которое не делится X , равно 21. Это и есть ответ.

Задача 2

Задача 2

Обозначим через **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 2

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

После переобозначения (см. пример обозначений в задаче 1) получаем:
 $A \rightarrow (\neg 21 \vee 35)$

После упрощения:
 $\neg A \vee \neg 21 \vee 35$

Т.е. или x не делится на A , или x не делится на 21, или x делится на 35.

Решение задачи 2

$$\neg A \vee \neg 21 \vee 35$$

Если x не делится на 21, выражение истинно.

Если делится на 35, выражение истинно.

Если x делится на **21** и **не делится на 35**, то чтобы выражение было истинным, **x не должно делиться на A** .

x не должно делиться на A , и мы знаем, что x не делится на 35 $\Rightarrow x$ не делится ни на $5 \cdot 7$.

x делится на 21 $\Rightarrow x$ делится на $3 \cdot 7$.

Решение задачи 2

x не делится на 35 \Rightarrow x не делится на $5 \cdot 7$.

x делится на 21 \Rightarrow x делится на $3 \cdot 7$.

Нужно найти минимальное x , на которое x не будет делиться. Это 5.

Ответ: 5

Решение задачи 2

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения: $A \rightarrow (\neg 21 \vee 35)$

2) упростили: $\neg A \vee \neg 21 \vee 35$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A , во второй части выражений с A нет

$\neg A$ – первая часть

$\neg 21 \vee 35$ – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$$\neg(\neg 21 \vee 35) = 21 \wedge \neg 35$$

Решение задачи 2

5) По условию задачи требуется найти минимальное A , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное A , что если выполняется $21 \wedge \neg 35$, то выполняется и $\neg A$ (первая часть выражения).

X делится на 21 и X не делится на 35. Т.е. X делится на $3 \cdot 7$ и не делится на $5 \cdot 7$.

Минимальное A , на которое не делится X , равно 5. Это и есть ответ.

Задача 3

Задача 3

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого **наибольшего** натурального числа **A** формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной **x**)?

Решение задачи 3

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

После переобзначения:

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

Упростим:

$$\neg(\neg A) \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

Это означает, что или x делится на A , или x не делится ни на 21, ни на 35.

Решение задачи 3

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

Если x не делится ни на 21, ни на 35, выражение истинно.

Если x делится на 21, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на A .

Если x делится на 35, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на A .

Нужно взять такое A , чтобы для любого x , делящегося или на 21, или на 35, выражение было истинным.

Решение задачи 3

x делится на 21 \Rightarrow x делится на $3 \cdot 7$.

x делится на 35 \Rightarrow x делится на $5 \cdot 7$.

Если $A = 7$, то для любого x , делящегося или на 21, или на 35, выражение будет истинным.

Ответ: 7

Решение задачи 3

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения: $\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35)$

2) упростили: $A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A , во второй части выражений с A нет

A – первая часть

$\neg 21 \wedge \neg 35$ – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$\neg(\neg 21 \wedge \neg 35) = 21 \vee 35$

Решение задачи 3

5) По условию задачи требуется найти минимальное A , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное A , что если выполняется $21 \vee 35$, то выполняется и A (первая часть выражения).

X делится на 21 или X делится на 35. Т.е. X делится на $3 \cdot 7$ или делится на $5 \cdot 7$. В любом случае X делится на 7.

Минимальное A , на которое делится X , равно 7. Это и есть ответ.

Задача 4

Задача 4

Обозначим через **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 4

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

После переобзначения:

$$\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4)$$

Упростим:

$$\neg A \rightarrow (\neg 6 \vee \neg 4)$$

$$\neg(\neg A) \vee (\neg 6 \vee \neg 4)$$

$$A \vee \neg 6 \vee \neg 4$$

Т.е. или x не делится на 6, или x не делится на 4, или x делится на 4.

Решение задачи 4

$$A \vee \neg 6 \vee \neg 4$$

Если x не делится на 6, выражение истинно.

Если x не делится на 4, выражение истинно.

Если x делится и на 6, и на 4, то x также должно делиться на A , чтобы выражение было истинным.

x делится на 4 $\Rightarrow x$ делиться на $2 \cdot 2$

x делиться на 6 $\Rightarrow x$ делиться на $2 \cdot 3$

Нужно найти **наибольшее** A , на которое **гарантированно** будет делиться такое число x .
Это число $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12

Решение задачи 4

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения: $\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4)$

2) упростили: $A \vee \neg 6 \vee \neg 4$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A , во второй части выражений с A нет

A – первая часть

$\neg 6 \vee \neg 4$ – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$\neg(\neg 6 \vee \neg 4) = 6 \wedge 4$

Решение задачи 4

5) По условию задачи требуется найти максимальное A , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти максимальное A , что если выполняется $6 \wedge 4$, то выполняется и A (первая часть выражения).

X делится на 6 и X делится на 4 . Т.е. X делится на $2 \cdot 3$ и делится на $2 \cdot 2$.
 X делится на $2 \cdot 2 \cdot 3$.

Максимальное A , на которое гарантированно делится X , равно 12 . Это и есть ответ.

Самостоятельно

Самостоятельно

5. Для какого наибольшего натурального числа A формула $\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$ тождественно истинна?

6. Для какого наименьшего натурального числа A выражение $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 18)$ тождественно истинно?

7. Для какого наибольшего натурального числа A формула $(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$ тождественно истинна?

8. Для какого **наименьшего** натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \text{ДЕЛ}(x, 15))$ тождественно истинна

9. Для какого **наименьшего** натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 12)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 42) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 12))$ тождественно истинна?

ОТВЕТЫ

5. 18

6. 18

7. 90

8. 15

9. 7

Краткая шпаргалка

Первая часть	Ищем	<u>Отрицание</u> второй части	Результат
A	Наибольшее	$Z \vee T$	наибольший общий делитель Z и T Примеры: $\text{НОД}(30, 12) = 6$ $\text{НОД}(18, 49) = 1$
A	Наибольшее	$Z \wedge T$	наименьшее общее кратное Z и T Примеры: $\text{НОК}(30, 12) = 60$ $\text{НОК}(14, 28) = 28$
A	Наименьшее	любое выражение	1
$\neg A$	Наименьшее	$\neg Z \vee \neg T$	наименьшее общее кратное Z и T Примеры: $\text{НОК}(30, 12) = 60$ $\text{НОК}(14, 28) = 28$
$\neg A$	Наименьшее	$\neg Z \wedge \neg T$	наименьшее из двух чисел Z и T Пример: для чисел 28 и 21 это 21
$\neg A$	Наибольшее	любое выражение	задача не совсем корректна
все остальные варианты – повышенный уровень			