Задание №15: делимость чисел

Время выполнения: 5 минут

Повторение: упрощение логических операций

$$A \wedge \overline{A} = 0$$
$$A \wedge A = A$$
$$A \wedge 1 = A$$
$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \overline{A} = 1$$
$$A \vee A = A$$
$$A \vee 1 = 1$$
$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$$
$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$$

Законы инверсии (де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Формулы поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$
$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$$
$$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \to B)} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$$
$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\overline{A} \& \overline{B})$$
$$= (\overline{A} \vee B) \& (A \vee \overline{B})$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\overline{A} \& (A \vee B) = \overline{A} \& B$$

$$A \vee (\overline{A} \& B) = A \vee B$$

Задача 1

Задача 1

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\textbf{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\textbf{ДЕЛ}(x, 21) + \textbf{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 1

ДЕЛ(x, A) → (ДЕЛ(x, 21) + ДЕЛ(x, 35))

Введём обозначения:
A = ДЕЛ(x, A)
21 = ДЕЛ(x, 21)
35 = ДЕЛ(x, 35)

Получаем: A -> (21 V 35)

Упростим: ¬A V 21 V 35

Решение задачи 1

¬A V 21 V 35

С учётом наших обозначений получаем:
или x **не** делится на A, или x делится на 21, или x делится на 35.

Если x делится на 21, результат – истина.
Если x делится на 35, результат – истина.

Но если x не делится ни на 21, ни на 35, то чтобы результат был истиной, x также не должно делиться на A. Значит, если разложить A на множители, среди них должны быть либо 21, либо 35.

Решение задачи 1

Требуется найти наименьшее А, среди делителей которого есть либо 21, либо 35.
Это число 21.

<u>Ответ: 21</u>

Решение задачи 1

<u>Более формальный способ решения</u>:

1) ввели обозначения: A -> (21 V 35)

2) упростили: ¬A V 21 V 35

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A, во второй части выражений с A нет
¬A – первая часть
21 V 35 – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:
¬(21 V 35) = ¬21 ∧ ¬35

Решение задачи 1

5) По условию задачи требуется найти минимальное A, при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное A, что если выполняется $\neg 21 \land \neg 35$, то выполняется и $\neg A$ (первая часть выражения).

X **не делится на 21** и X **не делится на 35**. Минимальное A, на которое не делится X, равно 21. Это и есть ответ.

Задача 2

Задача 2

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого **наименьшего** натурального числа А формула

$$\textbf{ДЕЛ}(x, A) \to (\neg \textbf{ДЕЛ}(x, 21) + \textbf{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной х)?

Решение задачи 2

ДЕЛ(x, A) → (¬ДЕЛ(x, 21) + ДЕЛ(x, 35))

После переобозначения (см. пример обозначений в задаче 1) получаем:
A -> (¬21 V 35)

После упрощения:
¬A V ¬21 V 35

Т.е. или x не делится на A, или x не делится на 21, или x делится на 35.

Решение задачи 2

¬A V ¬21 V 35

Если x не делится на 21, выражение истинно.
Если делится на 35, выражение истинно.

Если **x делится на 21** и **не делится на 35**, то чтобы выражение было истинным, **x не должно делиться на A**.

x не должно делиться на A, и мы знаем, что x не делится на 35 => x не делится ни на 5*7.

x делится на 21 => x делится на 3*7.

Решение задачи 2

x не делится на 35 => x не делится на 5*7.
x делится на 21 => x делится на 3*7.

Нужно найти минимальное x, на которое x не будет делиться. Это 5.

Ответ: 5

Решение задачи 2

<u>Более формальный способ решения</u>:

1) ввели обозначения: A -> (¬21 V 35)

2) упростили: ¬A V ¬21 V 35

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с A, во второй части выражений с A нет
¬A – первая часть
¬21 V 35 – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:
¬(¬21 V 35) = 21 ∧ ¬35

Решение задачи 2

5) По условию задачи требуется найти минимальное А, при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное А, что если выполняется 21 $\wedge$ ¬35, то выполняется и ¬А (первая часть выражения).

X **делится на 21** и X **не делится на 35**. Т.е. **X делится на 3*7** и **не делится на 5*7**.
Минимальное А, на которое не делится X, равно 5. Это и есть ответ.

Задача 3

Задача 3

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого **наибольшего** натурального числа А формула

$$\neg ДЕЛ(x, A) \to (\neg ДЕЛ(x, 21) \land \neg ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 3

$\neg$ДЕЛ(x, A) $\rightarrow$ ($\neg$ДЕЛ(x, 21) $\wedge\neg$ ДЕЛ(x, 35))

После переобзначения:
$\neg A \text{ -> } (\neg 21 \wedge \neg 35)$

Упростим:
$\neg(\neg A) \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$
$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$

Это означает, что или **x делится на A**, или **x не делится ни на 21, ни на 35**.

Решение задачи 3

$A \lor (\neg 21 \land \neg 35)$

Если x не делится ни на 21, ни на 35, выражение истинно.

Если x делится на 21, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на A.
Если x делится на 35, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на A.

Нужно взять такое A, чтобы для любого x, делящегося или на 21, или на 35, выражение было истинным.

Решение задачи 3

x делится на 21 => x делится на 3*7.
x делится на 35 => x делится на 5*7.

Если A = 7, то для любого x, делящегося или на 21, или на 35, выражение будет истинным.

Ответ: 7

Решение задачи 3

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения: $\neg A \rightarrow (\neg 21 \land \neg 35)$

2) упростили: $A \lor (\neg 21 \land \neg 35)$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с А, во второй части выражений с А нет
А – первая часть
$\neg 21 \land \neg 35$ – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:
$\neg(\neg 21 \land \neg 35) = 21 \lor 35$

Решение задачи 3

5) По условию задачи требуется найти минимальное А, при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное А, что если выполняется 21 V 35, то выполняется и А (первая часть выражения).

X **делится на 21 <u>или</u>** X **делится на 35**. Т.е. **X делится на 3*7 <u>или</u> делится на 5*7**. В любом случае X делится на 7.
Минимальное А, на которое делится X, равно 7. Это и есть ответ.

Задача 4

Задача 4

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \to (\text{ДЕЛ}(x, 6) \to \neg\text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 4

$\neg$ДЕЛ(x, A) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 6) $\rightarrow$ $\neg$ДЕЛ(x, 4))

После переобзначения:
$\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4)$

Упростим:
$\neg A \rightarrow (\neg\, 6 \vee \neg 4)$
$\neg(\neg A) \vee (\neg\, 6 \vee \neg 4)$
$A \vee \neg\, 6 \vee \neg 4$

Т.е. или x не делится на 6, или x не делится на 4, или x делится на 4.

Решение задачи 4

A V ¬ 6 V ¬4

Если x не делится на 6, выражение истинно.
Если x не делится на 4, выражение истинно.

Если x делится и на 6, и на 4, то x также должно делиться на A, чтобы выражение было истинным.

x делится на 4 => x делиться на 2*2
x делиться на 6 => x делиться на 2*3

Нужно найти **наибольшее** A, на которое **гарантированно** будет делиться такое число x.
Это число 2*2*3 = 12.

Ответ: 12

Решение задачи 4

<u>Более формальный способ решения</u>:

1) ввели обозначения: ¬А → (6 → ¬4)

2) упростили: А V ¬ 6 V ¬4

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с А, во второй части выражений с А нет
А – первая часть
¬ 6 V ¬4 – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:
¬(¬ 6 V ¬4)= 6 ∧ 4

Решение задачи 4

5) По условию задачи требуется найти максимальное А, при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти <u>максимальное</u> А, что если выполняется 6 $\wedge$ 4, то выполняется и А (первая часть выражения).

Х **делится на 6** **<u>и</u>** Х **делится на 4**. Т.е. **Х делится на 2*3** **<u>и</u>** **делится на 2*2**.
Х делится на 2*2*3.
Максимальное А, на которое гарантированно делится Х, равно 12. Это и есть ответ.

Самостоятельно

Самостоятельно

5. Для какого наибольшего натурального числа А формула **¬ДЕЛ(x,A)→(ДЕЛ(x,6)→ ¬ДЕЛ (x,9))** тождественно истинна?

6. Для какого наименьшего натурального числа А выражение **(ДЕЛ(x, A) ∧ ДЕЛ(x, 21)) →** **ДЕЛ(x, 18)** тождественно истинно?

7. Для какого наибольшего натурального числа А формула
(¬ДЕЛ(x, A) ∧ ДЕЛ(x, 15)) → (¬ДЕЛ(x, 18) ∨ ¬ДЕЛ(x, 15)) тождественно истинна?

8. Для какого **наименьшего** натурального числа А формула
(ДЕЛ(x, A) ∧ ¬ДЕЛ(x, 15)) → (ДЕЛ(x, 18) ∨ ДЕЛ(x, 15)) тождественно истинна

9, Для какого **наименьшего** натурального числа *А* формула
(ДЕЛ(*x*, *A*) ∧ ДЕЛ(*x*, 12)) → (ДЕЛ(*x*, 42) ∨ ¬ДЕЛ(*x*, 12)) тождественно истинна?

Ответы

5. 18
6. 18
7. 90
8. 15
9. 7

Краткая шпаргалка

Первая часть	Ищем	**Отрицание** второй части	Результат
A	Наибольшее	$Z \vee T$	наибольший общий делитель Z и T Примеры: НОД(30, 12) = 6 НОД(18, 49) = 1
A	Наибольшее	$Z \wedge T$	наименьшее общее кратное Z и T Примеры: НОК(30, 12) = 60 НОК(14, 28) = 28
A	Наименьшее	любое выражение	1
$\neg A$	Наименьшее	$\neg Z \vee \neg T$	наименьшее общее кратное Z и T Примеры: НОК(30, 12) = 60 НОК(14, 28) = 28
$\neg A$	Наименьшее	$\neg Z \wedge \neg T$	наименьшее из двух чисел Z и T Пример: для чисел 28 и 21 это 21
$\neg A$	Наибольшее	любое выражение	задача не совсем корректна
все остальные варианты – повышенный уровень			