



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Эпиграф

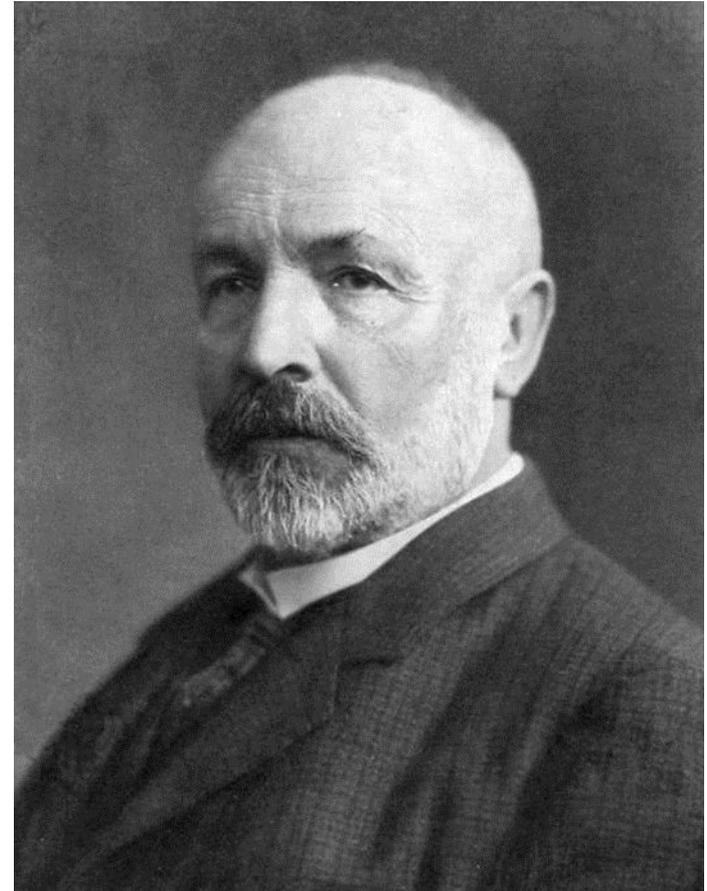
В любых делах при максимуме сложностей
Подход проблеме все-таки один:
Желанье – это множество возможностей,
А нежеланье – множество причин.

Эдуард Асадов

История появления

Теория множеств возникла в результате реализации программы стандартизации математики, разработанной немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918).

Множество есть «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью»



Георг Кантор (1845–1918)

История появления

Первый набросок теории множеств принадлежит Бернарду Больцано («Парадоксы бесконечного», 1850). В этой работе рассматриваются произвольные (числовые) множества, и для их сравнения определено понятие взаимно-однозначного соответствия.

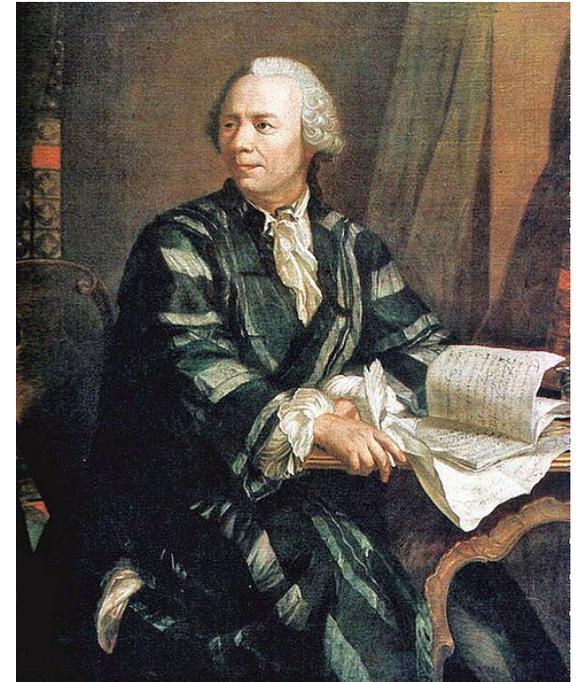
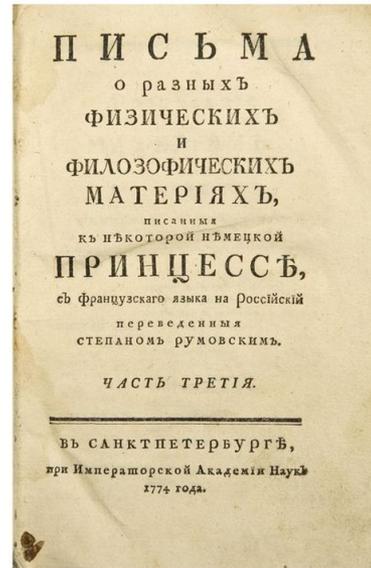


Бернард Больцано (1781–1848)

История появления

В XVIII веке Леонард Эйлер использовал круги в качестве наглядно-графического изображение множества

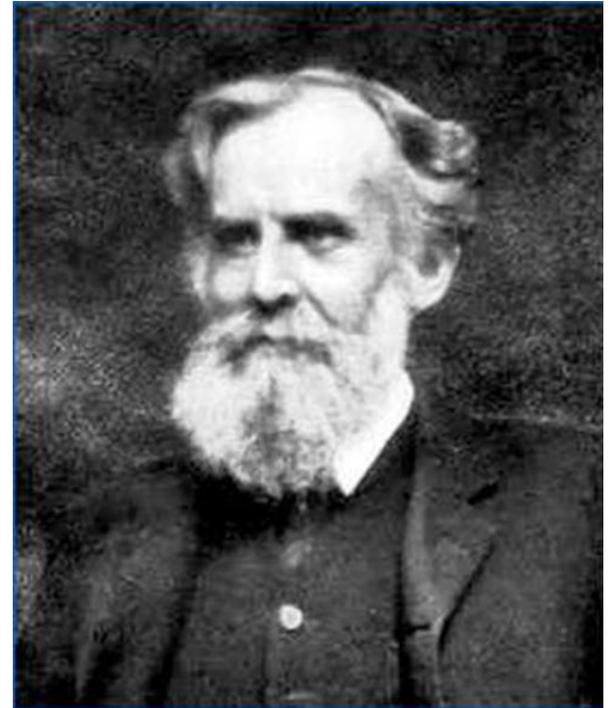
“...Эти круглые фигуры, или, вернее, пространства способны облегчить ход наших рассуждений, а также позволяют нам раскрыть все тайны, которыми похваляется логика. С помощью этих символов всё сразу бросается в глаза...”



Леонард Эйлер (1707–1783)

История появления

В XIX веке сходное изображение множеств использовал английский логик Джон Венн. Он изображал множества прямоугольниками, и использовал эти изображения для доказательства утверждений о множествах



Джон Венн (1834–1923)

Задание

Приведите житейские названия следующих множеств:

- 1) множество марок, принадлежащих одному человеку;
- 2) множество пчел, летящих вместе;
- 3) множество цветных карандашей в коробке;
- 4) множество военных, подчиняющихся одному командиру;
- 5) множество футболистов, собравшихся вместе для игры;
- 6) множество цветов, в руке первоклассницы.

Что во всех этих случаях вы понимаете под множеством?

Понятие множества

«Множество есть многое, мыслимое как единое целое»

Множество - совокупность объектов, определяемых некоторым свойством, присущим каждому из них.

Каждый объект, входящий в множество, называется его элементом, а свойство их объединяющее – характеристическим свойством множества.

Символы и обозначения

A, B, C, D, \dots – множества

a, b, c, d, \dots – элементы множества

При записи множества перечислением его элементов используют символ « $\{ \}$ ».

$$A = \{ a; b; c; d \}$$

\in – символ принадлежности элемента множеству

$$m \in M; a \notin M$$

\emptyset – пустое множество

Мощность множества

Мощностью конечного множества называется количество его элементов.

Обозначение $|A|$.

Способы задания множеств

1) перечисление всех его элементов.

$A = \{\text{студент А.}, \text{рабочий Л.}, \text{школьник М.}\}$

2) указание общего свойства элементов

B - множество четных натуральных чисел.

$B = \{b \mid b = 2k, k \text{ — любое натуральное число}\}.$

3) Символьное обозначение

- N – множество натуральных чисел
- Z – множество целых чисел
- Q – множество рациональных чисел
- R – множество действительных чисел
- I – множество иррациональных чисел

4) Указание концов числового промежутка

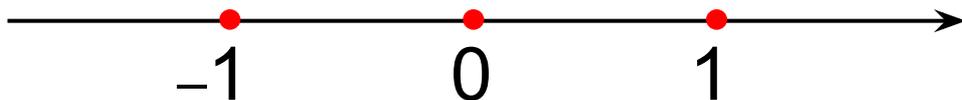
$[2; 8], (0; 6,5)$

Способы задания множеств

- Задайте множество всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 1 \leq 0$:
 - а) перечислением элементов;
 - б) заданием характеристического свойства;
 - в) изображением на координатной прямой.

$$\{-1; 0; 1\}$$

$$\{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 1 \leq 0\} \quad \{x \in Z \mid x^2 - 1 \leq 0\}$$



Задание

■ Измените способ задания множества:

а) A – множество всех цифр

б) $B = \{2; 3; 4; 5\}$

в) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

Задание

Множество натуральных решений уравнения

$$x(x + 1)(x - 12) = 0$$

есть множество

- 1) $\{12\}$
- 2) $\{1; -12\}$
- 3) $\{-1; 0; 12\}$
- 4) $\{0; 12\}$

Отношения между множествами

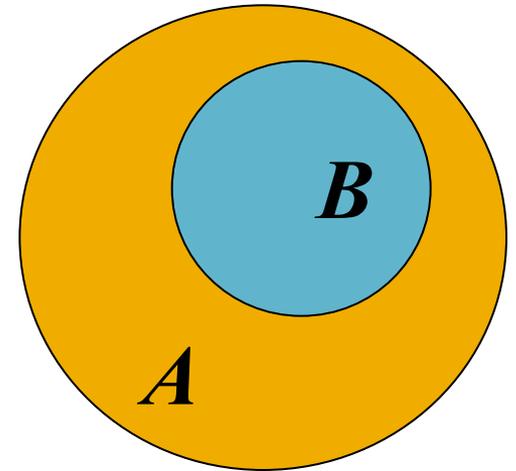
Множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A=B$.

$$\{a, b, c, d\} = \{c, b, a, d\}$$

Отношения между множествами

Множество B называется **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .
Обозначение: $B \subset A$.



Множество, по отношению к которому в данный момент все остальные множества являются подмножествами, называется **универсальным множеством**.
Обозначение: U .

Задание

C – множество юношей студенческой группы,

D – множество отличников этой группы.

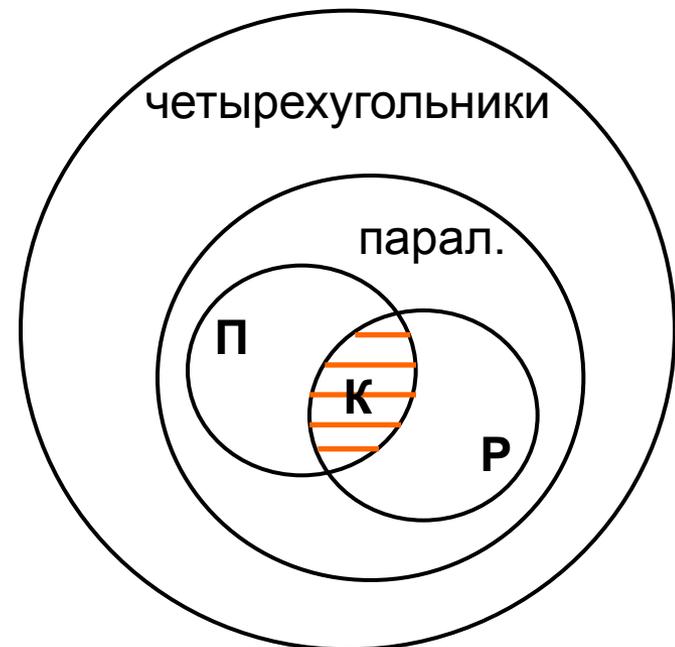
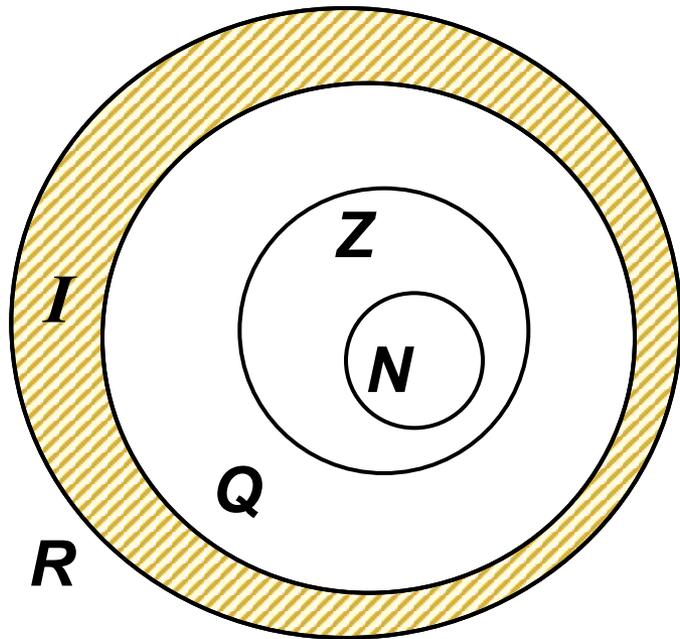
Известно, что $D \subset C$, причем $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$, $C \neq D$.

Тогда справедливы высказывания

- 1) Все отличники группы являются юношами
- 2) В группе есть отличники
- 3) Ни один юноша группы не является отличником
- 4) Все юноши группы являются отличниками

Задание

- Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна отношения следующих множеств:
 - 1) R, Z, N, I и Q ; $N \subset Z \subset Q \subset R$ $I \subset R$
 - 2) четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов.



Задание

Установите соответствие между множествами и верными для них высказываниями.

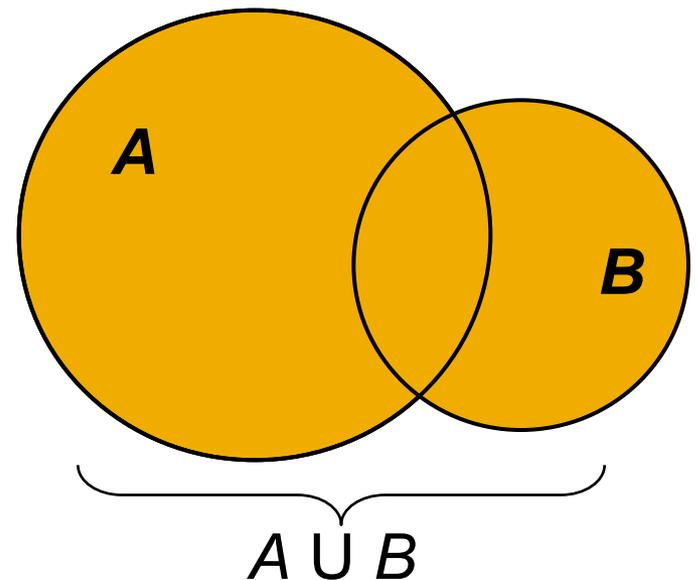
1) A – множество натуральных чисел, кратных 3; B – множество натуральных чисел, не кратных 3	А) A является подмножеством B
2) A – множество натуральных чисел, кратных 6; B – множество натуральных чисел, кратных 2	Б) B включено в A
3) A – множество натуральных чисел, кратных 2; B – множество четных натуральных чисел	С) множества A и B равны
	Д) A и B не пересекаются

Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество, все элементы которого являются элементами множества A или элементами множества B .

Обозначение: $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

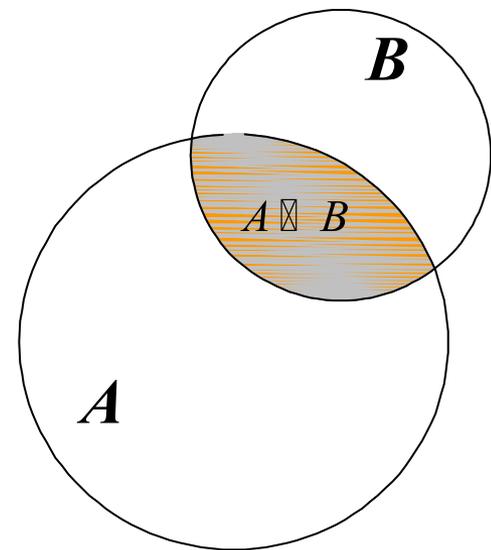


Операции над множествами

Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.

Обозначение $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

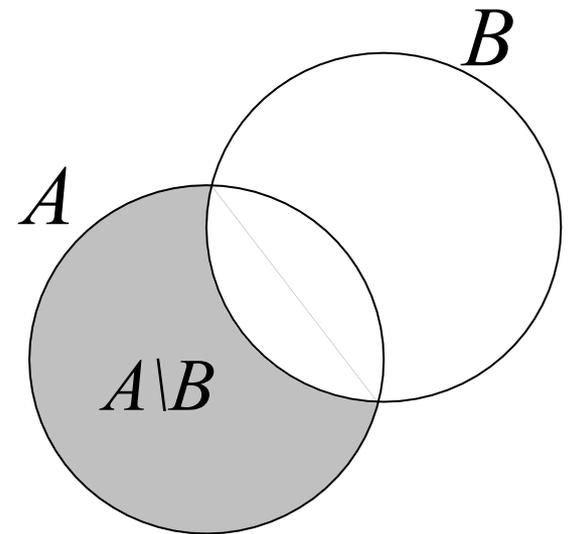


Операции над множествами

Разностью множеств A и B называется множество, элементами которого являются элементы множества A , не принадлежащие множеству B .

Обозначение $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



Операции над множествами

Дополнением к множеству A называется разность между универсальным множеством и множеством A .

Обозначение: $\bar{A} = U \setminus A$.

Задание

A – множество однозначных чисел, меньших 9

B – множество однозначных чисел, кратных 4.

Тогда для них верны следующие высказывания

1) $A \cap B = B$

2) $A \cup B = A$

3) $A \cap B = A$

4) $A \cup B = B$

Задание

Даны множества $A = [-4; 4]$ - отрезок числовой оси и $B = (-2; 5)$ - интервал числовой оси. Тогда количество целых чисел, входящих в пересечение этих множеств, равно...

- 1) 6
- 2) 5
- 3) 4
- 4) 8

Задание

■ Даны множества

$$A = \{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 8, 16\}$$

$$C = \{12, 13, 15, 16\}$$

$$D = \{0, 1, 20\}$$

Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$
 $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap C \cup D$

Задание

В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?

Задание

- Каждая из 30 невест, зарегистрированных в клубе знакомств, красива, воспитана или умна. Воспитанных невест – 21, красивых – 18, умных – 15. Красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя качествами?

- ***B*** – множество воспитанных невест
- ***K*** – множество красивых невест
- ***У*** – множество умных невест

Решение

- B – множество воспитанных невест
- K – множество красивых невест
- Y – множество умных невест

$$|B|=21, |K|=18, |Y|=15$$

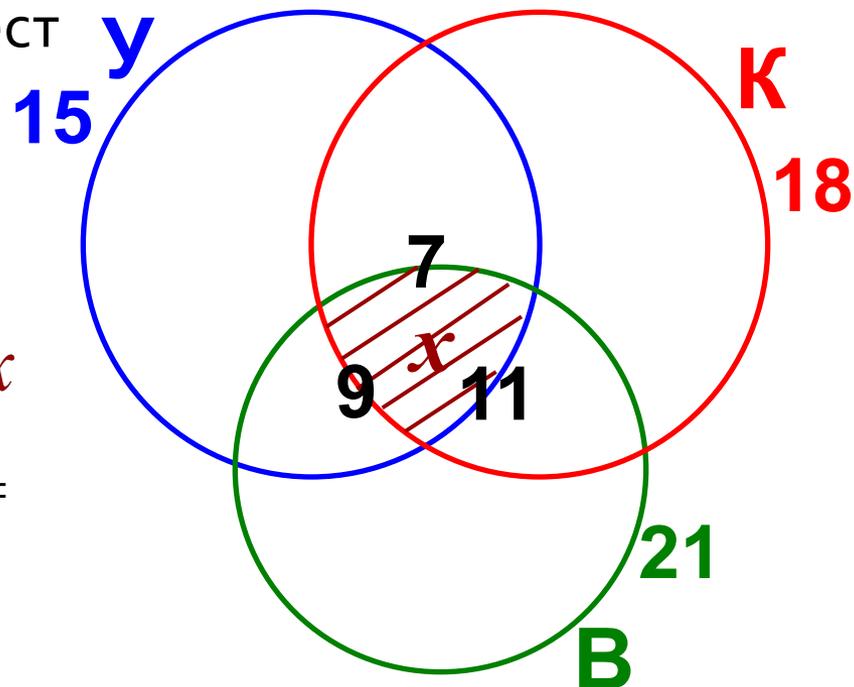
$$|B \cap K| = 11 \quad |Y \cap K \cap B| = x$$

$$|Y \cap B| = 9 \quad |B \cup K \cup Y| =$$

$$|Y \cap K| = 7 \quad 30$$

$$x + (9 - x) + (7 - x) + (11 - x) + (15 - 7 - (9 - x)) + (18 - 11 - (7 - x)) + (21 - 9 - (11 - x)) = 30$$

$$21 + 18 + 15 - 9 - 11 - 7 + x = 30 \quad x = 3$$



Формула включений-исключений

$$1. |A \boxtimes B| = |A| + |B| - |A \boxtimes B|$$

$$2. |A \boxtimes B \boxtimes C| = |A| + |B| + |C| - |A \boxtimes B| - |A \boxtimes C| - |B \boxtimes C| + |A \boxtimes B \boxtimes C|$$

$$3. |A \boxtimes B \boxtimes C \boxtimes D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$

$$- |A \boxtimes B| - |A \boxtimes C| - |A \boxtimes D| - |B \boxtimes C| - |B \boxtimes D| - |C \boxtimes D| +$$

$$+ |A \boxtimes B \boxtimes C| + |A \boxtimes B \boxtimes D| + |A \boxtimes C \boxtimes D| + |B \boxtimes C \boxtimes D| -$$

$$- |A \boxtimes B \boxtimes C \boxtimes D|$$

...

$$|A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \dots \boxtimes A_n| = (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) - (|A_1 \boxtimes A_2| + |A_1 \boxtimes A_3| + \dots + |A_{n-1} \boxtimes A_n|) +$$

$$+ (|A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes A_3| + \dots + |A_{n-2} \boxtimes A_{n-1} \boxtimes A_n|) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \dots \boxtimes A_n|$$

