Нелинейные уравнения и системы нелинейных алгебраических уравнений

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Постановка задачи

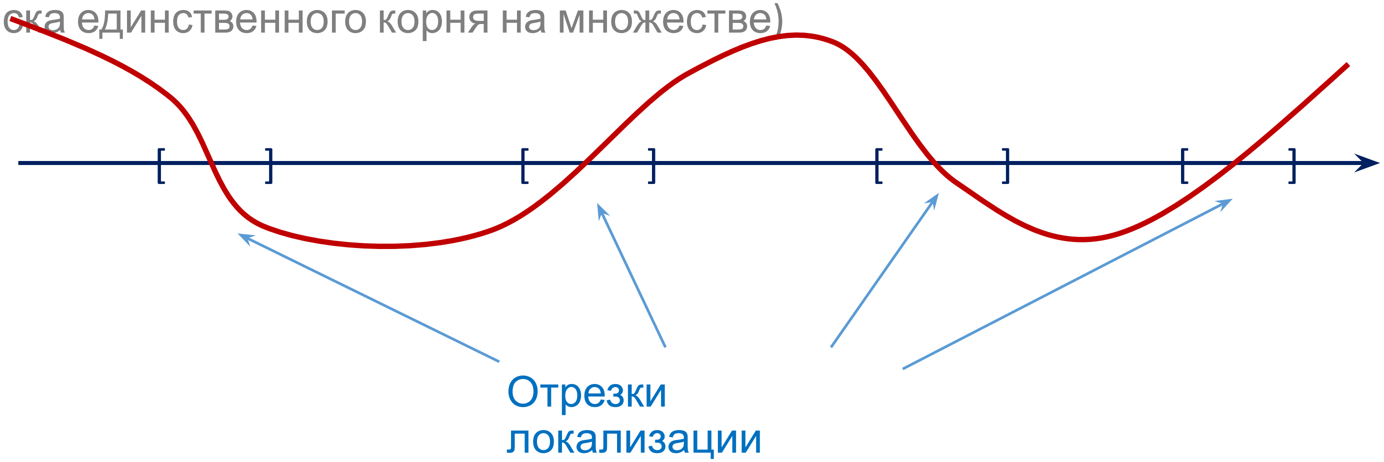
Рассматривается задача поиска корней уравнения для функции одного переменного

$$f(x) = 0$$

Комментарий: подавляющее большинство нелинейных уравнений не решается аналитически или же решается только в каких-либо упрощенных приближениях. Для более общего случая требуется численное решение.

Решение нелинейного уравнения численно всегда проходит в 2 этапа:

1. Локализация корней – нахождение непересекающихся отрезков, содержащих только один корень
   (требование обусловлено тем, что методы, о которых пойдет речь в дальнейшем подходят для поиска единственного корня на множестве)



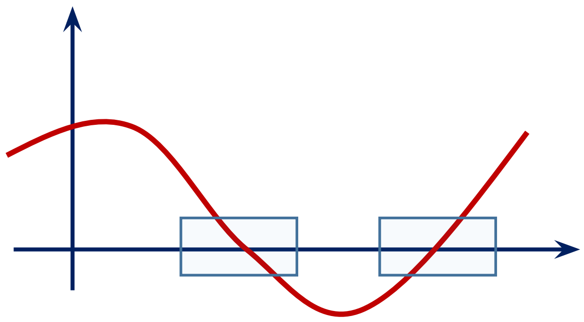
2. Нахождение искомого корня на каждом отрезке локализации с требуемой точностью

Методы локализации корней

Наиболее распространены следующие методы локализации

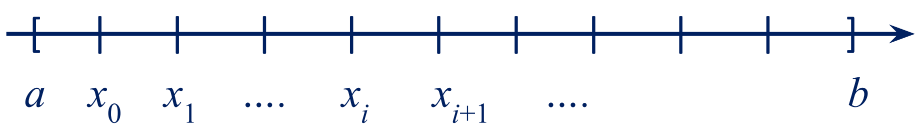
Геометрическая локализация

1. Строим график функции
2. Смотрим где приблизительно находится корень и отмечаем этот отрезок



Программная локализация

1. Известно, что корни расположены на отрезке $[a, b]$
2. Для этого отрезка выбирается мелкое разбиение

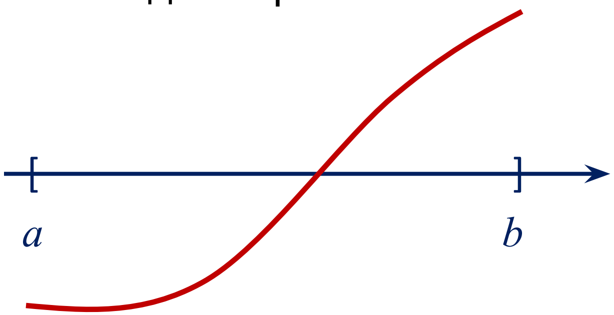


3. Для каждого отрезка проверяется условие $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$
4. Если оно выполняется, то значит, что на отрезке находится нечетное число корней (по умолчанию считаем, что один)

Примечание: как правило, каждый метод локализации нужно адаптировать под задачу или под группу задач

Деление отрезка пополам

Считаем, что задача локализации корней решена и на рассматриваемом отрезке содержится только один корень



$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Примечание: метод так же носи
название «Метод дихотомии» ил
«Метод бинарного поиска»

<u>Задача</u>: найти корень с точностью ε

Алгоритм

1. Выбираем точку $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$
2. Проверяем 2 условия $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ и $f(c_1) \cdot f(b) < 0$
3. Пусть для определенности $f(a) \cdot f(c_1) < 0$. Тогда далее рассматривается отрезок $[a, c_1]$

   и выбирается точка $c_2 = \dfrac{a+c_1}{2}$

Условие завершения

$$l_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Длина отрезка после n шагов

$$l_n \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{|\ln 2|}$$

Количество итераций, требуемое для достижения заданной точности

Метод простых итераций для нелинейного уравнения

Исходное уравнение $f(x) = 0$ заменяется на $x = \phi(x)$

Обычно это можно сделать просто выразив x из уравнения, например

$f(x) = 0$	$x = \phi(x)$
$x + \sin x = 0$	$x = \arcsin(-x)$ или $x = -\sin x$
$e^x x + \operatorname{tg} x = 0$	$x = \operatorname{tg} x / e^x$ или $x = \operatorname{arctg}(x e^x)$ или $x = \ln(\operatorname{tg} x / x)$

Метод простых итераций (МПИ)

$$x^{n+1} = \phi(x^n)$$

Однако, не любая замена с последующей организацией итераций приводит к решению

Сходимость метода простых итераций

Пусть x^* - точное решение, тогда

$$f(x^*) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \phi(x^*)$$

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \phi(x^*) \\ x^{n+1} &= \phi(x^n) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad x^{n+1} - x^* = \phi(x^*) - \phi(x^n) = \phi'(\xi)(x^* - x^n)$$

Теорема Лагранжа

$x^{n+1} - x^* = \varepsilon^{n+1}$ – ошибка, получаемая на $n+1$ –й итерации

Тогда эволюция ошибки:

$$\varepsilon^{n+1} = \phi'(\xi) \cdot \varepsilon^n = (\phi'(\xi))^2 \cdot \varepsilon^{n-1} = \ldots = (\phi'(\xi))^{n+1} \cdot \varepsilon^0$$

Начальное приближение в любом случае выбирается с некоей ошибкой (сразу попасть в решение мы не можем).

Для того, чтобы эта ошибка убывала на итерациях необходимо, чтобы

$$|\phi'(\xi)| \leq q < 1$$

q – скорость сходимости (максимальное по модулю значение производной)

Оценка числа итераций

Невязка, при начальном приближении: $r^0 = f(x^0)$

$$r^0 - 0 = f(x^0) - f(x^*) = f'(x^0)(x^0 - x^*) + O((x^0 - x^*)^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon^0 \approx r^0/f'(x^0) = f(x^0)/f'(x^0)$$

Условие прекращения итераций: $\varepsilon^{n+1} < \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon_0 q^n < \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{n \geq \left| \frac{\ln\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\right)}{\ln q} \right|}$

Заданная точность

Необходимое число итераций для достижения заданной точности

Для прекращения итераций так же часто используют условие $f(x^{n+1}) < \boldsymbol{\varepsilon}$

Метод релаксации

Вид метода простой итерации при специальном выборе функции $\phi(x)$.

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f(x^n)$$

Численная производная по времени

Итерационный параметр

В этом случае $\phi(x) = \tau f(x^n) + x^n$

МПИ сходится когда $\max|\phi'(x)| < 1$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x \in U(x^*)} |1 + \tau f'(x)| < 1$

Оптимальное значение итерационного параметра

Пусть $\varepsilon^n = x^n - x^*$ - погрешность на n-й итерации, тогда

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f(x^n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{n+1} - x^* - (x^n - x^*)}{\tau} = f(x^* + \varepsilon^n)$$

Тогда уравнение для ошибки

$$\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} = f(x^* + \varepsilon^n) - \underbrace{f(x^*)}_{= 0} = f'(\xi)\varepsilon^n$$

Метод релаксации

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n(1 + \tau f'(\xi))$$

Оценим при каких значениях итерационного параметра ошибка минимальна

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| \max_{\xi}|1 + \tau f'(\xi)| \le |\varepsilon^0| \left(\max_{\xi}|1 + \tau f'(\xi)|\right)^{k+1}$$

Пусть $\quad 0 \le m \le |f'(\xi)| \le M \quad$ тогда $\quad \max_{\xi}|1 + \tau f'(\xi)| \le \max(|1 - \tau m|, |1 - \tau M|)$

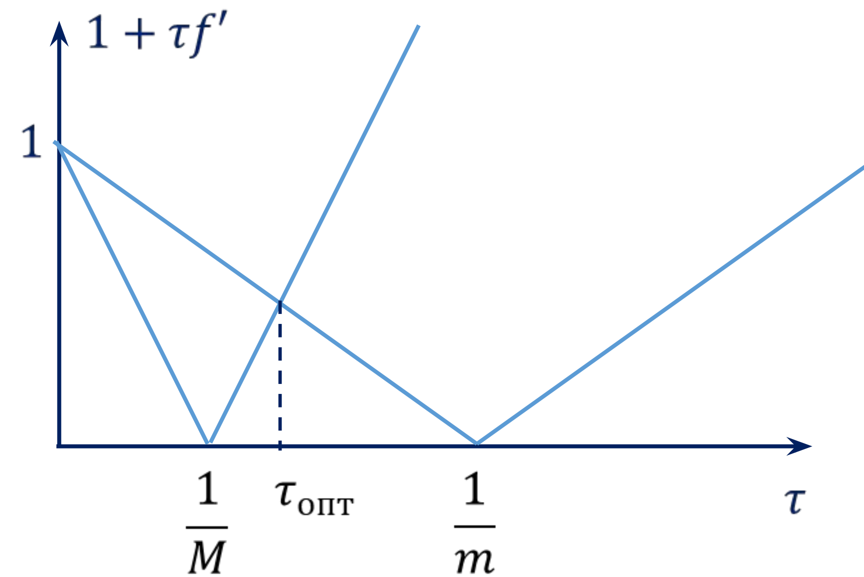
Нужно требовать одновременное ограничение максимума модуля с двух сторон.

Оно достигается в точке пересечения прямых

$$1 - \tau m = -(1 - \tau M)$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{m + M}$$

Оптимальное значение итерационного параметра при котором ошибка минимальна



$$|\varepsilon_{\min}^{n+1}| \le \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^{n+1} |\varepsilon^0|$$

Метод Ньютона для поиска решения

Ищем решение уравнения $f(x) = 0$, предполагаем, что на $n+1$ - й итерации решение было найдено

$$f(x^{n+1}) = 0 = f(x^n) + f'(x^n)(x^{n+1} - x^n) + O\big((x^{n+1} - x^n)^2\big)$$

Пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости и получаем:

$$\boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}}$$

Метод Ньютона

Метод Ньютона – частный случай МПИ. Условие сходимости с такой правой частью

$$\max_{x \in U(x^*)} |\varphi'(x)| = \max_{x \in U(x^*)} \left|1 - \frac{f'^2 - f f''}{f'^2}\right| = \max_{x \in U(x^*)} \left|\frac{f f''}{f'^2}\right| < 1$$

Если вторая производная функции ограничена в некоторой окрестности решения $f'' < C_2$, а первая производная ограничена снизу $f' > C_1$ в этой же окрестности, то метод Ньютона сходится.

Метод Ньютона

Теорема (о квадратичной сходимости метода Ньютона):

Пусть существуют две ограниченные производные функции $f(x)$ и кроме того пусть существует $(f'(x))^{-1}$, причем в некоторой окрестности корня $U(x^*) = \{x: |x - x^*| \leq r\}$ имеют место оценки

$$\inf|f'(x)| = c_1 > 0$$

$$\sup|f''(x)| = c_2 > 0$$

и кроме того, если $|x^0 - x^*| < \frac{2c_1}{c_2}, x \in U(x^*)$

то метод Ньютона сходится квадратично, при этом

$$|x^n - x^*| < q^{2^n - 1}|x^0 - x^*|, x \in U(x^*), \qquad \text{где } q = \frac{2c_1}{2c_2} < 1$$

Доказательство

:

$$f(x^*) = f(x^n) + f'(x^n)(x^* - x^n) + \frac{(x^* - x^n)^2}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in [x^*, x^n] \text{ или} [x^n, x^*]$$

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} = x^n - \frac{f(x^n) - f(x^*)}{f'(x^n)} = x^n - \frac{f'^{(x^n)}(x^* - x^n) + \frac{1}{2} f''^{(\xi)}(x^* - x^n)^2}{f'(x^n)}$$

Метод Ньютона

$$x^{n+1} = x^* - \frac{\frac{1}{2} f''(\xi)}{f'(x^n)} (x^* - x^n)^2$$

т.
е.

$$\boxed{x^{n+1} - x^* = -\frac{\frac{1}{2} f''(\xi)}{f'(x^n)} (x^* - x^n)^2}$$

Оценим убывание ошибки

$$|x^{n+1} - x^*| \le \frac{c_2}{2c_1} (x^* - x^n)^2 \le \frac{c_2}{2c_1} \left(\frac{c_2}{2c_1} (x^* - x^n)^2 \right)^2 \le \cdots$$

Таким образом

$$\boxed{|x^{n+1} - x^*| \le \left(\frac{c_2}{2c_1} \right)^{2^{n+1}-1} |x^* - x^0|^{2^{n+1}}}$$

Метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью сходимости

Для сходимости метода Ньютона достаточно, чтобы были выполнены 2 условия:

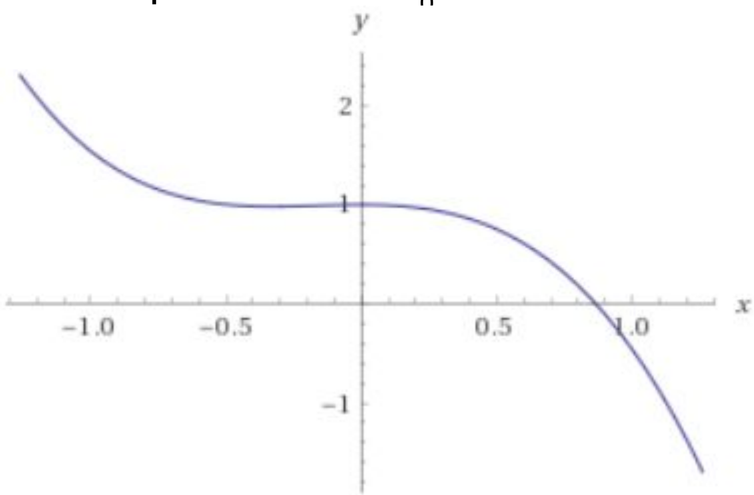
$$q \le \frac{c_2}{2c_1} < 1$$

$$\frac{c_2}{2c_1} |x^* - x^0| \quad < 1$$

Геометрический смысл метода Ньютона

Пример:

Поиск корня у уравнения $\cos x = x^3$
начальное приближение x_0 = 0.5



$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}112\,141\,637\,097,\\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \underline{0},909\,672\,693\,736,\\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \underline{0{,}8}67\,263\,818\,209,\\
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \underline{0{,}865\,47}7\,135\,298,\\
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \underline{0{,}865\,474\,033\,1}11,\\
x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = \underline{0{,}865\,474\,033\,102}.
\end{aligned}
$$

Иллюстрация последовательных приближений

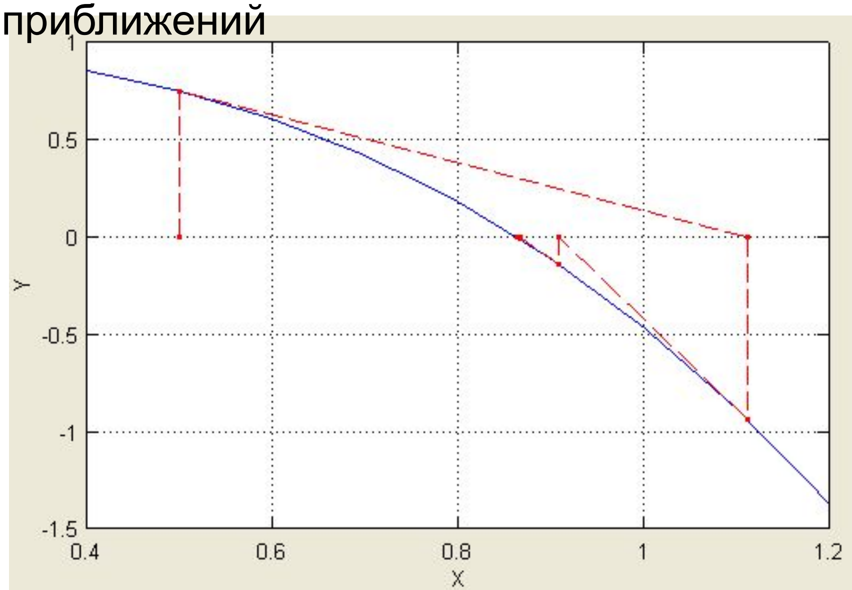
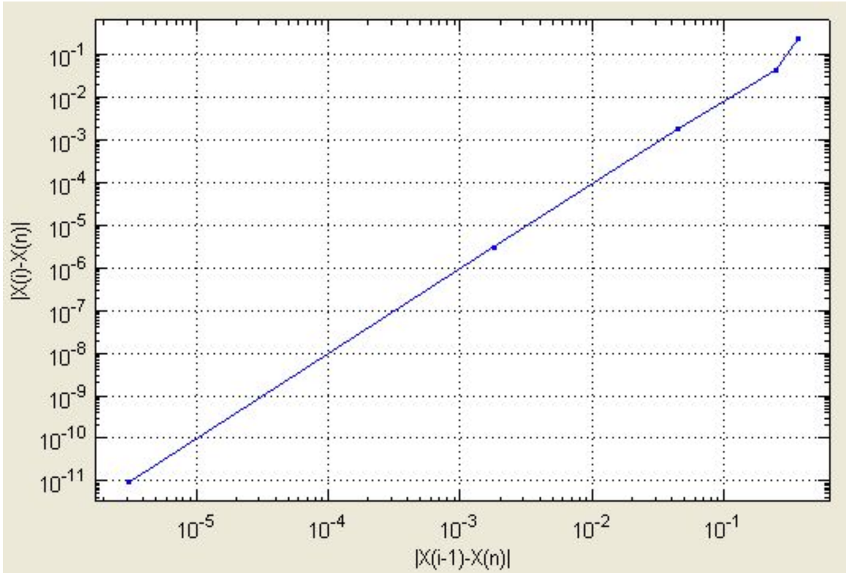


График сходимости



Методы высших порядков

Итерационный процесс третьего порядка

Как и в методе Ньютона предполагаем, что после $n + 1$ шагов найдено решение

$$f(x^{n+1}) = f(x^n) + f'(x^n)(x^{n+1} - x^n) + \frac{f''(x^n)}{2!}\left((x^{n+1} - x^n)^2\right) = 0$$

Разделим всё выражение на $f'(x^n)$ и для краткости обозначим $f(x^n) = f_n$

Получаем

$$x^{n+1} - x^n + \frac{f_n}{f_n'} + \frac{f_n''}{2f_k'}(x^{n+1} - x^n)^2 = 0$$

Последний член является поправочным. Заменим в нем выражение $x^{n+1} - x^n$ на $(-f_n/f'_n)^2$ из метода Ньютона, получаем

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f_n}{f_n'} - \frac{f_n''}{2f_n'}\left(\frac{f_n}{f_n'}\right)^2 = x^n - \frac{f_n}{f_n'} - \frac{f_n'' f_n^2}{2(f_n')^3}$$

Итерационный процесс четвертого порядка

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f_n}{f_n'} - \frac{f_n'' f_n^2}{2(f_n')^3} - \frac{(f_n'')^2 f_n^2}{2(f_n')^5} + \frac{f_n''' f_n^2}{6(f_n')^7}$$

Отметим, что итерационные методы высших порядок используются достаточно редко, вследствии повышенных требований к гладкости функций, необходимости вычисления производных высоких порядков и чувствительности к выбору начального приближения

Решение систем нелинейных уравнений: аксиомы нормы

Нормы векторов

Аксиомы нормы

Норма в векторном пространстве V над полем вещественных или комплексных чисел – это функционал $\|.\|$: $V \to$ □, обладающий следующими свойствами.

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 => \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathrm{C} \quad \forall \mathbf{x} \in V$

В вычислительной математике широко распространены следующие нормы:

- Максимальная или бесконечная норма (иногда используется название норма Чебышева)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Обозначения, принятые в МФТИ

Так же встречающиеся обозначения

- l_1 норма (или «Манхэттнновская норма» или «норма такси»)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$$

- Евклидова норма

$$\|\mathbf{x}\|_3 = \|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Нормы матриц

Норма матрицы должна удовлетворять следующим аксиомам

1. $||\mathbf{A}|| = 0 => \mathbf{A} = 0$
2. $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}|| \quad \forall x, y \in V$
3. $||\alpha\mathbf{A}|| = |\alpha|||\mathbf{A}|| \qquad \forall \alpha \in C \quad \forall x \in V$

Опр.: Матричная норма $||\mathbf{A}||$ называется согласованной с векторной нормой $||\mathbf{x}||$, если выполняется неравенство

$$||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}||, \qquad \text{где } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Опр.: Матричная норма $||\mathbf{A}||$ называется подчиненной векторной норме $||\mathbf{x}||$, если выполняется

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} = \sup_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||$$

Свойства нормы

Опр.: Матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ называется субмультипликативной, если

$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}\|$$

Замечание: если норма $\|\mathbf{A}\|$ подчинена какой-либо векторной норме $\|\mathbf{x}\|$, то она субмультипликативна

$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\mathbf{Bx}\neq 0}\frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sup_{\mathbf{Bx}\neq 0}\frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{Bx}\|}\sup_{\mathbf{Bx}\neq 0}\frac{\|\mathbf{Bx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sup_{\mathbf{y}\neq 0}\frac{\|\mathbf{Ay}\|}{\|\mathbf{y}\|}\sup_{\mathbf{z}\neq 0}\frac{\|\mathbf{Bz}\|}{\|\mathbf{z}\|} =$$

$$=\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$$

Свойства нормы

Если норма $\|\mathbf{A}\|$ подчинена кокой-либо норме $\|\mathbf{x}\|$, то она с ней согласована:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}\|$$

Кроме этого, из-за компактности множества $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ точная верхняя грань достигается на некотором векторе $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, то есть для него справедливо

$$\|\mathbf{Ax}_0\| = \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}_0\|$$

Используемые нормы матриц

Определим выражения для норм матриц

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_i |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1 \cdot \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\boxed{\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \max_i \sum_j |a_{ij}|}$$

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}||x_j| = \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\boxed{\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \left\|\mathbf{A}^\mathbf{T}\right\|_2}$$

Евклидова норма

Воспользуемся связью между евклидовой нормой вектора и скалярным произведением

$$\|\mathbf{x}\|_3^2 = (x, x),$$

А так же свойством, что ортогональные матрицы $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ сохраняют скалярное произведение

$$(\mathbf{Ux}, \mathbf{Ux}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

Осуществим сингулярное разложение матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}} \text{ где } \quad \mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{VV}^{\mathrm{T}} = 1 \qquad \mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Тогда

$$\|\mathbf{A}\|_3^2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sup_{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})}{(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})} \sup_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{\Sigma z}, \mathbf{\Sigma z})}{(\mathbf{z}, \mathbf{z})}$$

Евклидова норма матрицы равна евклидовой норме диагональной матрицы из ее сингулярных чисел $\mathbf{\Sigma}$.

Максимальное значение отношения $\frac{(\mathbf{\Sigma z},\mathbf{\Sigma z})}{(\mathbf{z},\mathbf{z})}$ равно $\sigma_{\max}^2$ и достигается на векторе

$$z_0 = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)^T$$

Где 1 стоит на месте, индекс которого соответствует максимальному собственному значению.

Таким образом:

$$\boxed{\|A\|_3 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}}}}$$

Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, то $\boxed{\|\mathbf{A}\|_3 = |\lambda_{\max}|}$

Решение систем нелинейных уравнений: аксиомы нормы

Метод простых итераций для систем

Для численного решения многомерных систем нелинейных уравнений могут быть использованы только обобщения одномерных методов.

Задача состоит в поиске решения системы нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Аналогично МПИ для одномерного случая представляем систему в виде:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$$

где $u \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство.

Аналогично одномерному случаю строим итерационный процесс

$$\mathbf{u}^{n+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}^n)$$

Опр.: Область $\Omega \in \mathbf{R}^n$ называется выпуклой, если наряду с двумя точками $\mathbf{a} \in \Omega$ и $\mathbf{b} \in \Omega$ она включает все точки отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, т.е. точки с координатами

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \qquad 0 \le t \le 1$$

Опр.: Отображение $V = \varphi(u)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется сжимающим в замкнутой выпуклой области Ω, если $\exists q$: $0 < q < 1$:

$$\rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}^1), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}^2)) \le q\rho(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), \qquad \forall \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in \mathbf{R}$$

Метод простых итераций

- **Теорема**: Если отображение $\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{u})$ в замкнутой выпуклой области Ω является сжимающим, то и уравнение $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$ имеет решение $\mathbf{u}^*$ и

$$\rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^n) \le \frac{q^n a}{1-q}, \qquad a = \rho(u^*, u^0)$$

Доказательство:

$$\rho(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n) = \rho(\varphi(\mathbf{u}^n), \varphi(\mathbf{u}^{n-1})) = q\rho(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}^n)$$

Поэтому

$$\rho(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n) = q^n \rho(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^0) = q^n a$$

При $p > n$ имеем цепочку неравенств

$$\rho(\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^n) \le \rho(\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^{p-1}) + \rho(\mathbf{u}^{p-1}, \mathbf{u}^{p-2}) + \cdots . + \rho(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n) \le$$

$$\le q^{p-1}a + q^{p-2}a + \cdots + q^n a \le q^n a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n a}{1-q}$$

Метод простых итераций

Согласно критерию Коши последовательность $\{\mathbf{u}^n\}$ имеет некоторый предел $\mathbf{u}^*$. Переходя к пределу при $p \to \infty$ получаем

$$\rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^n) \leq \frac{q^n a}{1-q}$$

$$\rho\big(\mathbf{u}^*, \varphi(\mathbf{u}^*)\big) \leq \rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}) + \rho(\varphi(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^{n+1}) = \rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}) + \rho\big(\varphi(\mathbf{u}^*), \varphi(\mathbf{u}^{n+})\big) \leq$$

$$\rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}) + q\rho(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^n) \leq 2\frac{q^{n+1} a}{1-q}$$

Поскольку n произвольно, то

$$\rho(\mathbf{u}^*, \varphi(\mathbf{u}^*)) = 0, \qquad \text{т. е. } \mathbf{u}^* = \varphi(\mathbf{u}^*)$$

Замечание: При $n = 0$ $\qquad \rho(\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^0) \leq \dfrac{a}{1-q}$

Таким образом все приближения принадлежат области

$$\Omega(\mathbf{u}^0, a, q): \rho(\mathbf{u}, \mathbf{u}^0) \leq \frac{a}{1-q}$$

Метод простых итераций

Теорема (достаточное условие сходимости метода простых итераций):

Пусть область $\Omega \in \mathbf{R}^n$ выпуклая $\mathbf{u} \in \Omega$, а компоненты $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{u})$ вектора функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots \boldsymbol{\varphi}_n)$ имеют равномерно непрерывные производные 1-го порядка. Положим, что норма матрицы Якоби

$$J = \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial \mathbf{u}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_n}{\partial \mathbf{u}_1} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_n}{\partial \mathbf{u}_n} \end{pmatrix}$$

не превосходит некоторого числа $0 \le q \le 1$ $\quad \|J\| \le q < 1 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega$

В этом случае отображение $\mathbf{V} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$ является сжимающим в том числе в Ω, т.е.

$$\rho\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}^1), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}^2)\big) \le q\rho(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$$

Доказательство: Пусть выбрано нулевое приближение, а далее

$$\mathbf{u}_k^{s+1} = \boldsymbol{\varphi}_k\,(\mathbf{u}_1^s, \mathbf{u}_2^s, \dots, \mathbf{u}_n^s), \quad 1 \le k \le n$$

Погрешность в k-ой компоненте

$$\mathbf{u}_k^{s+1} - \mathbf{u}_k^* = \boldsymbol{\varphi}_k\,(\mathbf{u}_1^s, \mathbf{u}_2^s, \dots, \mathbf{u}_n^s) - \boldsymbol{\varphi}_k\,(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_n^*) = \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{u}^s) - \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial \boldsymbol{l}}(\xi_k)\right] \cdot$$

$$\cdot\, \rho(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}_k)}{\partial \mathbf{u}_j}(\mathbf{u}_j^s - \mathbf{u}_j^*)$$

$\boldsymbol{l}$ – направление соединения точек $\mathbf{u}^s$ и $\mathbf{u}^*$ ξ_k некоторая точка на этом отрезке многомерного пространства

$$\|\mathbf{u}^{s+1} - \mathbf{u}^*\| \le \|J\| \cdot \|\mathbf{u}^s - \mathbf{u}^*\| \le \dots \le q^{s+1}\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|$$

Метод Ньютона для систем

$$\mathbf{u}^{s+1} = \mathbf{u}^s - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{u}^s)$$

В этом случае матрица Якоби отличается от матрицы метода простых итераций

$$J = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{u}_n} \end{pmatrix}$$

Достаточное условие сходимости имеет сложный вид и проверить его практически никогда не удается. В достаточно малой окрестности корня итерации сходятся, причем сходимость квадратичная, если $\det \mathbf{J} \neq 0$

Поэтому хорошим критерием окончания итераций является условие

$$\|\mathbf{u}^{s+1} - \mathbf{u}^s\| \leq \varepsilon$$

Для $\varepsilon \sim 10^{-5}$ - 10^{-6} это означает 10 верных знаков для $\mathbf{u}$.

Самая трудоемкая операция в методе Ньютона – вычисление обратной матрицы. Поэтому иногда используют упрощенный метод Ньютона:

$$\mathbf{u}^{s+1} = \mathbf{u}^s - \mathbf{J}_0^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{u}^s)$$

Матрица Якоби обращается один раз. Метод приемлем, т.к. начальное приближение выбирается достаточно близко к корню.

Спасибо за внимание!