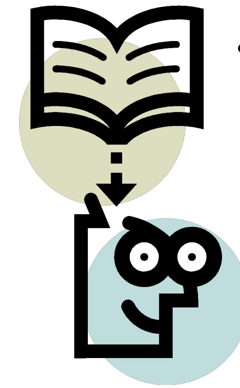
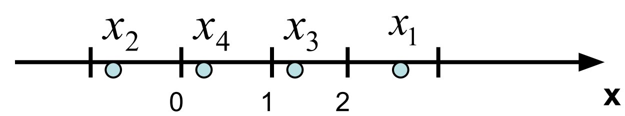


• Y=f(x)

ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА

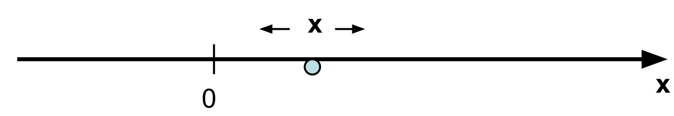
- Величина **x** называется **переменной**, если она принимает различные значения.
- **1. Последовательность** x_n
  - переменная величина.

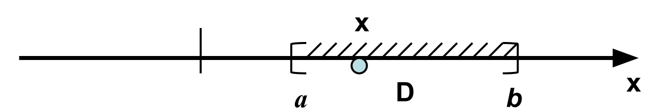


- ***Пример***: $x_n = \frac{1}{n}$
  - или. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
  - **Областью значений** переменной называется множество всех ее значений.

2. Переменная x, где

$$x \in \Re \quad или \quad x \in D$$





Понятие функции

- **Определение.**
- Если для каждого значения переменной **x**, принадлежащей числовому множеству **D** по некоторому правилу (по формуле) задается единственное значение у из числового множества **M**, то говорят, что задана функция
- **Y=f(x)**
- **f –** обозначение функции (правила, формулы)
- **D -** область определения функции, х – аргумент
- **M -** область значений функции, у – значение функции

- **Способы задания функции.**
- 1. Аналитический (формула).
- 2.Табличный.
- 3.Графический.

Аналитический

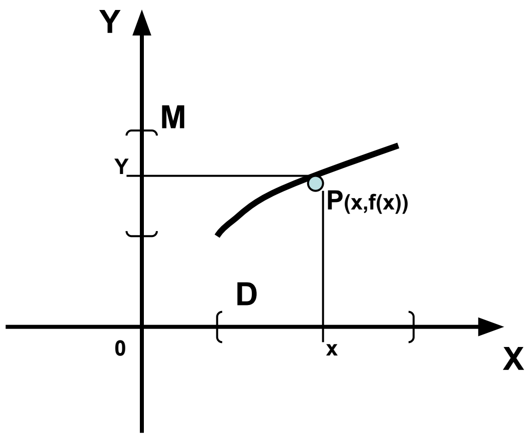
$$y = x^2; \quad y = \sin x; \quad y = \frac{x+1}{2x-3}$$

Табличный

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

•Y=f(x)

Графический способ задания функции



Определение.
Графиком функции **Y=f(x)** называется множество точек P(x,Y) на плоскости XOY, абсциссами которых являются значения аргумента x, а ординатами – соответствующие значения функции Y=f(x)

Примеры. 1. Линейная функция

$$y = kx + b$$

2. Квадратичная функция

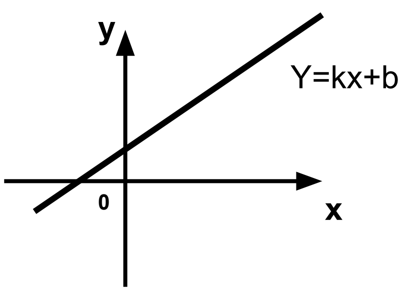
$$y = x^2$$

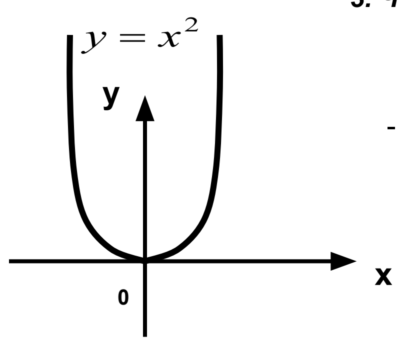
3. Числовая последовательность

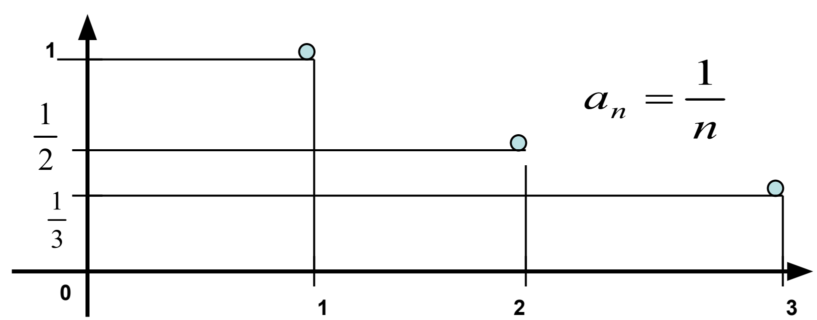
$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

- как функция целочисленного аргумента $n \in N$

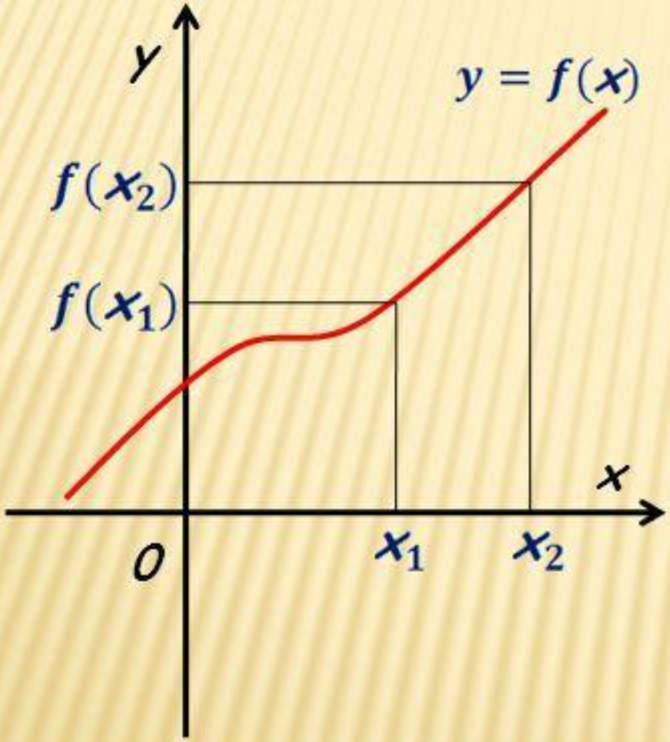
$$a_n = f(n)$$





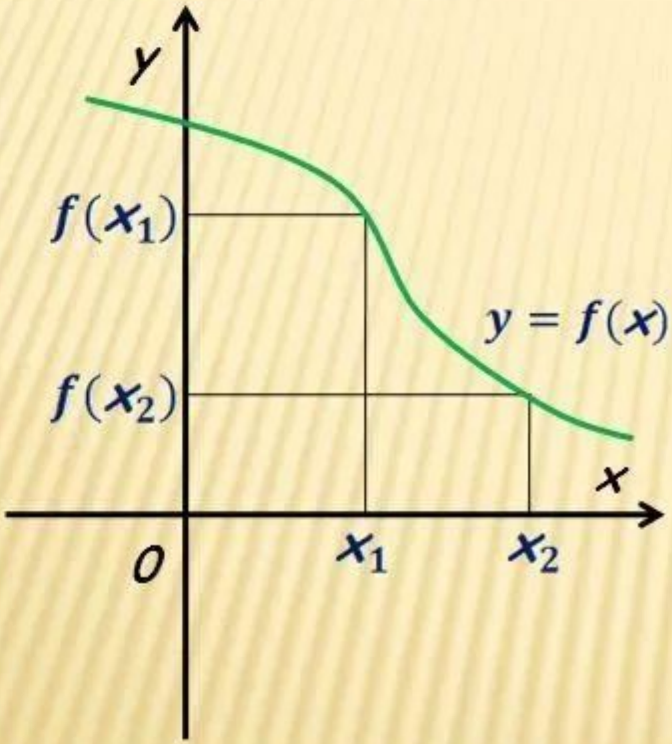


Возрастающая функция



- Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на промежутке X, если из неравенства $x_1 < x_2$
- , где x_1 и x_2 – любые две точки промежутка X, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

Убывающая функция



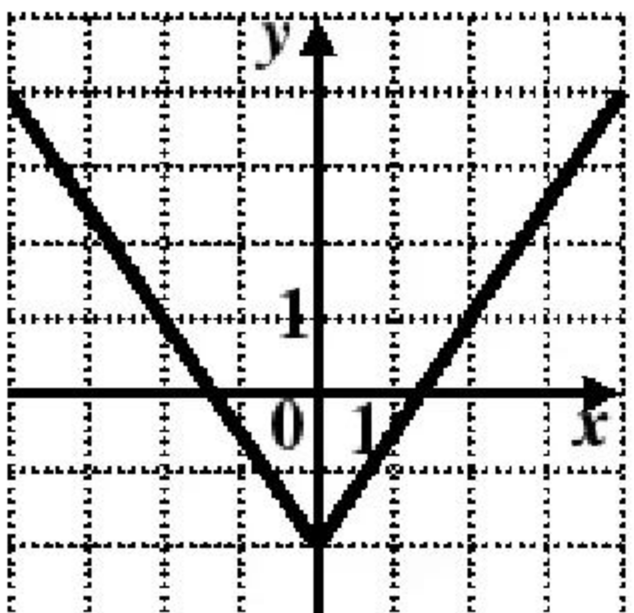
- Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на промежутке X, если из неравенства $x_1 < x_2$
- , где x_1 и x_2 - любые две точки промежутка X, следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$

3. Четная функция

Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функция симметричен относительно ***оси ординат***.

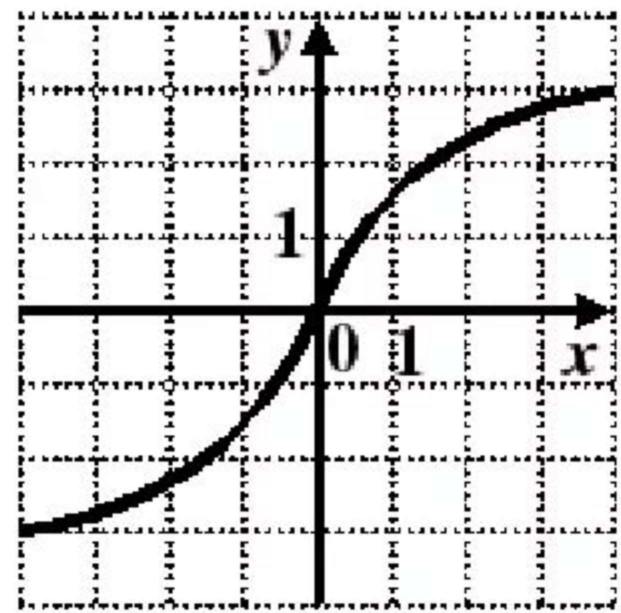


Нечетная функция

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно ***начала координат***.



Примеры чётных функций

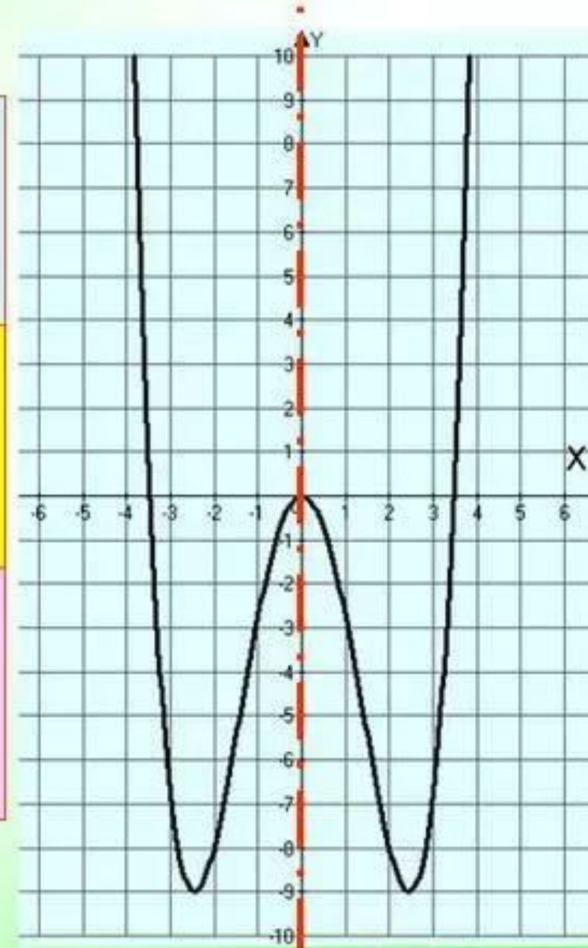


График данной функции симметричен относительно оси О*y*

•Y=f(x)

Периодические функции

В природе и технике часто встречаются явления, повторяющиеся по истечении некоторого промежутка времени.

Например, при вращении Земли вокруг Солнца её расстояние от солнца всё время меняется, но после полного оборота Земля оказывается на том же расстоянии от солнца, сто и год тому назад. Возвращается на своё место после полного оборота и лопасть турбины.

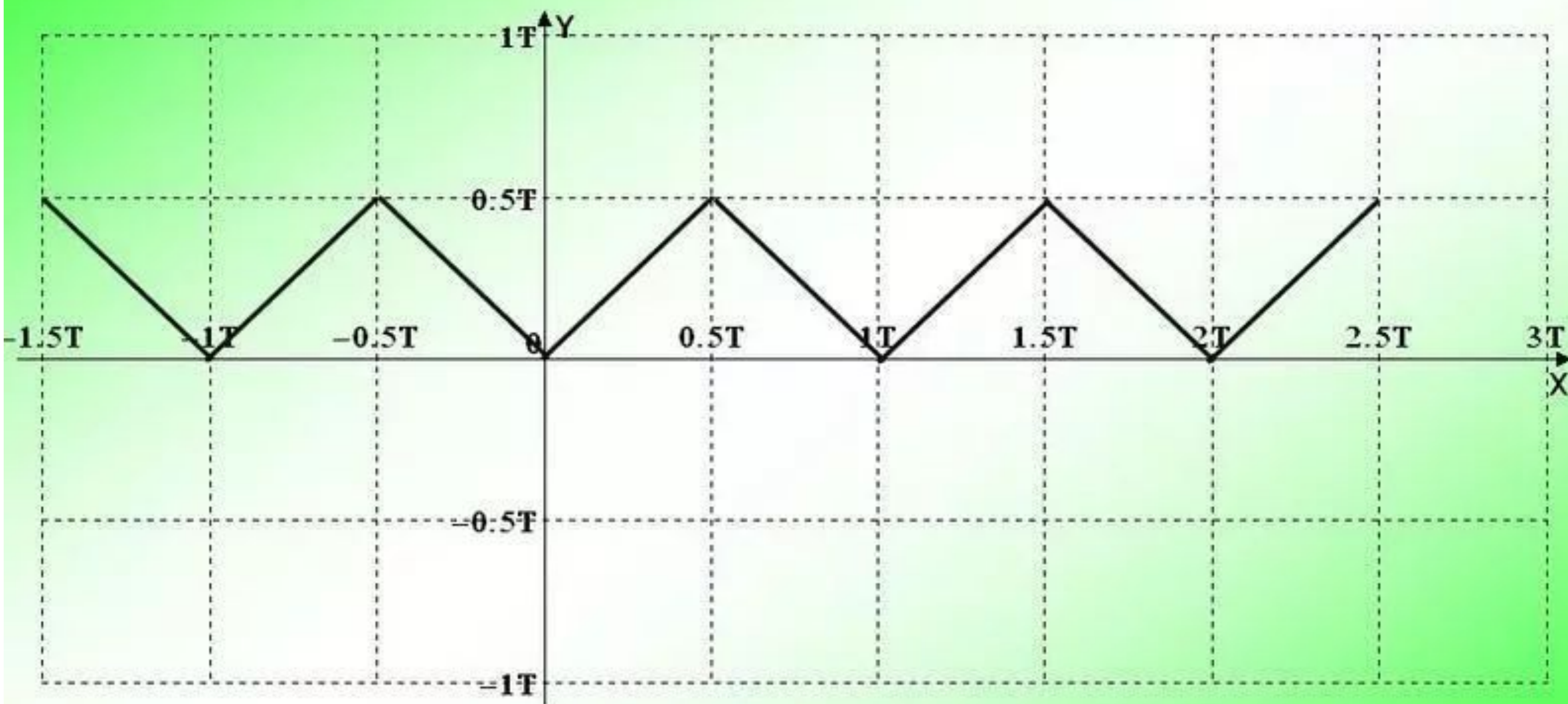
Такие периодические повторяющиеся процессы описываются ***периодическими функциями.***

Периодичность функции

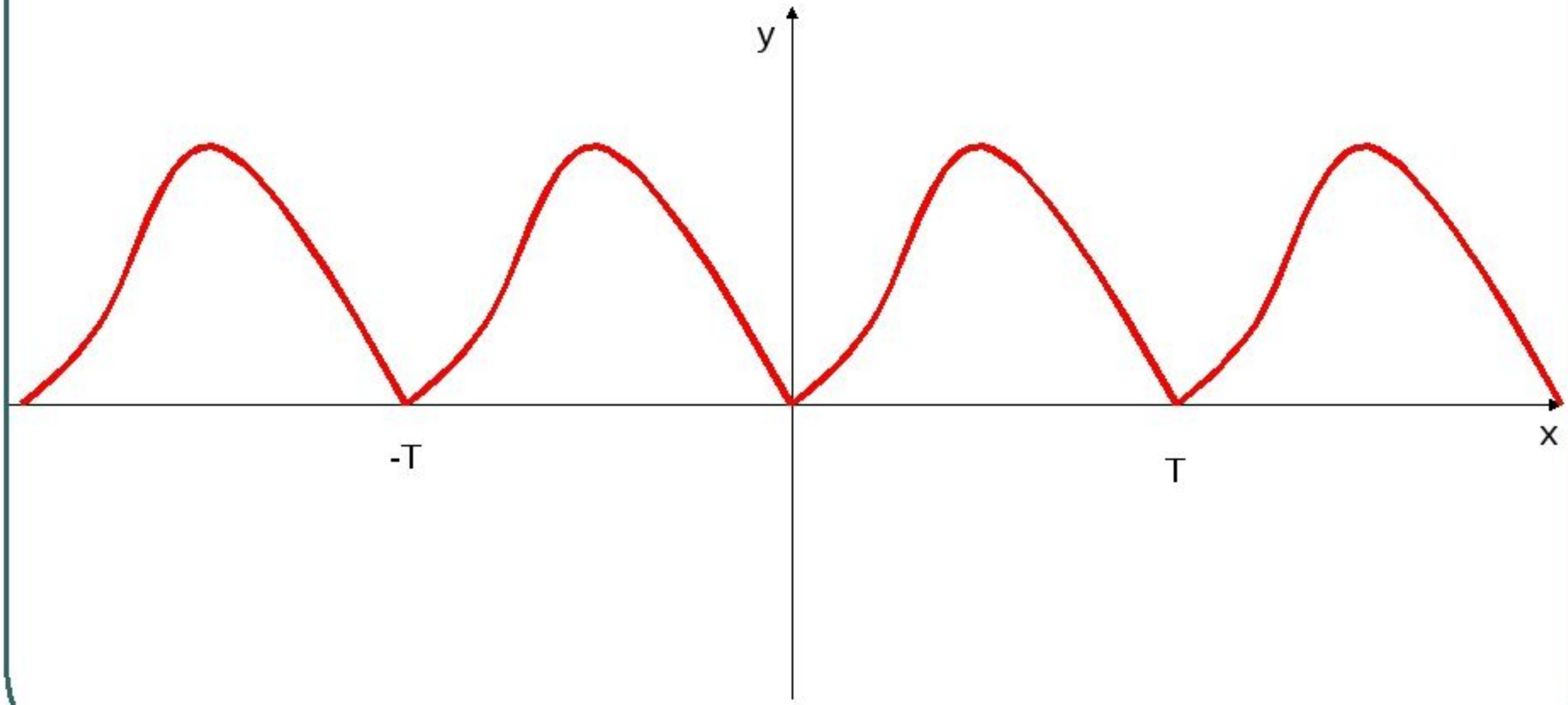
Периодической называется функция, удовлетворяющая условию: $f(x+T)=f(x)$ для любого x.

Наименьшее значение T называется ***периодом функции***

Примеры периодических функций



Периодические функции



Свойства функций

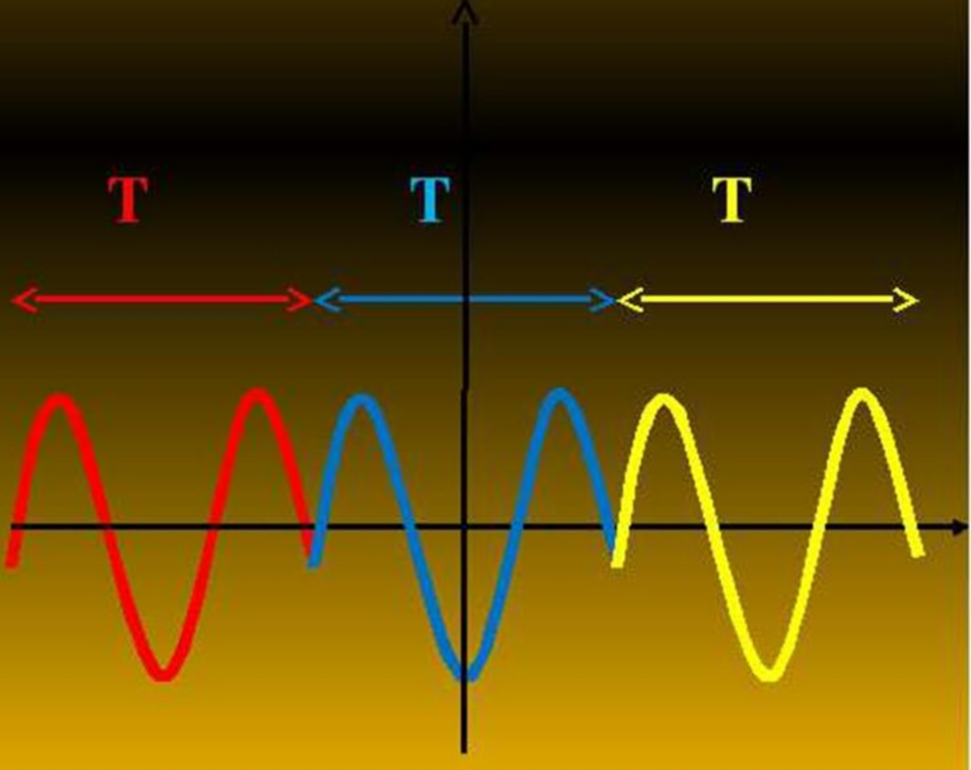
2. Периодичность | **Свойство графика**

Функцию f называют

периодической

с периодом T≠0, если для любого x из области её определения выполняется равенство:

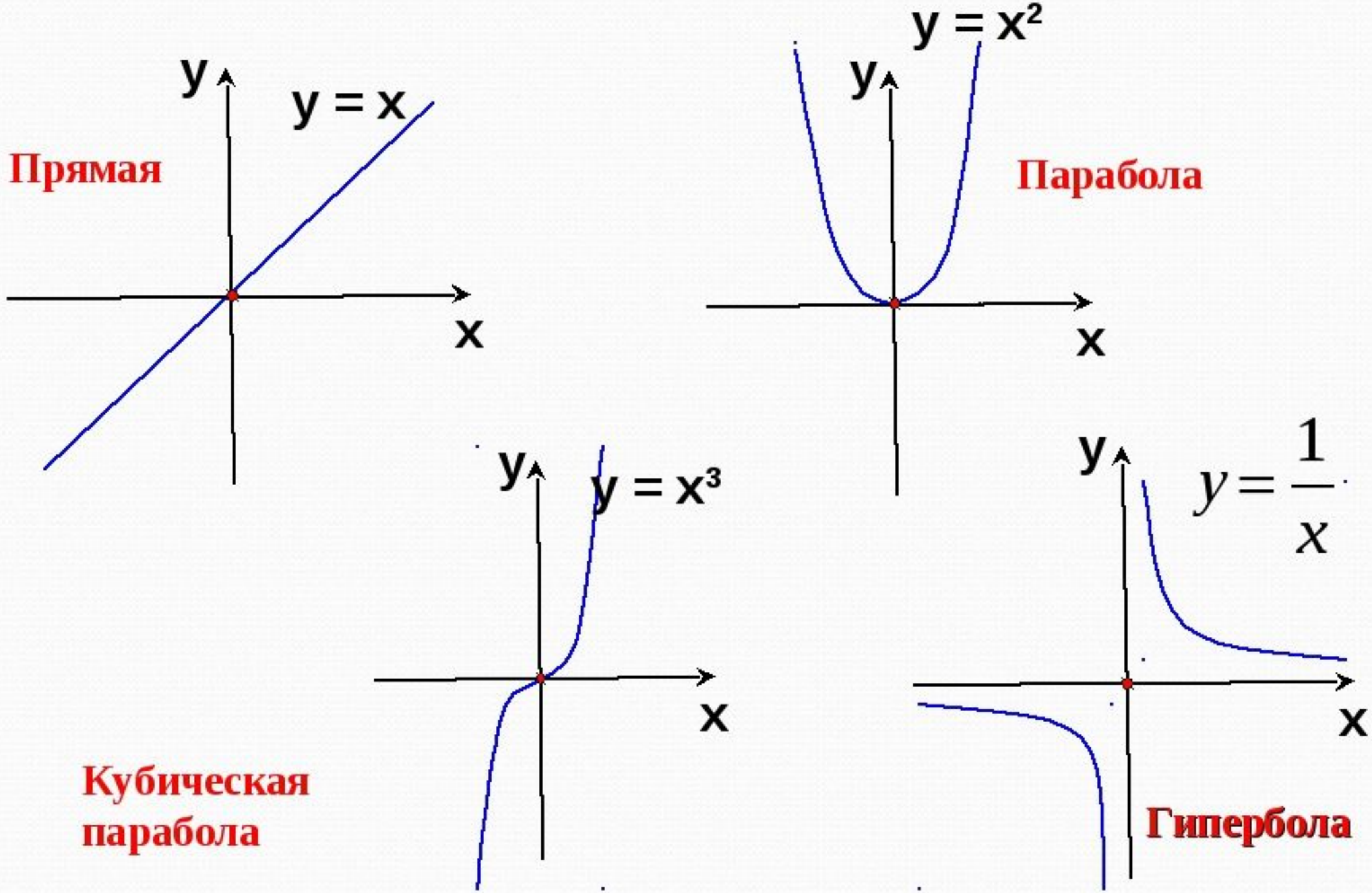
$f(x+T)=f(x)=f(x-T)$



Основные элементарные функции

- линейная функция y=kx+b
- показательная a^x (0 <a≠***1);***); ,
- логарифмическая $\log_a$ ***x (0 < a≠1);*** ,
- степенная $y=x^n$;
- тригонометрические sin x, cos x, tg x, ctg x;
- обратные тригонометрические функции: arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x.

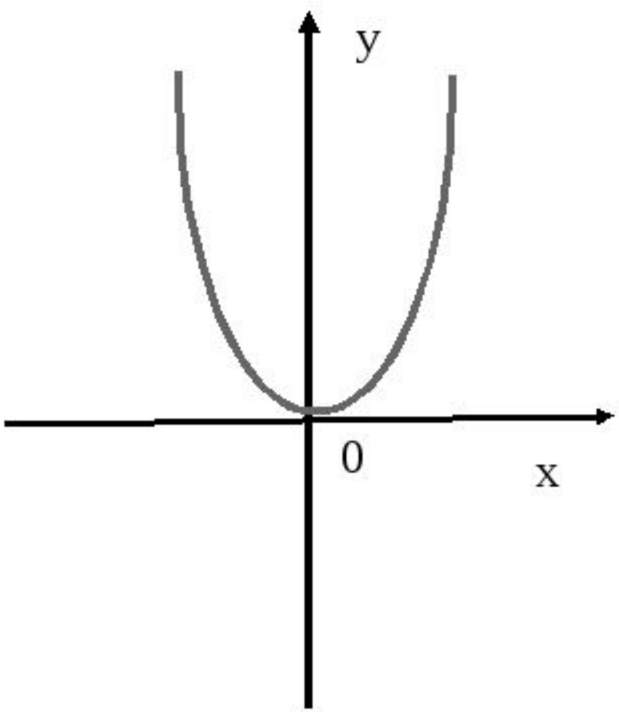
Степенная функция



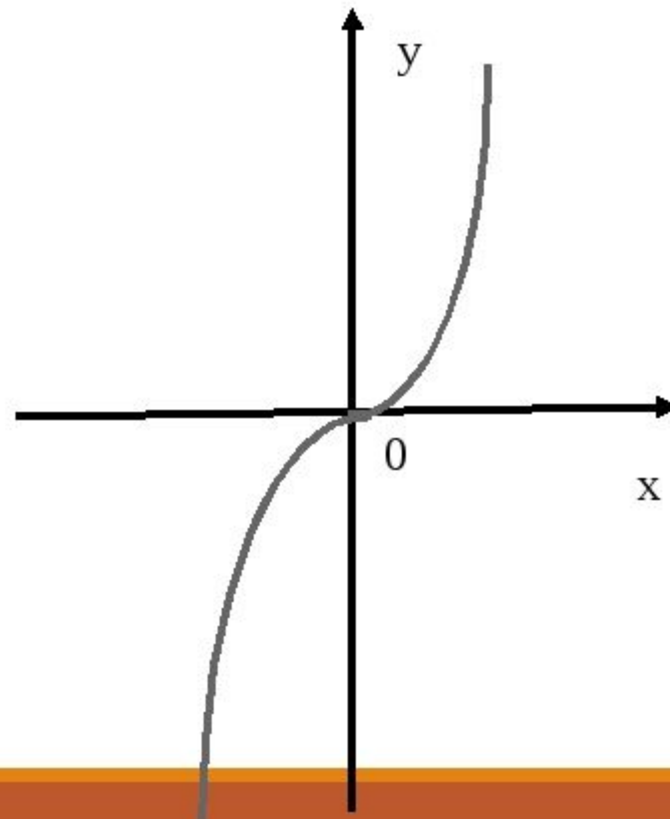
Степенная функция и ее график

$y = x^n$, *где n – натуральное число*

1) **n – четное,**

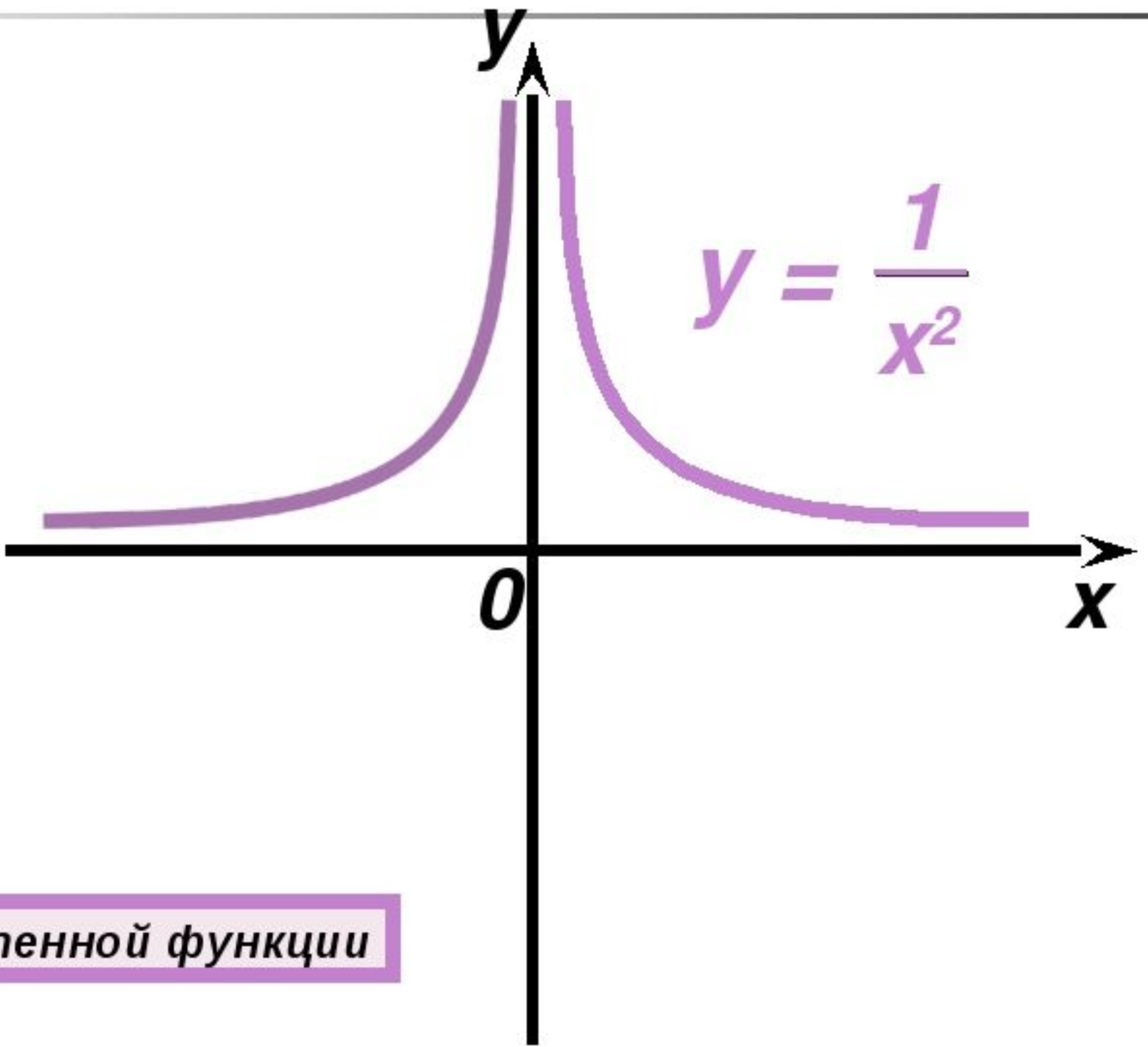


2) **n - нечетное**



Степенная функция

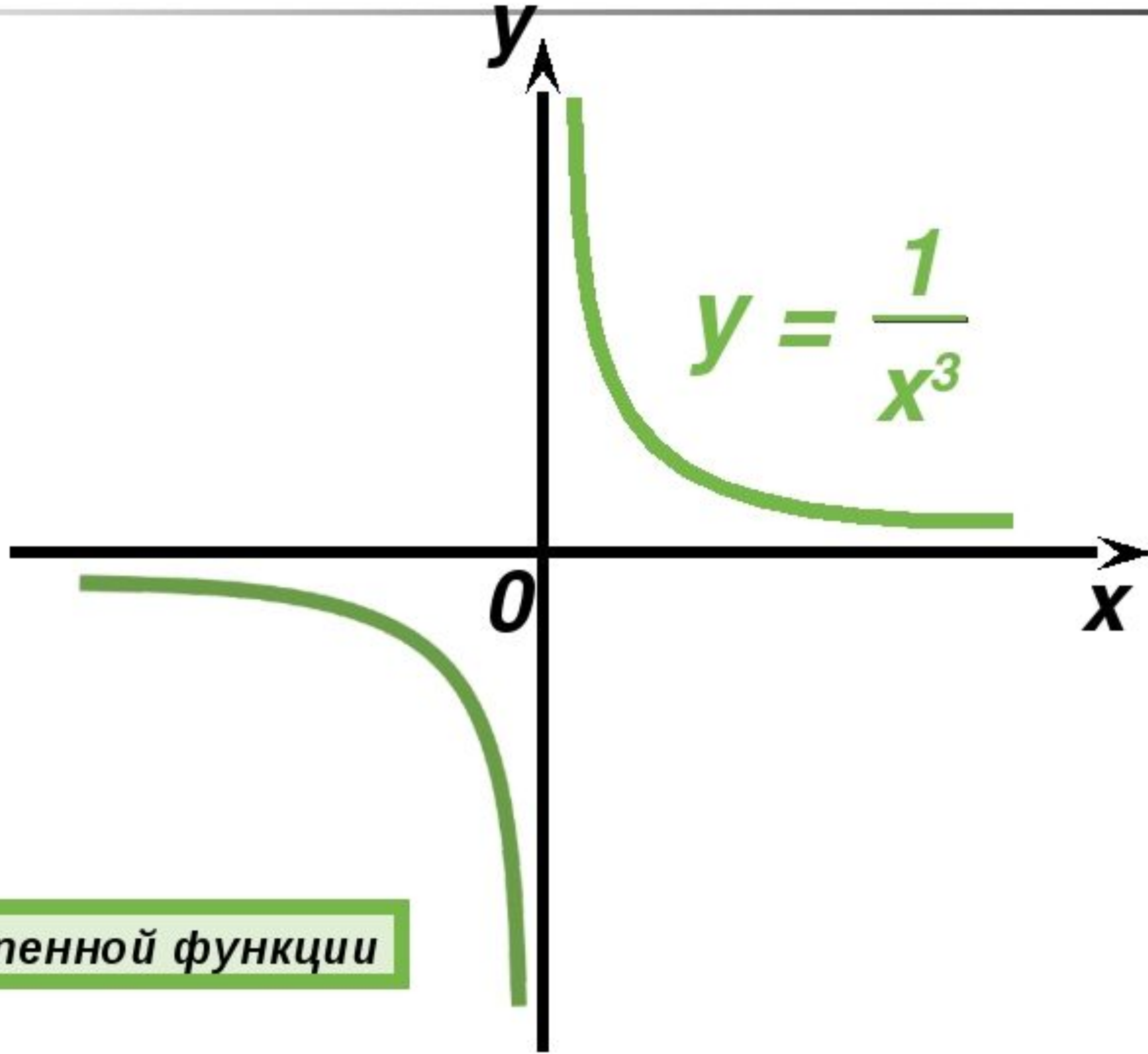
$y = x^{-n}$, n – четное



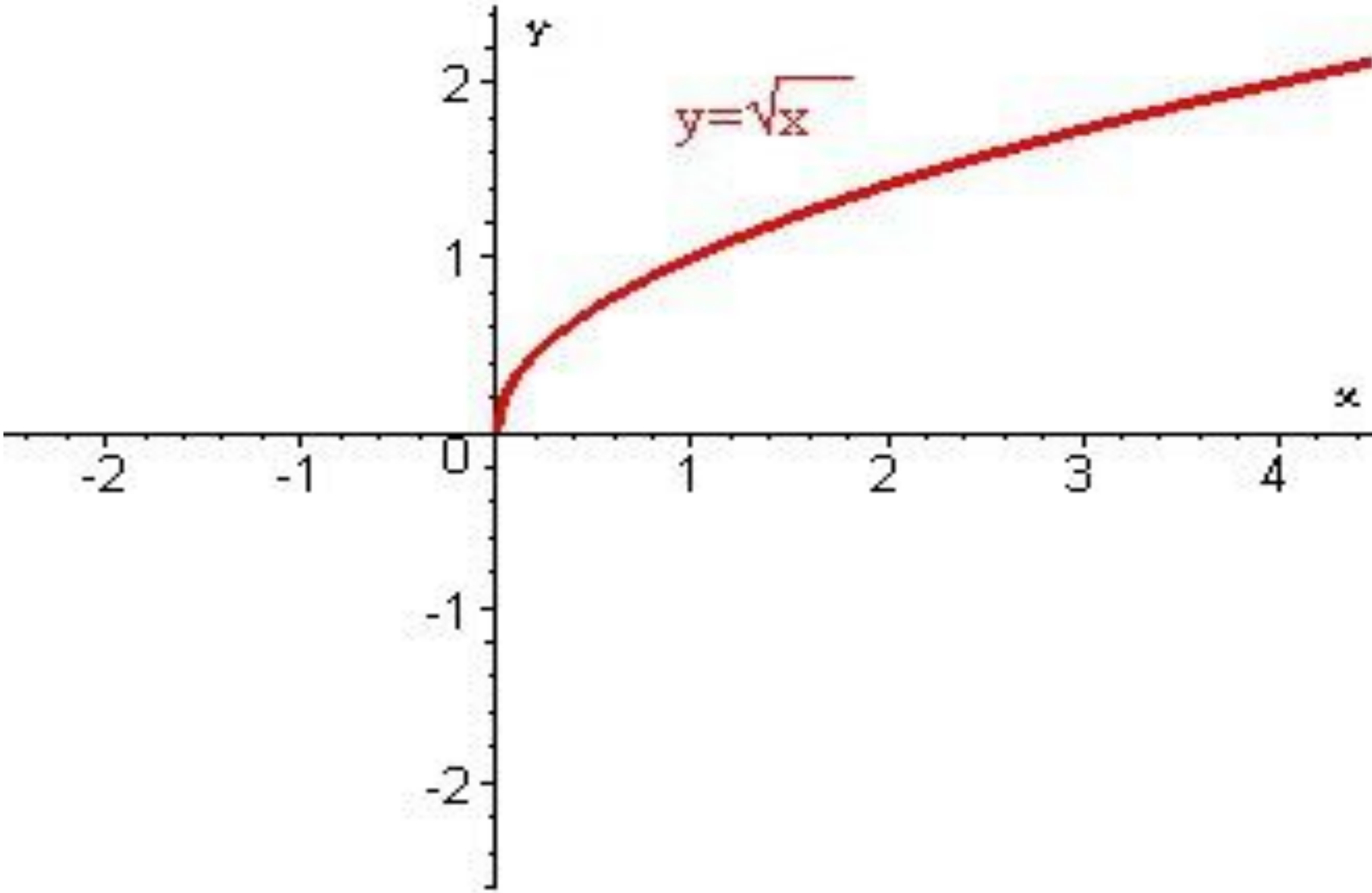
Свойства степенной функции

Степенная функция

$y = x^{-n}$, n – нечетное

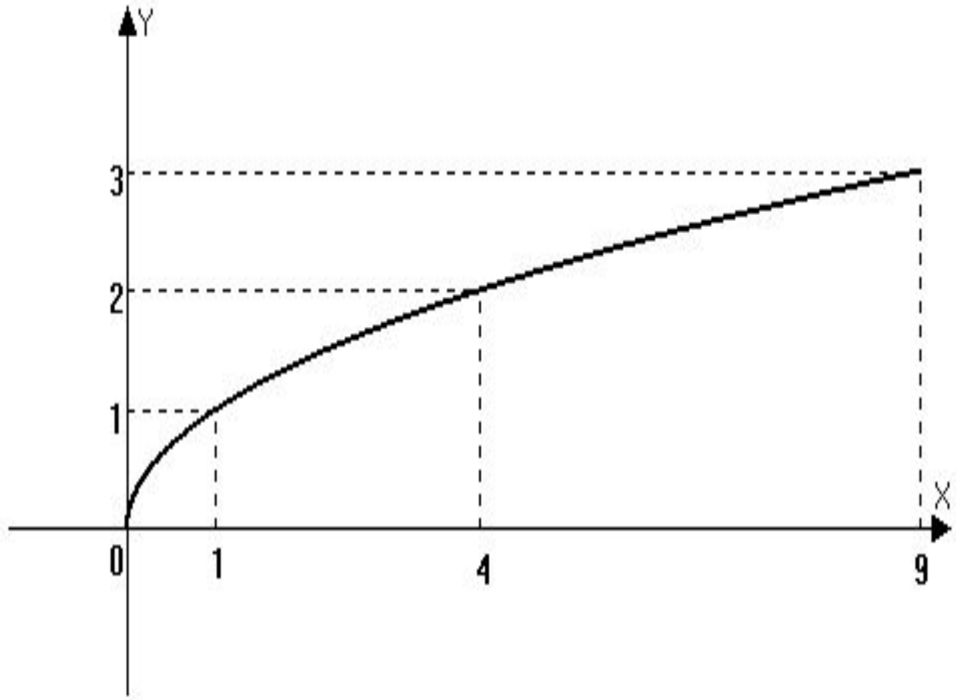


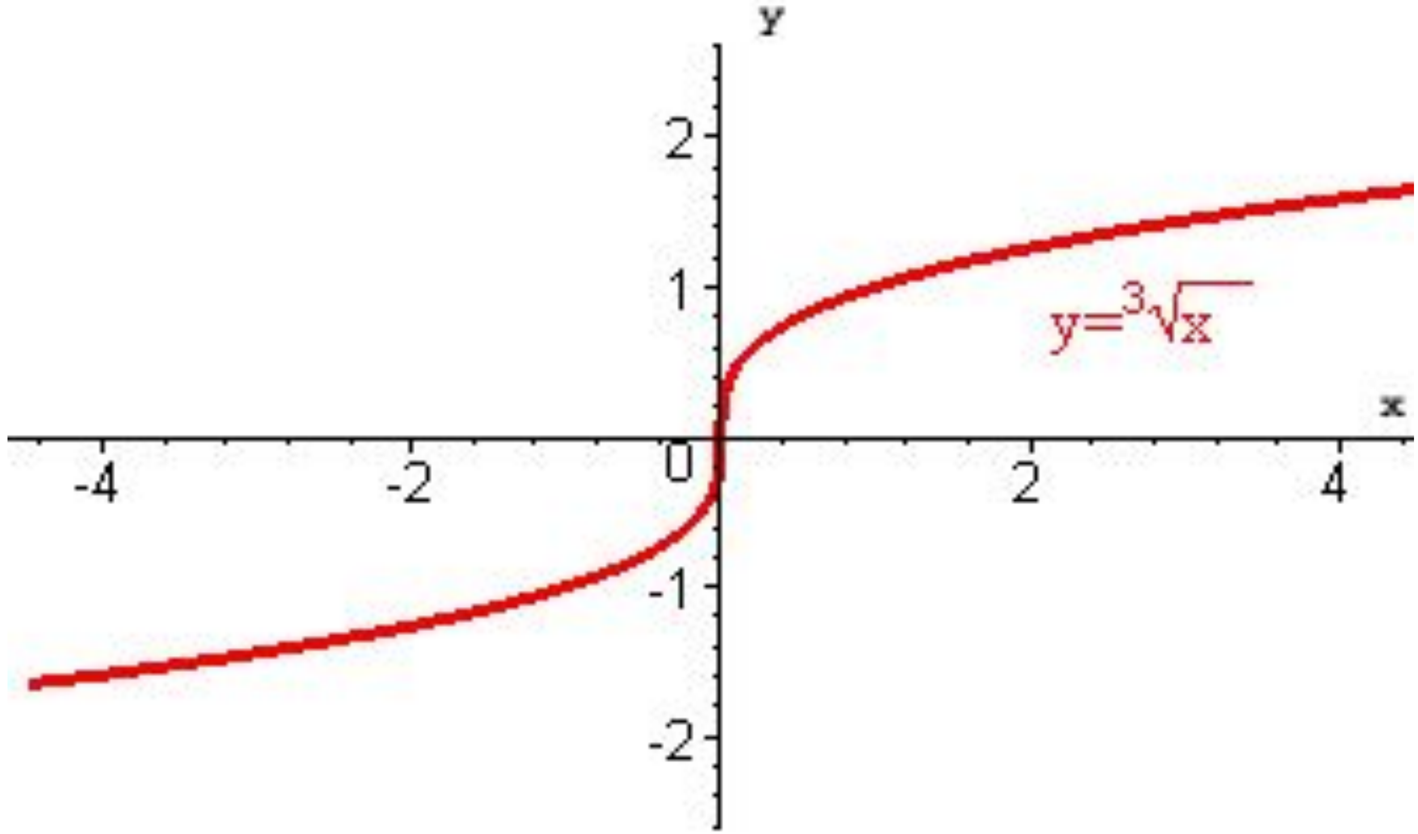
Свойства степенной функции



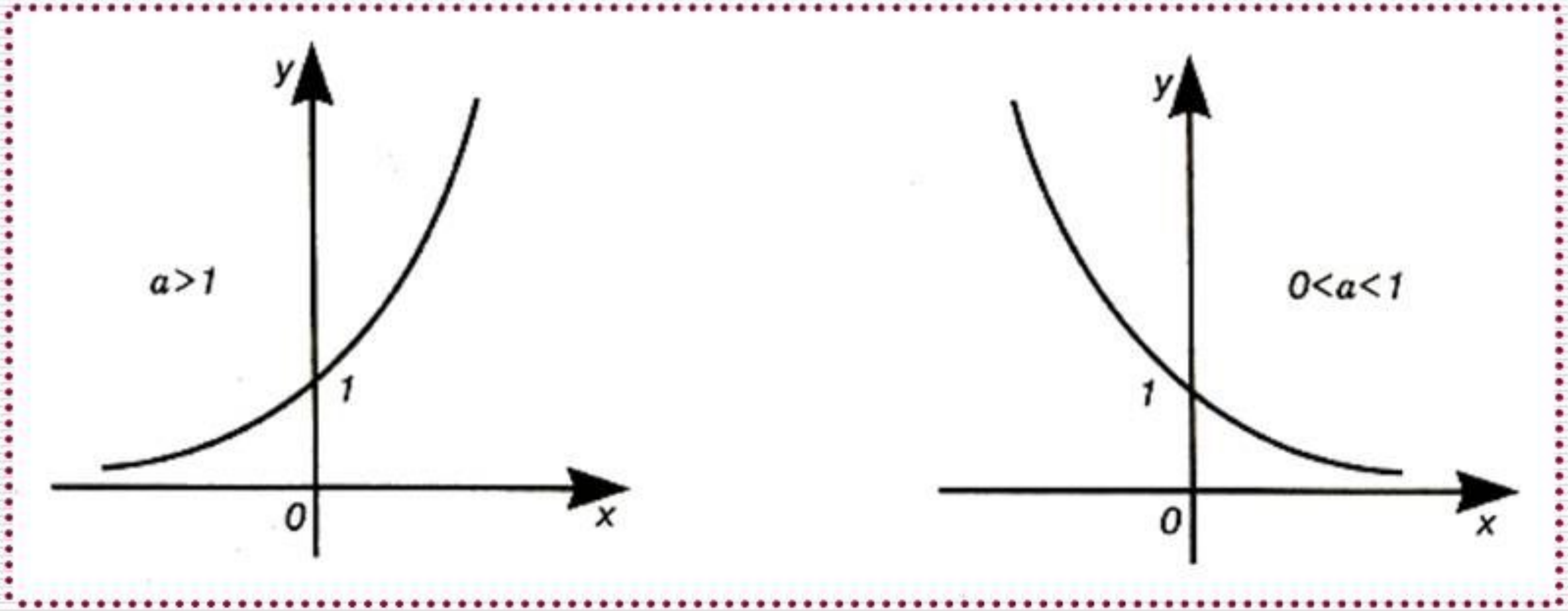
y
$y=\sqrt{x}$
x
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4

•Y=f(x)




y
2
1
-1
-2
x
-4
-2
0
2
4
y=3√x

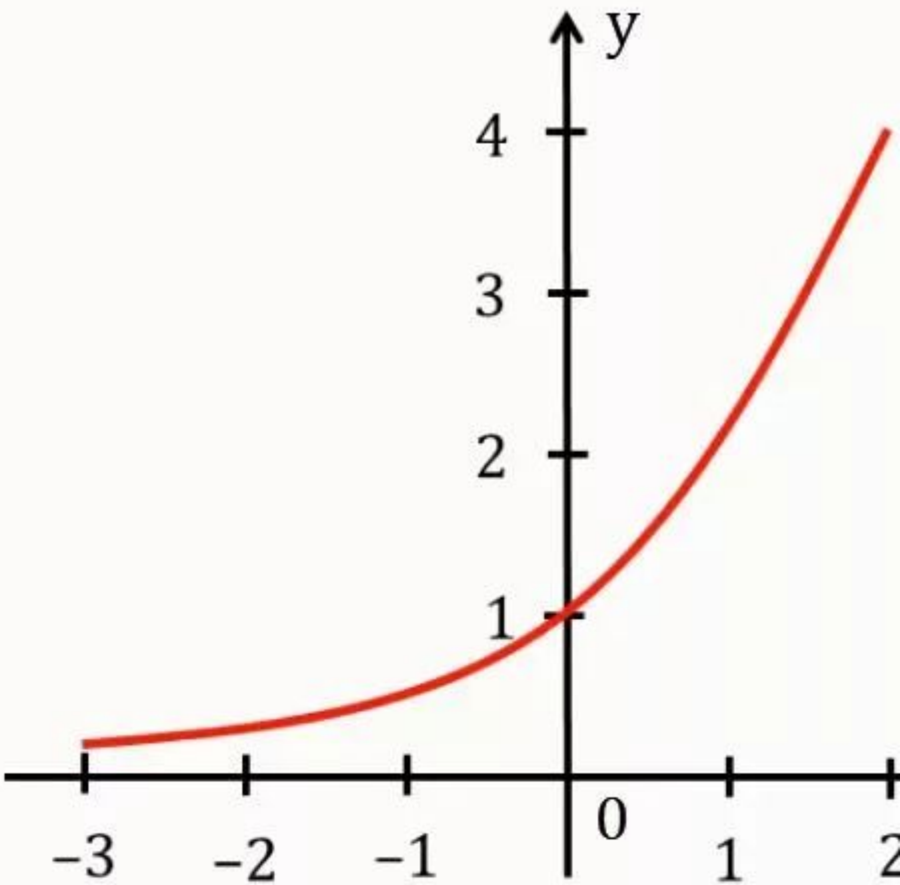
4. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$



2^x

	–1	0	2
	0,5	1	4

фик показательной функции
дит через точку (0;1).



Логарифм числа

Определение:

Логарифм числа b по основанию a- это показатель степени в которую нужно возвести основание α, чтобы получить число b

$$\log_a b$$

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию

Обозначение:

$$\boxed{\log_{10} b = \lg b}$$

Натуральный логарифм – это логарифм по основанию e

(e - иррациональное число, приближенное значение которого: e=2,7.

Обозначение:

$$\boxed{\log_{e} b = \ln b}$$

Логарифм

$\log_2 8 = 3,$ так как $2^3 = 8;$

$\log_7 49 = 2,$ так как $7^2 = 49;$

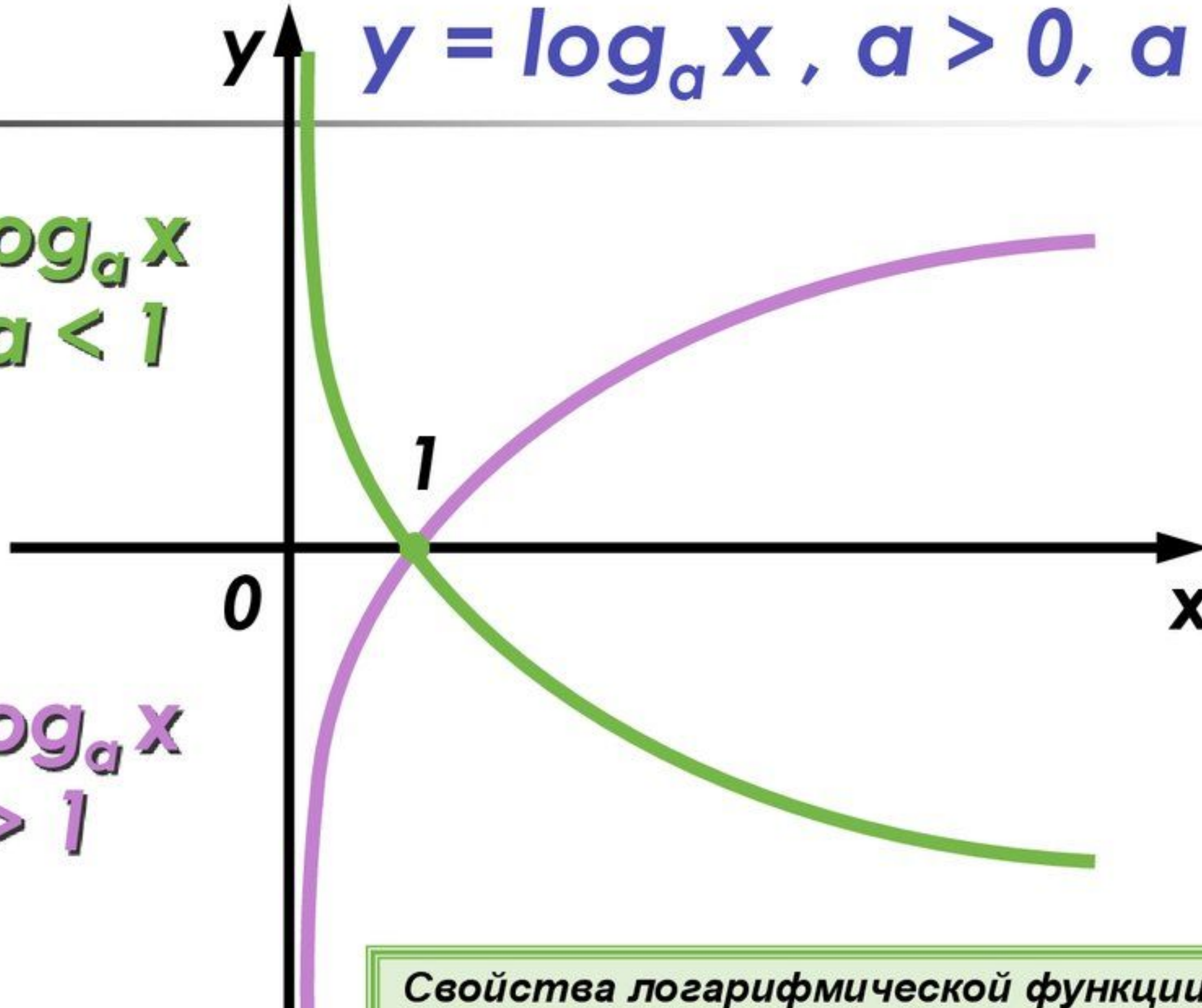
$\log_5 \dfrac{1}{5} = -1,$ так как $5^{-1} = \dfrac{1}{5};$

$\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2},$ так как $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Логарифмическая функция

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

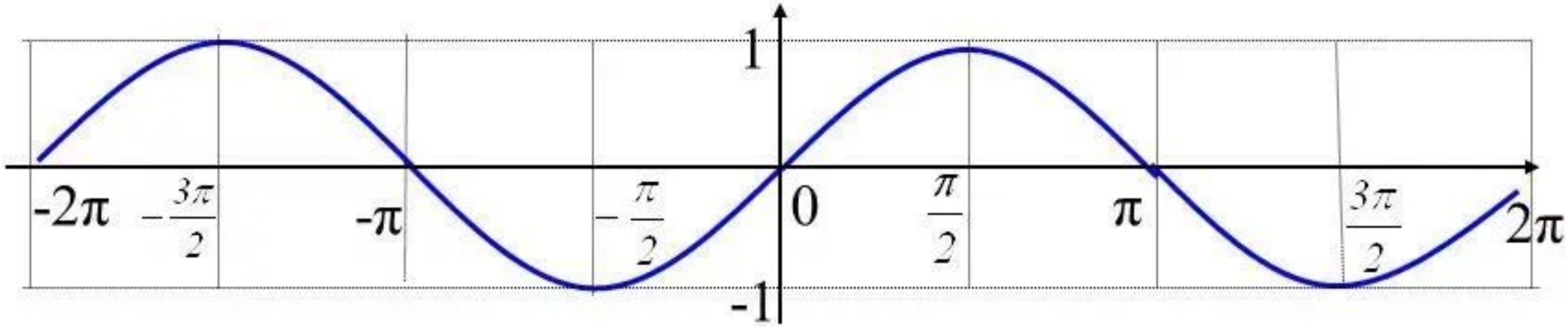
$y = \log_a x$
$0 < a < 1$



$y = \log_a x$
$a > 1$

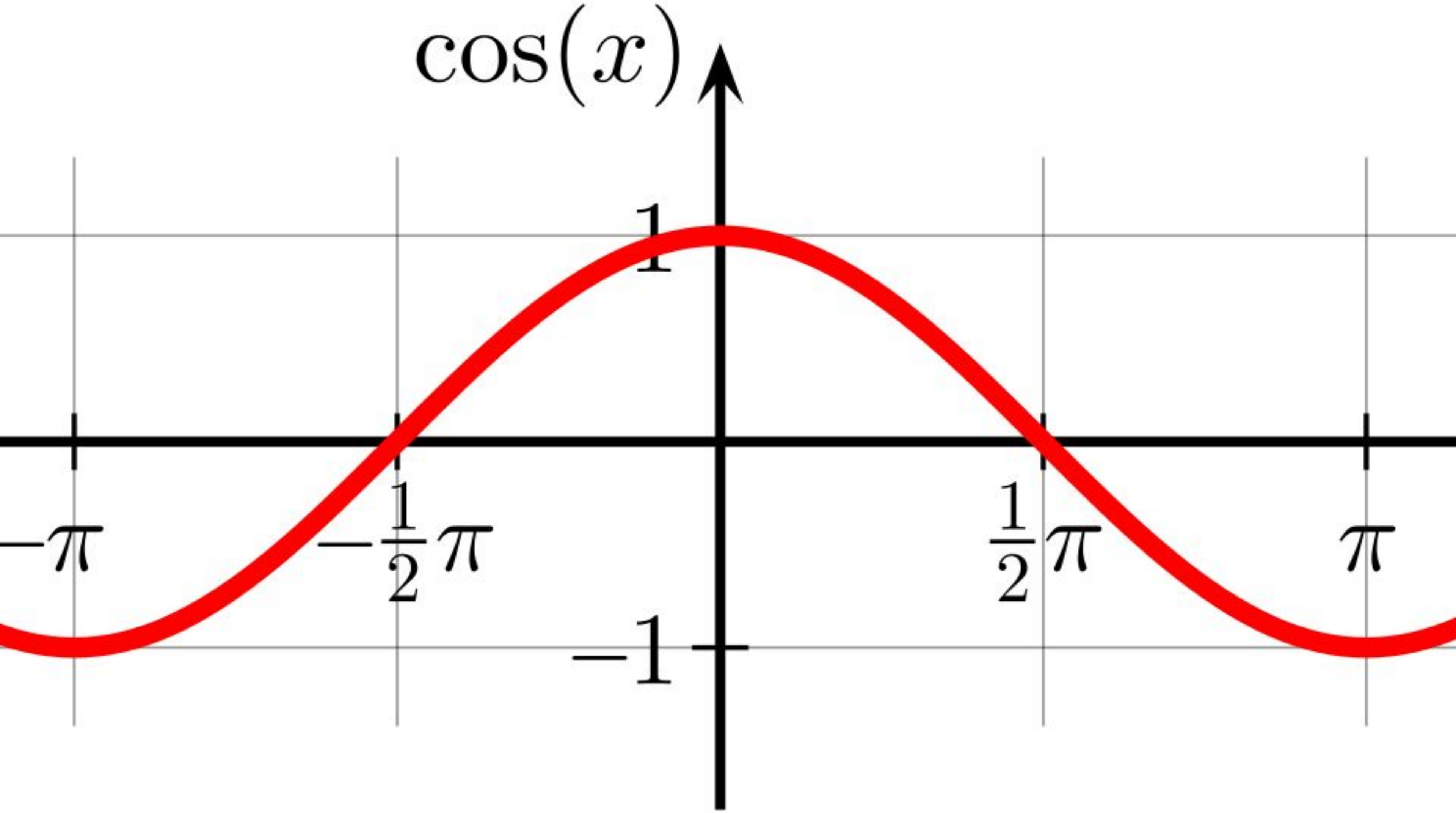
Свойства логарифмической функции

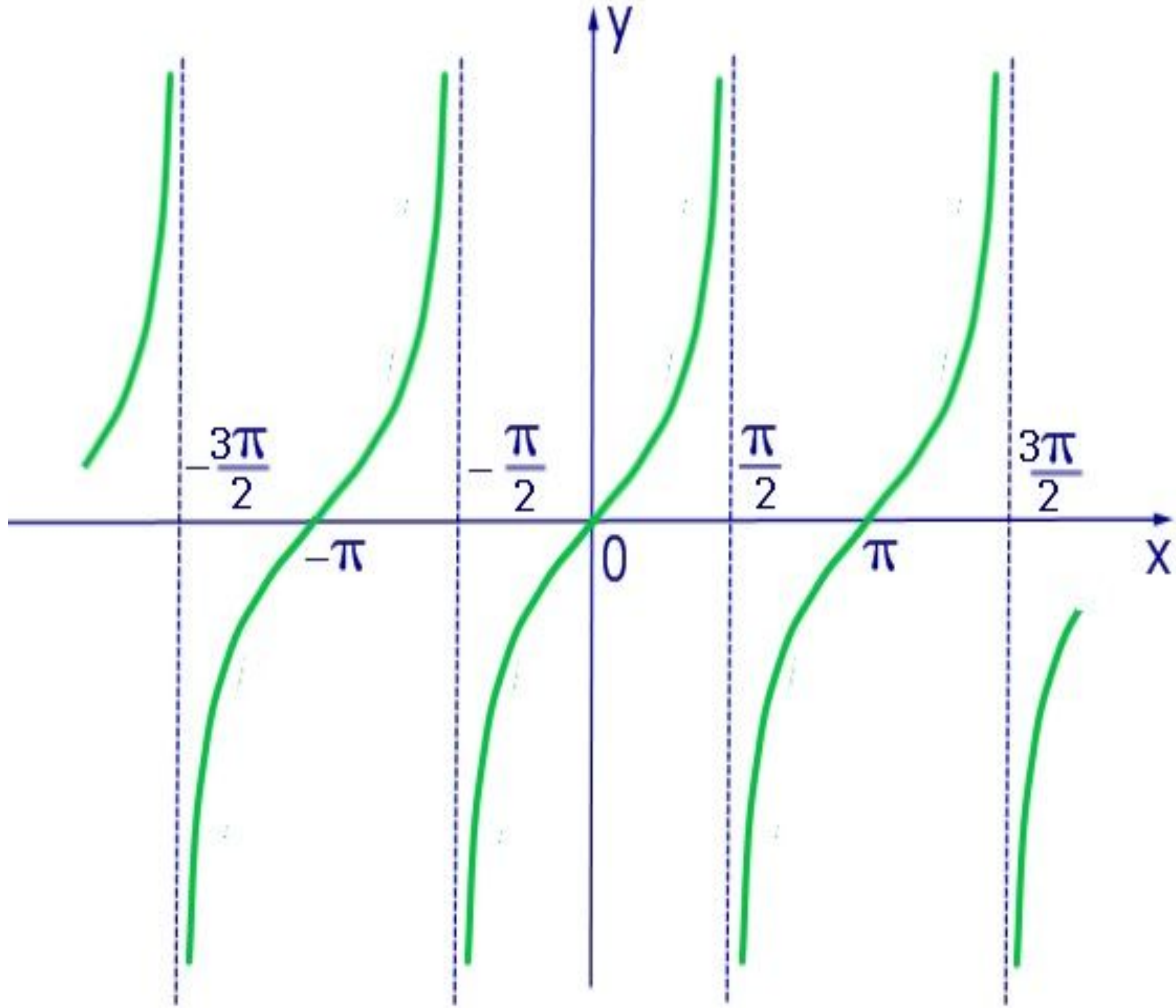
Функция $y = \sin x$

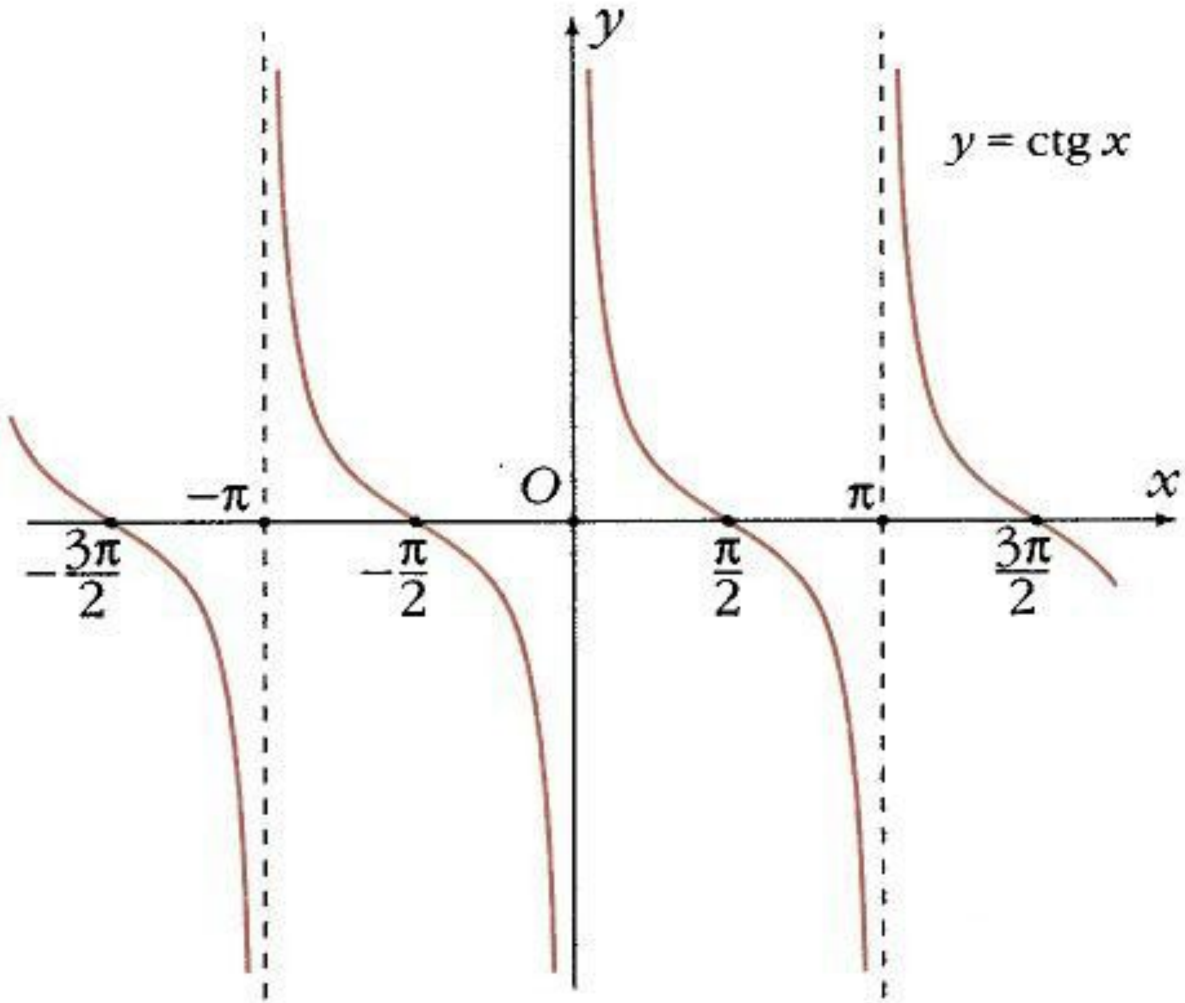


- Область определения функции – все действительные числа.
- Область значений - $y \in [-1; 1]$.
- Данная функция – нечетная, график ее симметричен относительно начала координат.
- Функция – периодическая. Наименьший положительный период равен 2π.

• Y=f(x)



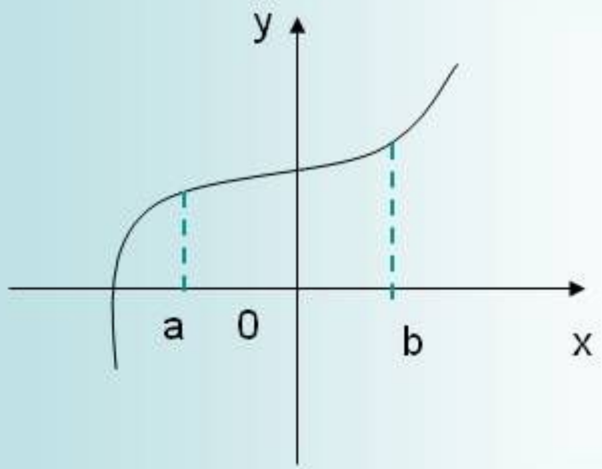

y
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
0
π
x

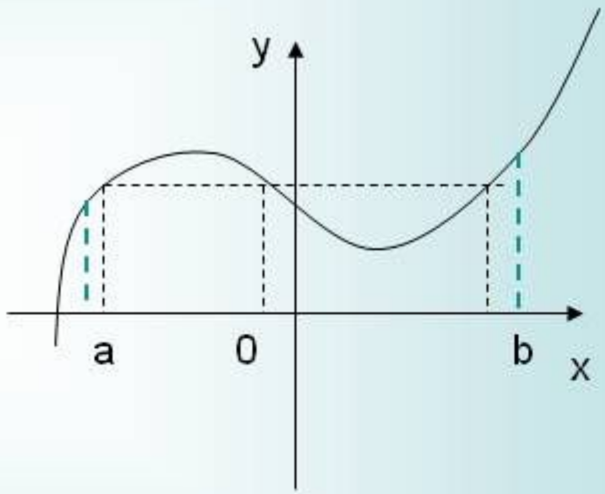


y
y = ctg x
x
O
−π
π
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2

I. Понятие обратной функции

Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, называется *обратимой*, если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка X.





Функция $y = f(x)$ обратима на $[a; b]$

Функция $y = f(x)$ не обратима на $[a; b]$

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение y только при одном значении x, то эту функцию называют обратимой.

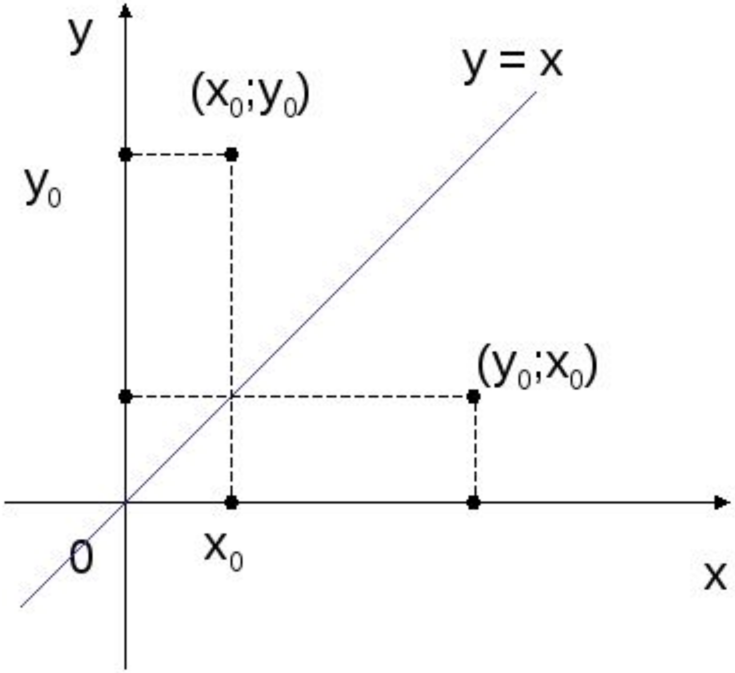
Обратимые функции	**Необратимая функция**
$y = 2x + 2$	$y = x^2$
$y = 2 + \dfrac{1}{x}$	$x_1 = \sqrt{y}$
$y = x^3$	$x_2 = -\sqrt{y}$

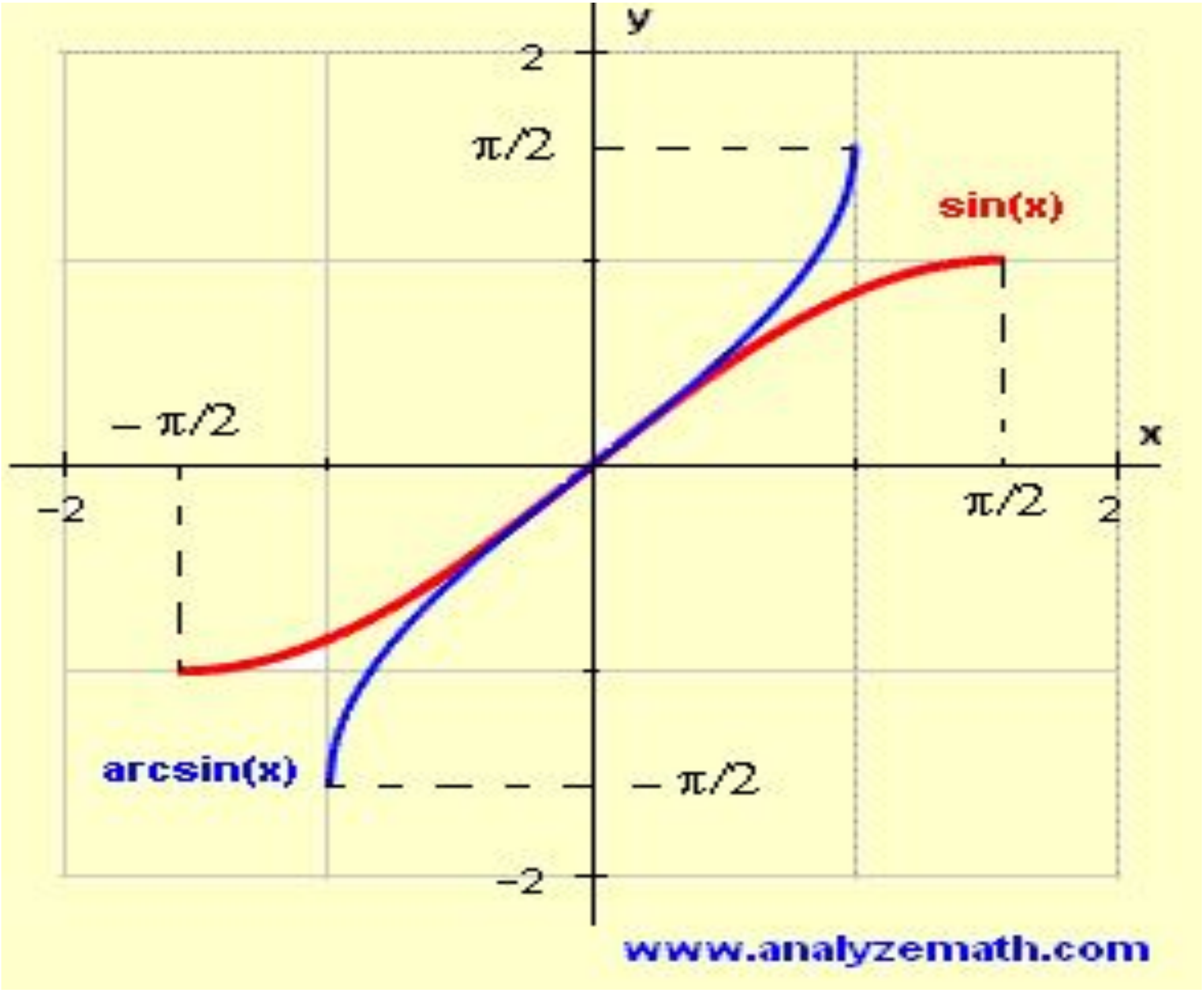
Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. Поменяем местами x и y: $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют обратной к функции $y = f(x)$.

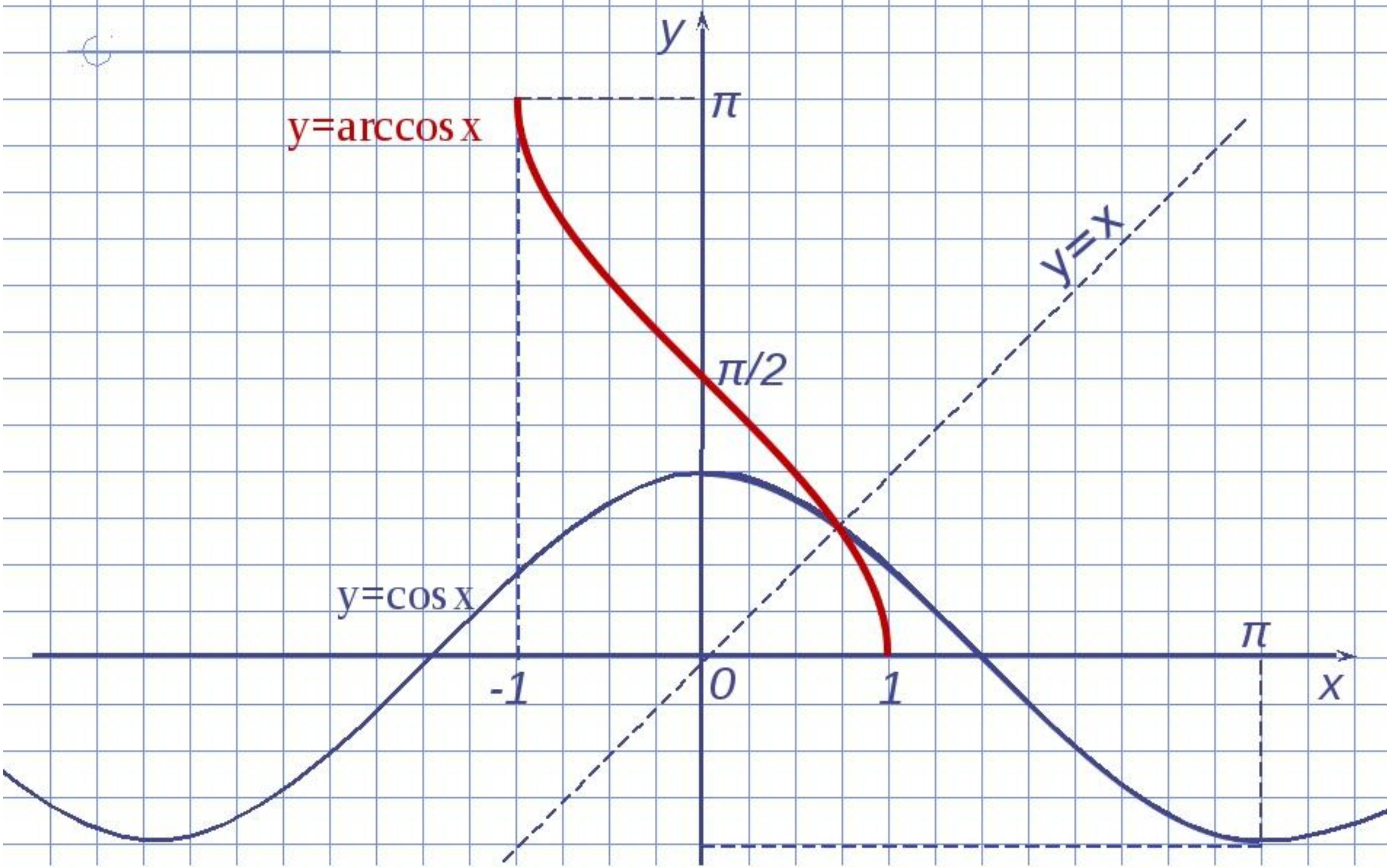
Свойства обратных функций

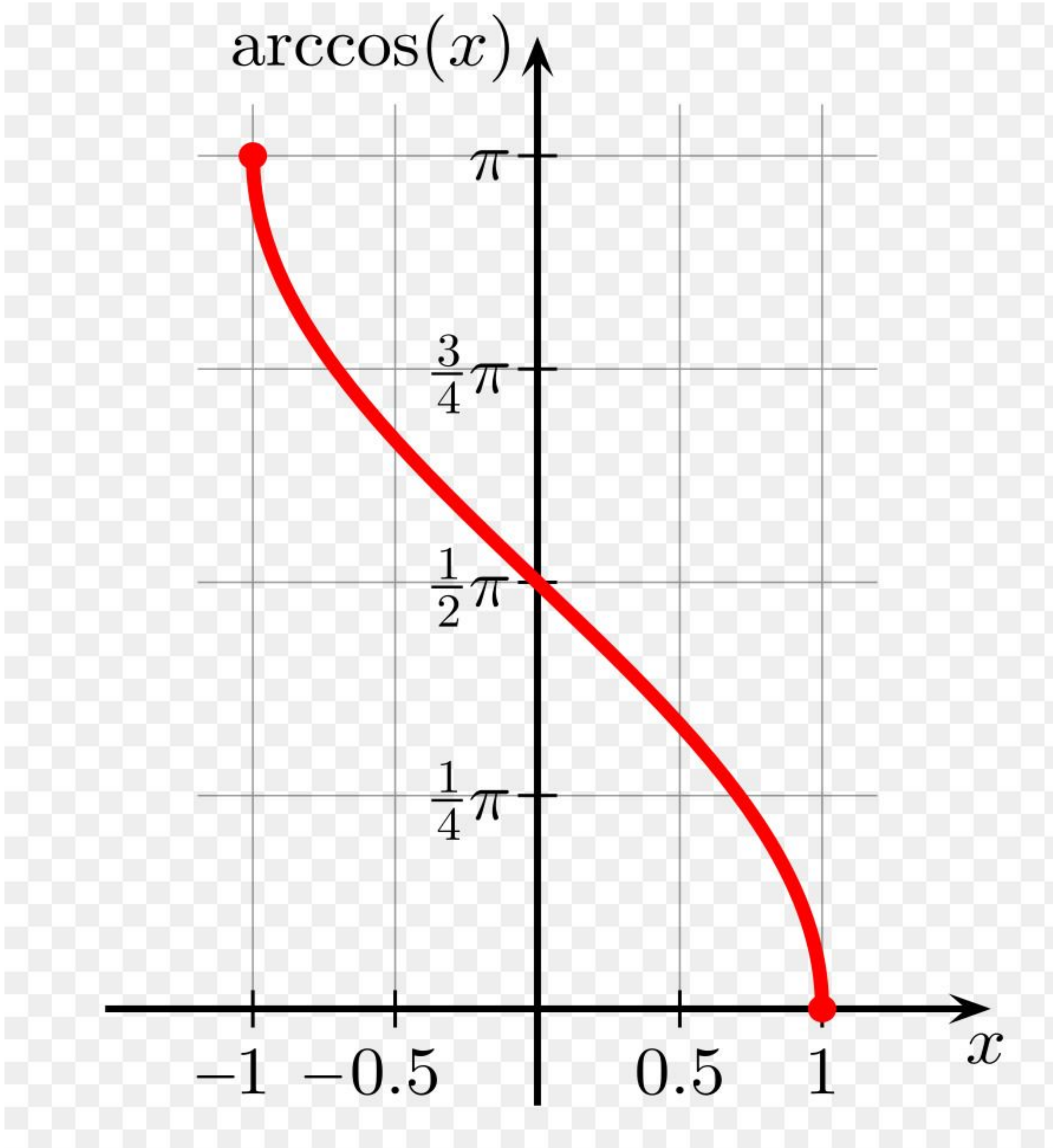
3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y = x.




y
2
π/2
sin(x)
– π/2
x
–2
π/2
2
arcsin(x)
– π/2
–2
www.analyzemath.com

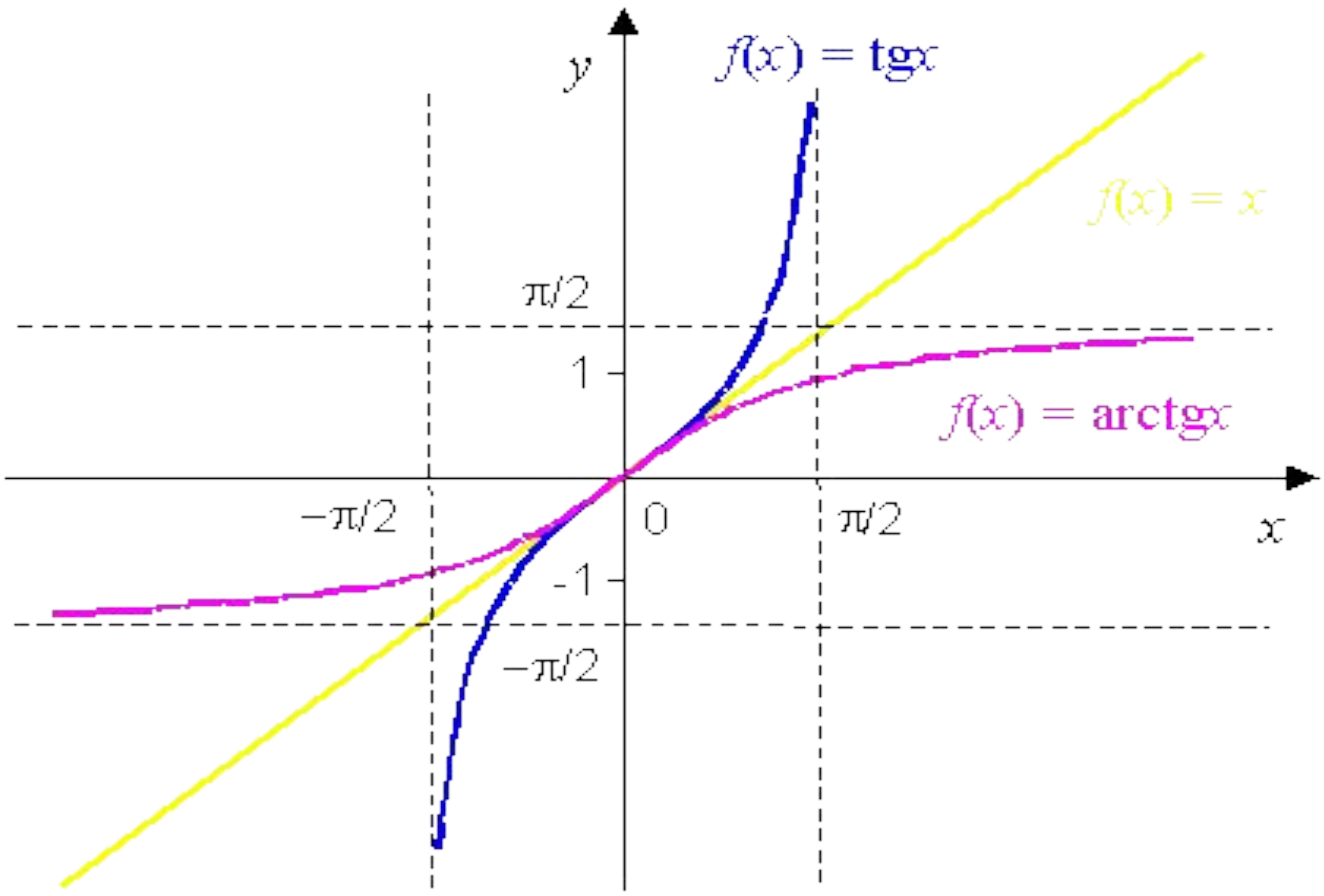
Функция y=arccos x и ее график



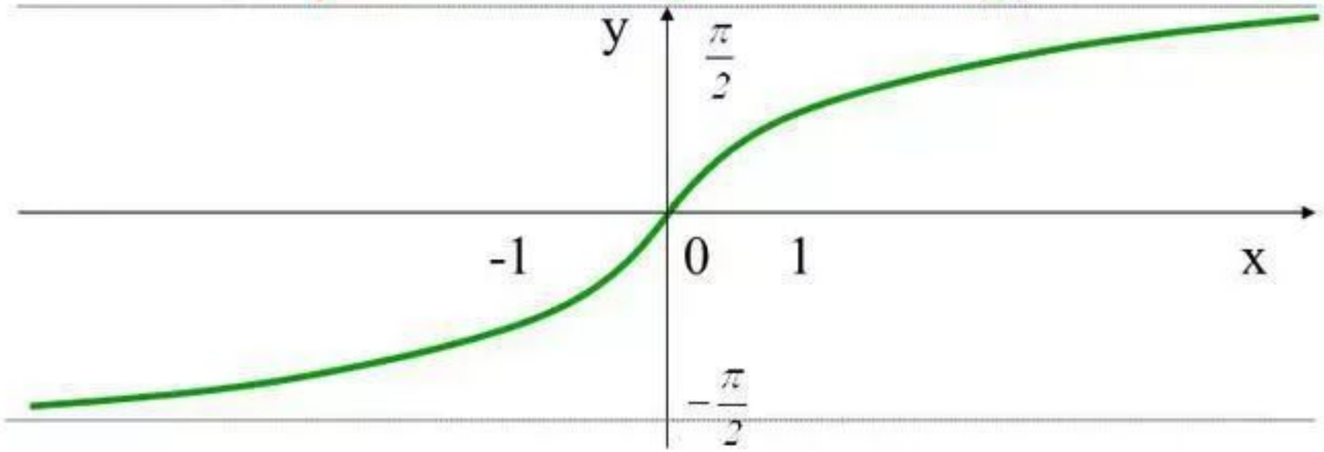


arccos(x)
π
3/4 π
1/2 π
1/4 π
−1
−0.5
0.5
1
x

•Y=f(x)

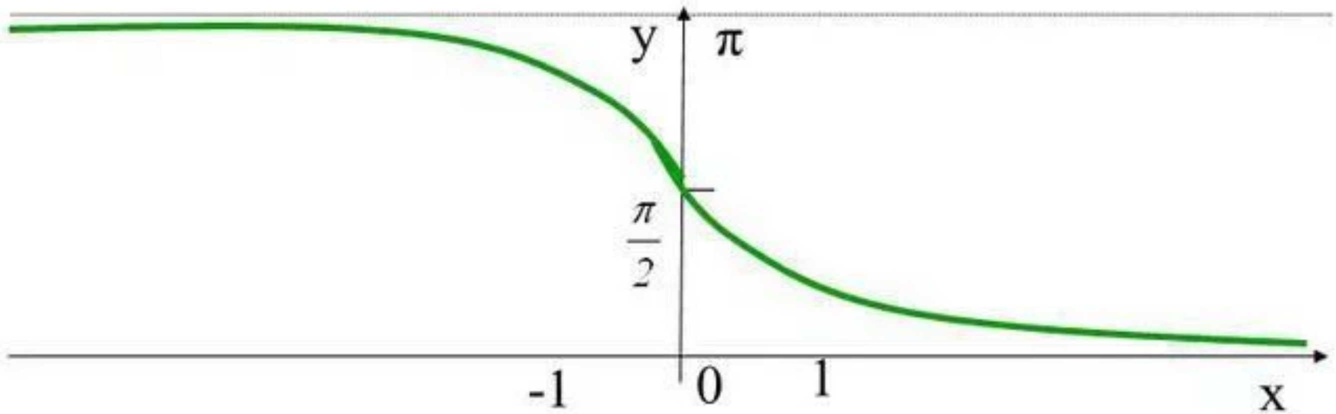


Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$



- Область определения – множество всех действительных чисел.
- Множество значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
- Функция – возрастающая.
- Функция является нечетной, она симметрична относительно начала координат.

Функция $y = \text{arcctg}\, x$



- Область определения – множество всех действительных чисел.
- Множество значений – интервал (0; π).
- Функция –убывающая.
- Функция не является ни четной, ни нечетной.

Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Пример:

$$y = \frac{\lg x + 4 \cdot (\cos x)^2 - 5}{10^x - x}$$

•Y=f(x)

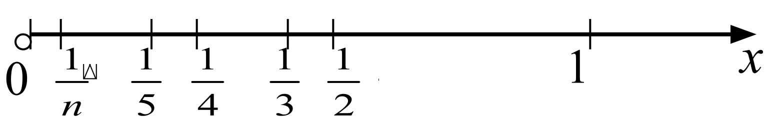
Предел переменной величины

- **1. Последовательность**

$$x_n \to a \quad (\lim x_n = a)$$

Пример.

$$\frac{1}{n} \to 0$$



•Y=f(x)

Определение.
Число *a* *называется* ***пределом последовательности*** x_n*, если для любого положительного* ε *существует такое целое положительное* N*, зависящее от* ε*, что при всех целых значениях* n *больших, чем* N*, выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lim x_n = a \;\Leftrightarrow\; & \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(\varepsilon) > 0 : \\ & \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \end{aligned}}$$

По определению (если)

Логические символы

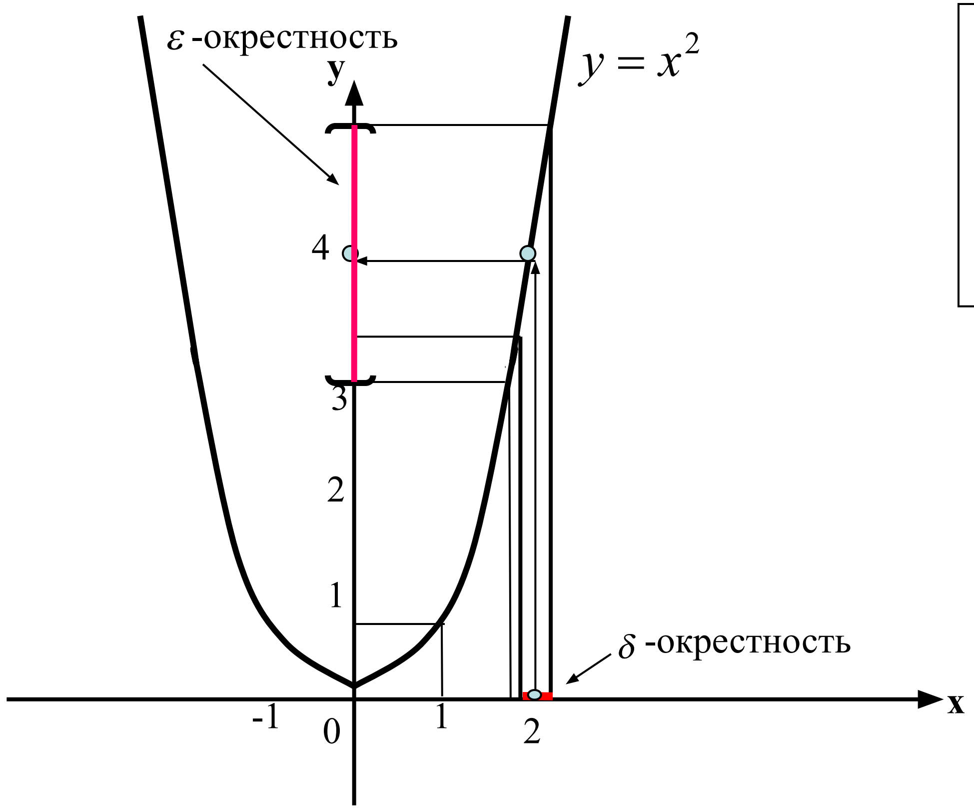
$\forall$	Любой, для любого, Для всех
$\exists$	Существует, найдется
$\Rightarrow$	Следует, (логическое следствие)
$\Leftrightarrow$	Равносильно, эквивалентно (логическая равносильность)

•Y=f(x)

Предел функции.

- ***Пример.***

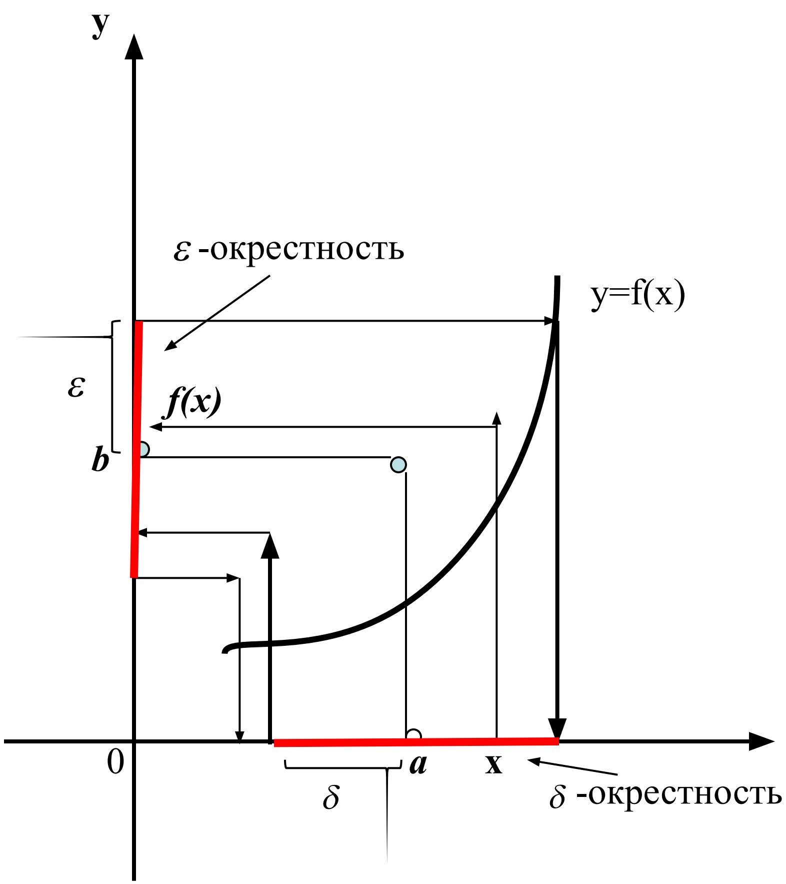
$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$



Для произвольной ε -окрестности точки 4 оси OY существует δ -окрестность точки 2 на оси OX такая, что при всех значениях x из δ -окрестности значения $y = x^2$ будут принадлежать ε-окрестности

•Y=f(x)

Предел функции.



- **Определение.**
- **Число *b*** *называется* ***пределом функции f(x) при*** $x \to a$, *если для любого положительного* ε *существует такое положительное* δ, *зависящее от* ε, *что для всех x таких, что* $0 < |x-a| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$\forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

- **Число *b*** *называется* ***пределом функции f(x) при*** $x \to a$, *если*
- *для любой* ε*-окрестности точки b*
- *существует такая* δ *-окрестность точки a,*
- *что для всех x из* δ *-окрестности*
- *значения* y=f(x) *будут принадлежать* ε *-окрестности.*

Предел функции.

- **Частный случай предела.**

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

- **Определение.**

- **Функция f(x)** называется **бесконечно малой при** $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

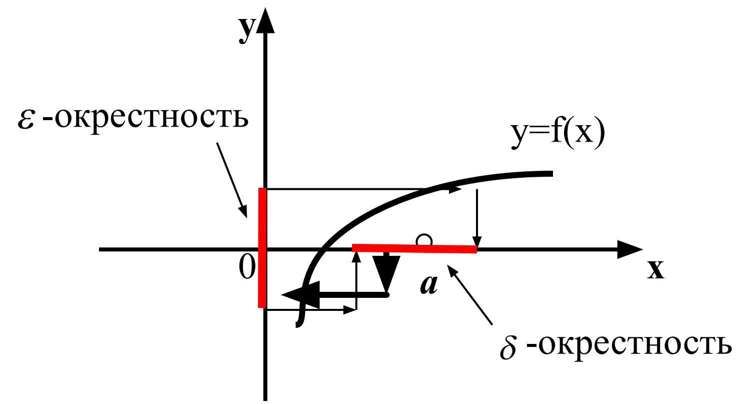
$$\Updownarrow$$

Функция f(x) называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Геометрическая интерпретация.



Предел функции

- **Предел функции при** $x \to +\infty$
- **Определение.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x: x > M \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon$$

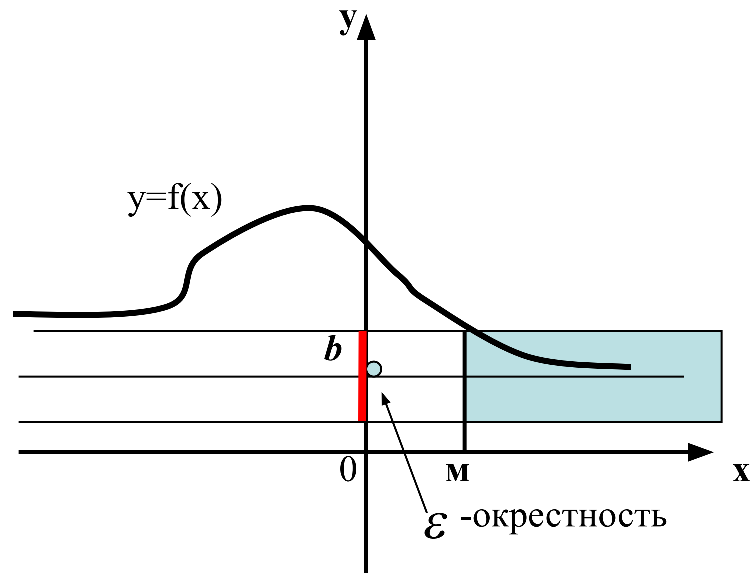
•**Число *b*** *называется* ***пределом функции f(x) при*** $x \to +\infty$ ***,*** *если для любого положительного* ε *существует такое положительное M , зависящее от* ε *, что для всех x таких, что* $x > M$ *, выполняется неравенство*

$$\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$$

- **Предел функции при** $x \to -\infty$

Д,з. Дайте определение и геометрическую интерпретацию предела при $x \to -\infty$

Геометрическая интерпретация.



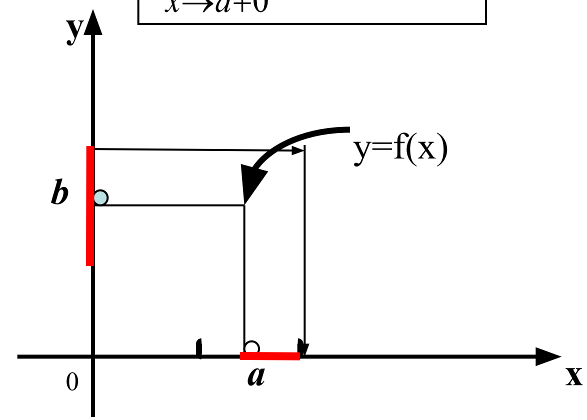
Предел функции

- **Односторонние пределы.**
  - **1. Правосторонний предел в точке.**
    - **Определение.**

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b$$

Число *b* *называется* ***правосторонним пределом функции f(x) в точке a,*** *если для любого положительного* ε *существует такое положительное* δ*, зависящее от* ε *что для всех x таких, что* $0 < x-a < \delta$*, выполняется неравенство*

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$



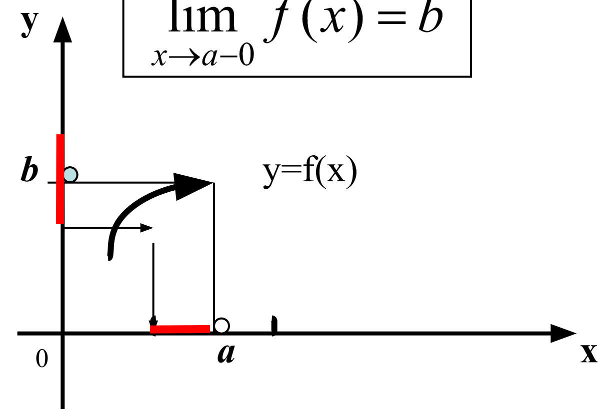
2. Левосторонний предел в точке.

Определение.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b$$

- **Число *b*** *называется* ***левосторонним пределом функции f(x) в точке a,*** *если для любого положительного* ε *существует такое положительное* δ *, зависящее от* ε *, что для всех x таких, что* $0 < a-x < \delta$ *, выполняется неравенство*

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$



- **Утверждение.**
- **1.** *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,
- *то существуют односторонние пределы*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \quad и \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = b$$

- *(они равны между собой)*.
- **2.** *Если существуют оба односторонних предела*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \quad и \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = b$$

- *(равные между собой),*
- *то существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

- **Другие обозначения односторонних пределов:**
- *Правосторонний предел –* $f(a+0)$
- *Левосторонний предел –* $f(a-0)$

Геометрическая иллюстрация.