

# Лекция 7

- **Бесциркуляционное течение около цилиндра**
- **Скорость на поверхности цилиндра**
- **Давление на поверхности цилиндра**
- **Парадокс Даламбера**

# Бесциркуляционное течение около цилиндра ( $\Gamma = 0$ )

$$w(z) = V_{\infty}z + \frac{m}{z} = V_{\infty}(x + iy) + \frac{m \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = V_{\infty}(x + iy) + \frac{m \cdot (x - iy)}{z \cdot (x - iy)} = V_{\infty}x + iV_{\infty}y + \frac{mx - imy}{x^2 + y^2} = (7.1)$$

$$= \left( V_{\infty}x + \frac{mx}{x^2 + y^2} \right) + i \left( V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\psi = V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} \quad (7.2)$$

$$\psi = \text{const} \quad (7.3)$$

$$V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (7.4)$$

$$C=0$$

Нулевая линия тока это линия тока,  
на которой функция тока равна нулю  $\psi_0=0$

$$V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} = 0 \quad (7.5)$$

# Бесциркуляционное обтекание цилиндра

$$V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} = 0 \quad (7.6)$$

$$y = 0 \quad V_{\infty} - \frac{m}{x^2 + y^2} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{m}{x^2 + y^2} = V_{\infty} \quad (7.8)$$



$$\frac{m}{V_{\infty}} = x^2 + y^2 \quad (7.9)$$

$$r^2 = \frac{m}{V_{\infty}} \quad (7.10)$$



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (7.11)$$

# Бесциркуляционное течение около цилиндра

$$m = V_{\infty} r^2 \quad (7.12)$$

$$V_{\infty} y - \frac{V_{\infty} r^2 y}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (7.13)$$

## Комплексный потенциал обтекания цилиндра

$$W_{\text{ц}} = V_{\infty} \left( z + \frac{r^2}{z} \right) \quad (7.14)$$

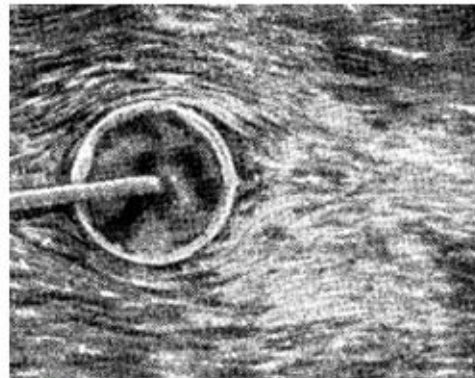


Рисунок 7.1 – Визуализация течение около цилиндра

<http://boat-portal.ru/sites/default/files/user/Image/177/2.jpg>

# Бесциркуляционное обтекание цилиндра

$$a \equiv r, V_{x\infty} \equiv u_\infty, m = 2\pi a^2 u_\infty \quad (7.15)$$

$$w(z) = u_\infty z + \frac{2\pi a^2 u_\infty}{2\pi} \frac{1}{z} = u_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (7.16)$$

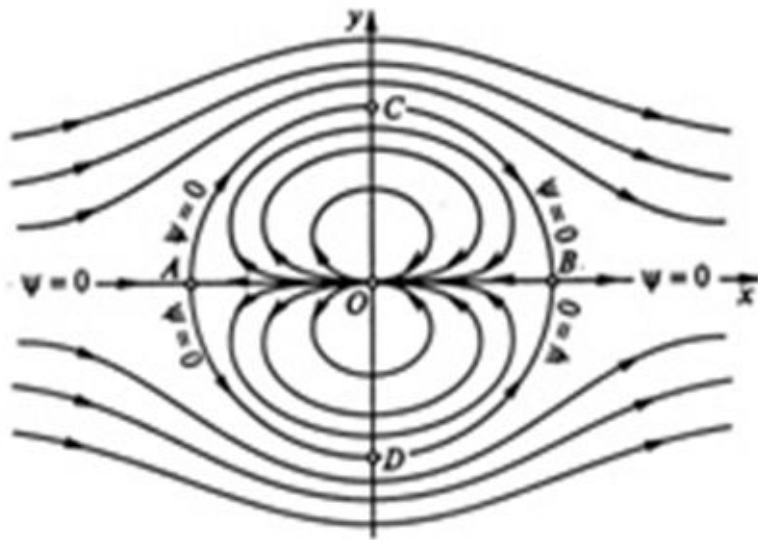


Рисунок 7.2 – Линии тока обтекания цилиндра

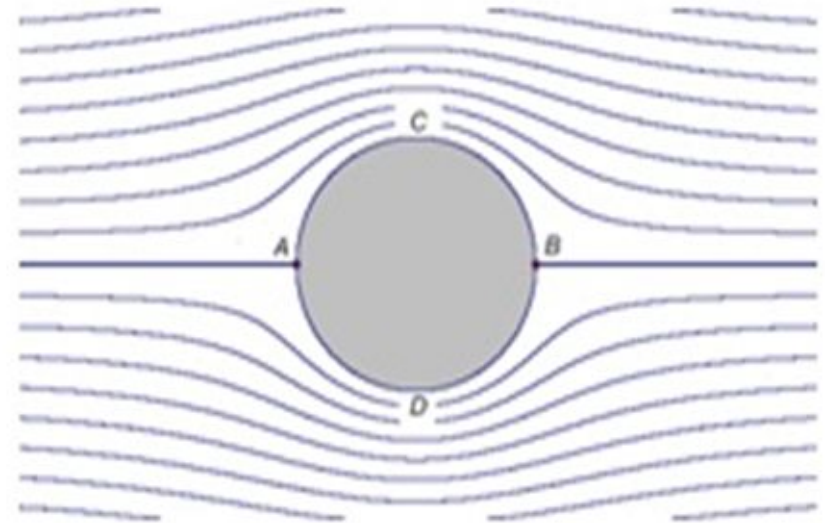


Рисунок 7.3 – Линии тока обтекания цилиндра (компьютерная реализация)

# Скорость на поверхности цилиндра

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz} = u_{\infty} \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right). \quad (7.17)$$

Комплексная координата на поверхности цилиндра

$$z = a e^{i\varepsilon} \quad (7.18)$$

$$\bar{V} = u_{\infty} (1 - e^{-2i\varepsilon}) = 2iu_{\infty} \frac{e^{i\varepsilon} - e^{-i\varepsilon}}{2i} e^{-i\varepsilon} = 2ie^{-i\varepsilon} u_{\infty} \sin \varepsilon, \quad (7.19)$$

$$|V| = 2u_{\infty} |\sin \varepsilon|.$$

$$|V_{\max}| = 2u_{\infty}. \quad (7.20)$$

Уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = p_{\infty} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2}$$

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2} = 1 - \frac{|V|^2}{u_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \varepsilon. \quad (7.21)$$

# Давление на поверхности цилиндра

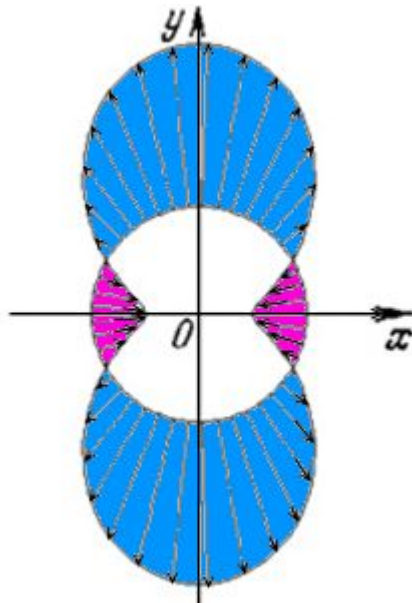


Рисунок 7.4 – Диаграмма распределения давления

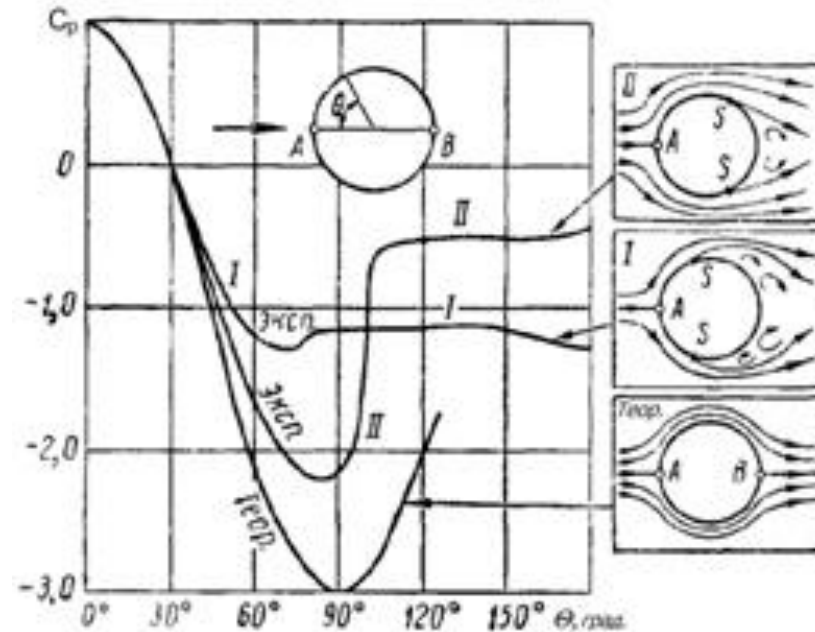


Рисунок 7.5 – Распределение давления по поверхности цилиндра

**Отсутствие аэродинамической силы это парадокс Даламбера**

# Скорость на поверхности цилиндра

$$w(z) = u_{\infty} \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (7.21)$$

Вычислим сопряжённую скорость на поверхности цилиндра

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz} = u_{\infty} \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i z} = 2u_{\infty} \sin \varepsilon (ie^{-i\varepsilon}) + \frac{\Gamma}{2\pi a} ie^{-i\varepsilon} = u_{\infty} \left( 2 \sin \varepsilon + \frac{\Gamma}{2\pi a u_{\infty}} \right) ie^{-i\varepsilon}, \quad (7.22)$$

$$|V| = u_{\infty} \left| 2 \sin \varepsilon + \frac{\Gamma}{2\pi a u_{\infty}} \right| \quad (7.23)$$

Критические точки

$$\bar{V} = u_{\infty} \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i z} = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{\Gamma}{2\pi u_{\infty} i} z - a^2 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi u_{\infty} i} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 u_{\infty}^2}}$$



# Случаи циркуляционного обтекания цилиндра

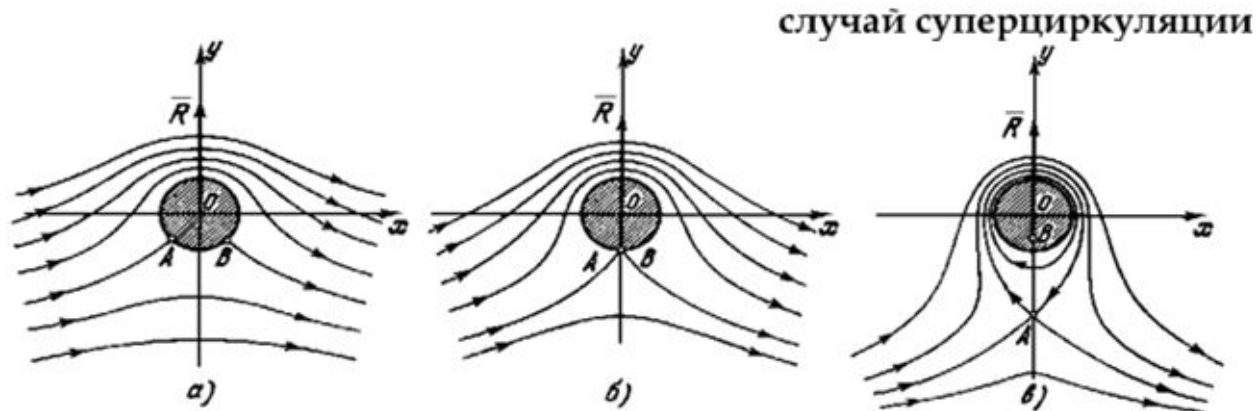


Рисунок 10.1 - Случаи обтекания цилиндра с циркуляцией

а) циркуляция мала  $\Gamma < 4\pi a u_\infty$

$$\left| 2 \sin \varepsilon + \frac{\Gamma}{2\pi a u_\infty} \right| = 0 \Rightarrow \sin \varepsilon_* = -\frac{\Gamma}{4\pi a u_\infty}$$

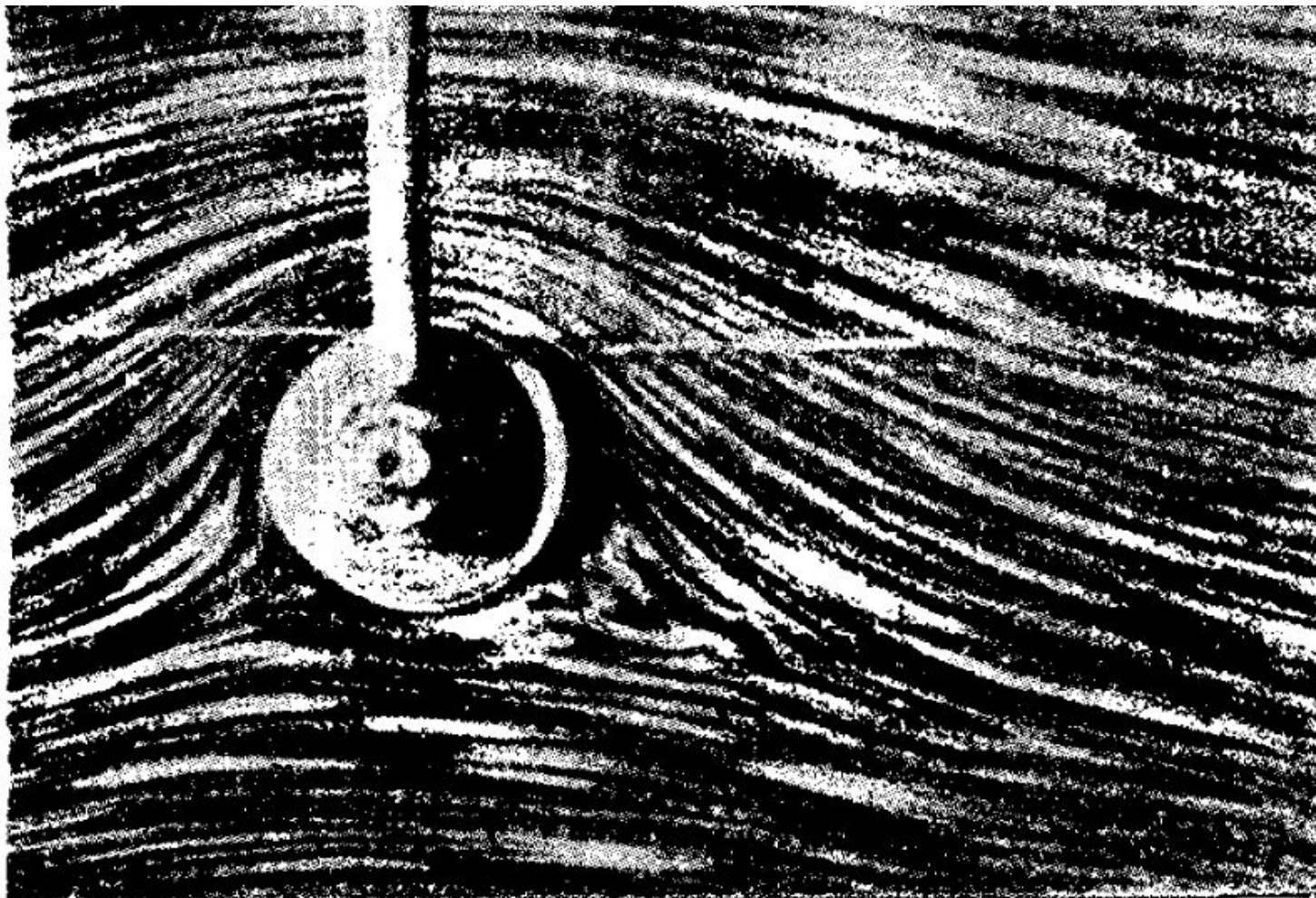
б) Случай:  $\Gamma = 4\pi a u_\infty$   $\sin \varepsilon_* = -1 \Rightarrow \varepsilon_* = -\pi/2$

в) циркуляция велика  
(случай суперциркуляции)

$$\Gamma > 4\pi a u_\infty \quad \sin \varepsilon_* < -1$$

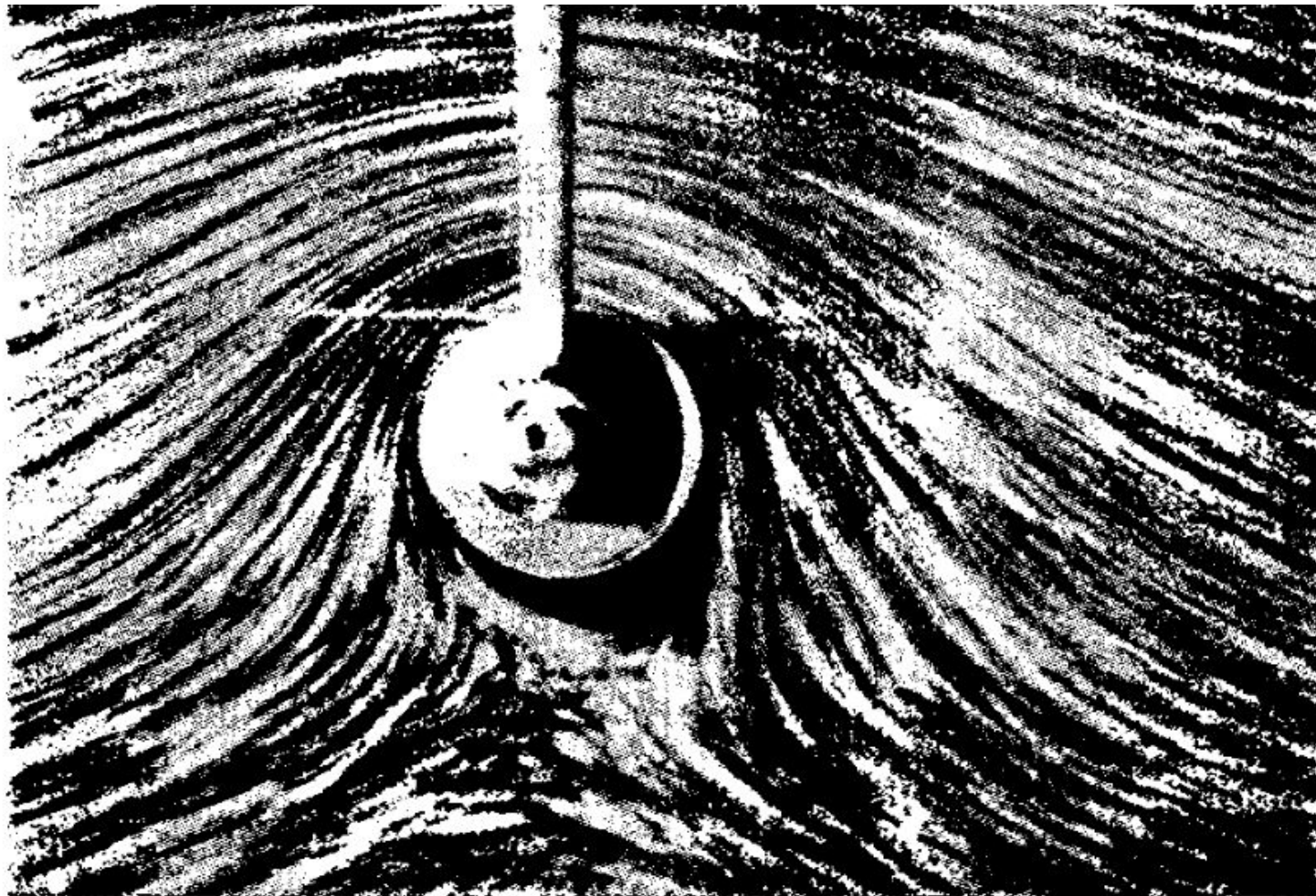
Фиг. 14.

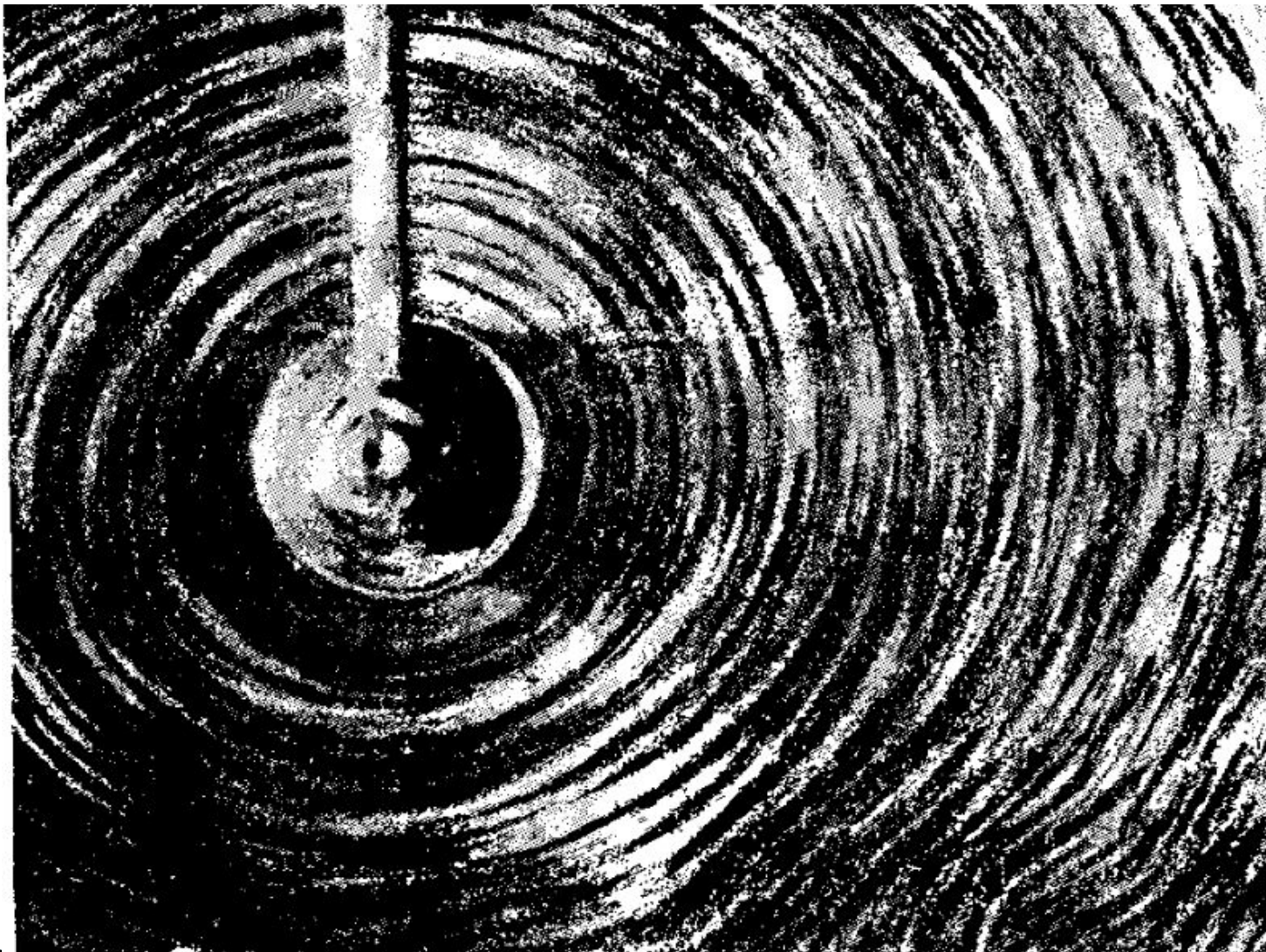
$$\frac{u}{v} = 3.$$



Фиг. 15.

$$\frac{u}{\nu} = 4.$$





Фиг. 17.

$$\frac{u}{v} = \infty.$$

# Давление на поверхности цилиндра

Коэффициент давления на контуре цилиндра. Из формул (9.21) и (10.3) следует

$$c_p = 1 - \left| \frac{V_i}{V_\infty} \right|^2 = 1 - \left( 2 \sin \varepsilon + \frac{\Gamma}{2\pi a u_\infty} \right)^2 \quad (7.22)$$

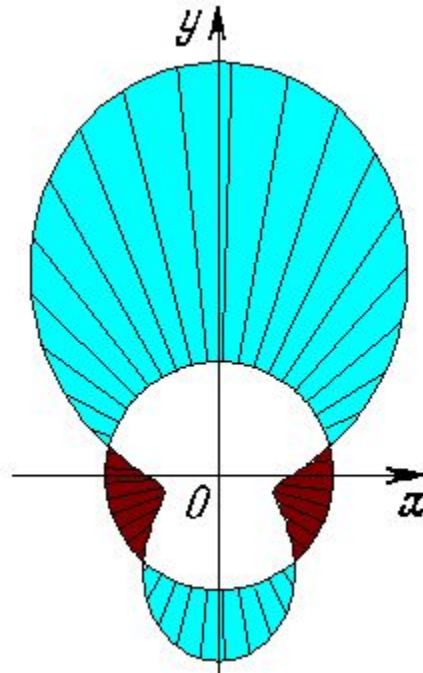


Рисунок 7. 10 – Распределение давления на поверхности цилиндра в случае наличия циркуляции

# Формула Н.Е. Жуковского о подъёмной силе

$$ds = a d\varepsilon \quad Y_a = -\oint p n_y ds = -a \int_0^{2\pi} p \sin \varepsilon d\varepsilon \quad (7.23)$$

По уравнению Бернулли для невесомой жидкости

$$p + \frac{\rho |V|^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho_\infty |V_\infty|^2}{2}$$

$$\begin{aligned} Y_a &= -a \int_0^{2\pi} \left( p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2} \right) \sin \varepsilon d\varepsilon = -a \int_0^{2\pi} \left[ p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho}{2} \left( 2u_\infty \sin \varepsilon + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right] \sin \varepsilon d\varepsilon = \\ &= -a \left\{ \left[ p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} \sin \varepsilon d\varepsilon - \frac{\rho u_\infty \Gamma}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varepsilon d\varepsilon - 2\rho u_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \varepsilon d\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varepsilon d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \sin^3 \varepsilon d\varepsilon = 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varepsilon d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varepsilon}{2} d\varepsilon = \pi$$

$$Y_a = -\rho \cdot u_\infty \cdot \Gamma$$

(7.24)

# Постулат Жуковского-Чаплыгина-Кутта

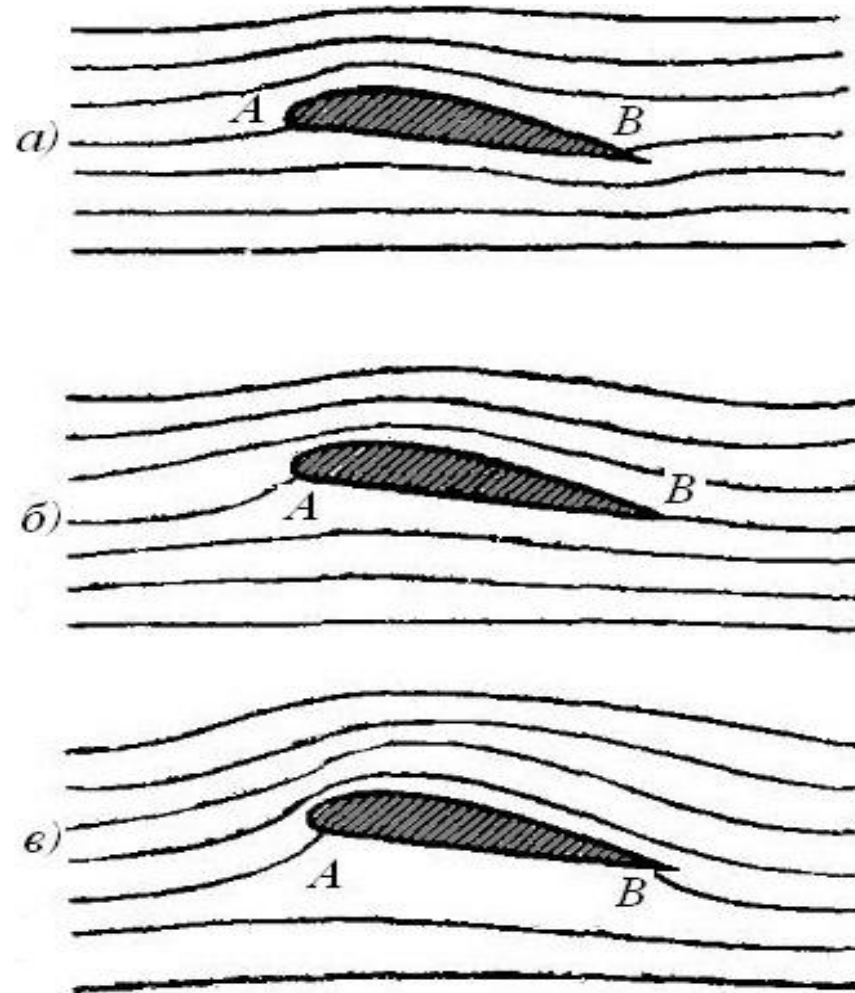


Рисунок 7.11 - Три возможных типа обтекания профиля

# Выполнение гипотезы Жуковского-Чаплыгина-Кутта

