ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Эпиграф

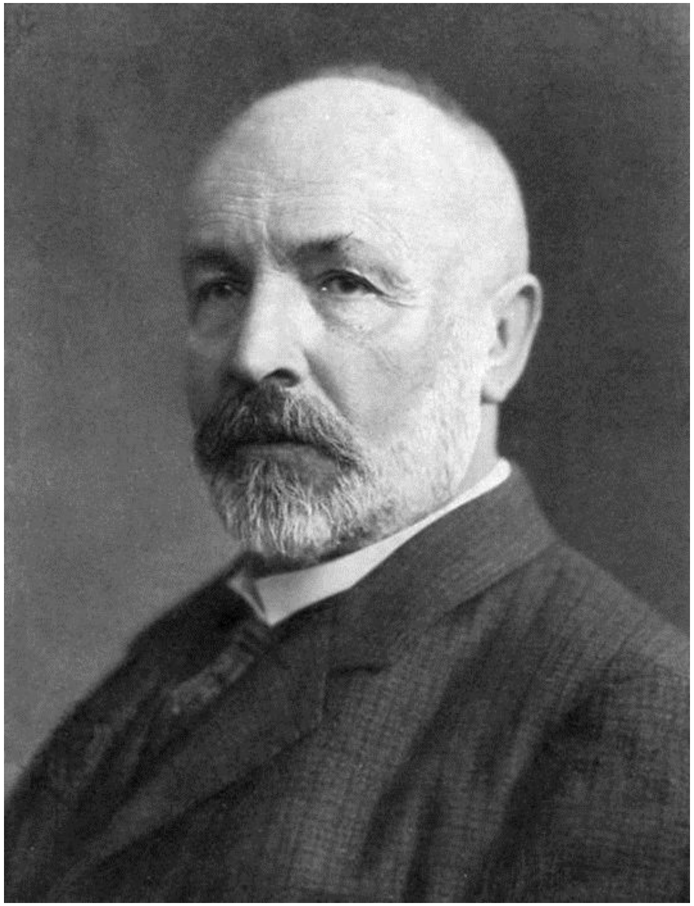
В любых делах при максимуме сложностей
Подход проблеме все-таки один:
Желанье – это множество возможностей,
А нежеланье – множество причин.

Эдуард Асадов

История появления

Теория множеств возникла в результате реализации программы стандартизации математики, разработанной немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918).

Множество есть «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью»



Георг Кантор (1845–1918)

История появления

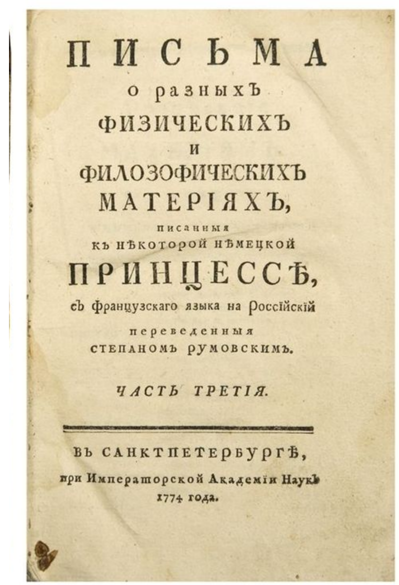
Первый набросок теории множеств принадлежит Бернарду Больцано («Парадоксы бесконечного», 1850). В этой работе рассматриваются произвольные (числовые) множества, и для их сравнения определено понятие взаимно-однозначного соответствия.

Бернард Больцано (1781–1848)

История появления

В XVIII веке Леонард Эйлер использовал круги в качестве наглядно-графическое изображение множества

“…Эти круглые фигуры, или, вернее, пространства способны облегчить ход наших рассуждений, а также позволяют нам раскрыть все тайны, которыми похваляется логика. С помощью этих символов всё сразу бросается в глаза…”



ПИСЬМА
о разныхъ
ФИЗИЧЕСКИХЪ
и
ФИЛОЗОФИЧЕСКИХЪ
МАТЕРІЯХЪ,
писанныя
къ нѣкоторой нѣмецкой
ПРИНЦЕССѢ,
съ французскаго языка на Россійскій
переведенныя
СТЕПАНОМЪ РУМОВСКИМЪ.

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,
при Императорской Академіи Наукъ
1774 года.

Леонард Эйлер (1707–1783)

История появления

В XIX веке сходное изображение множеств использовал английский логик Джон Венн. Он изображал множества прямоугольниками, и использовал эти изображения для доказательства утверждений о множествах

Джон Венн (1834–1923)

Задание

Приведите житейские названия следующих множеств:

1) множество марок, принадлежащих одному человеку;
2) множество пчел, летящих вместе;
3) множество цветных карандашей в коробке;
4) множество военных, подчиняющихся одному командиру;
5) множество футболистов, собравшихся вместе для игры;
6) множество цветов, в руке первоклассницы.

Что во всех этих случаях вы понимаете под множеством?

Понятие множества

«Множество есть многое, мыслимое как единое целое»
Множество - совокупность объектов, определяемых некоторым свойством, присущим каждому из них.
Каждый объект, входящий в множество, называется его элементом, а свойство их объединяющее – характеристическим свойством множества.

Символы и обозначения

A, *B*, *C*, *D*, … – множества

a, *b*, *c*, *d*, … – элементы множества

При записи множества перечислением его элементов используют символ «{ }».

$$A = \left\{ a; b; c; d \right\}$$

$\in$ – символ принадлежности элемента множеству

$$m \in M; \ \mathrm{a} \notin \mathrm{M}$$

$\varnothing$ – пустое множество

Мощность множества

Мощностью *конечного множества называется количество его элементов.*

Обозначение $|A|$.

Способы задания множеств

1) перечисление всех его элементов.

A={студент А., рабочий Л., школьник М.}

2) указание общего свойства элементов

B - множество четных натуральных чисел.

B = {b| b = 2k, k — любое натуральное число}.

3) Символьное обозначение

- *N* – множество натуральных чисел
- *Z* – множество целых чисел
- *Q* – множество рациональных чисел
- *R* – множество действительных чисел
- *I* – множество иррациональных чисел

4) Указание концов числового промежутка

[2; 8], (0; 6,5)

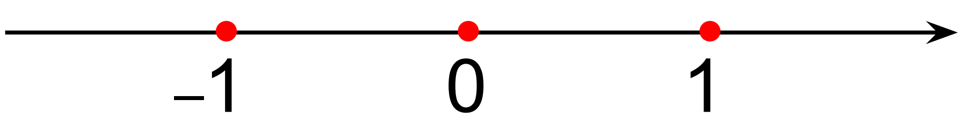
Способы задания множеств

- Задайте множество всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 1 \leq 0$:

а) перечислением элементов;
б) заданием характеристического свойства;
в) изображением на координатной прямой.

{–1; 0; 1}

$\{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 1 \leq 0\}$ $\{x \in Z \mid x^2 - 1 \leq 0\}$



Задание

- Измените способ задания множества:

а) А – множество всех цифр

б) $B = \{2; 3; 4; 5\}$

в) $C = \{x \in N | \ -3 \le x \le 3\}$

Задание

Множество натуральных решений уравнения

$$x(x+1)(x-12)=0$$

есть множество

1) {12}
2) {1; -12}
3) {-1; 0; 12}
4) {0; 12}

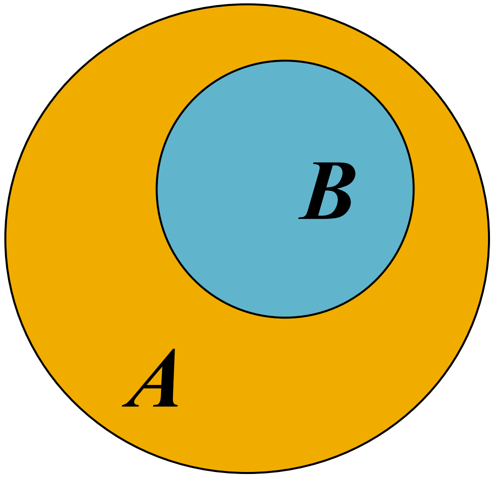
Отношения между множествами

Множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.
Обозначение: A=B.

$\{a, b, c, d\} = \{c, b, a, d\}$

Отношения между множествами

Множество В называется ***подмножеством*** множества А, если каждый элемент множества В является элементом множества А. Обозначение: В $\subset$ А.



Множество, по отношению к которому в данный момент все остальные множества являются подмножествами, называется ***универсальным множеством***. Обозначение: U.

Задание

C – множество юношей студенческой группы,
D – множество отличников этой группы.
Известно, что $D \subset C$, причем $C \neq \emptyset, D \neq \emptyset, C \neq D$.

Тогда справедливы высказывания

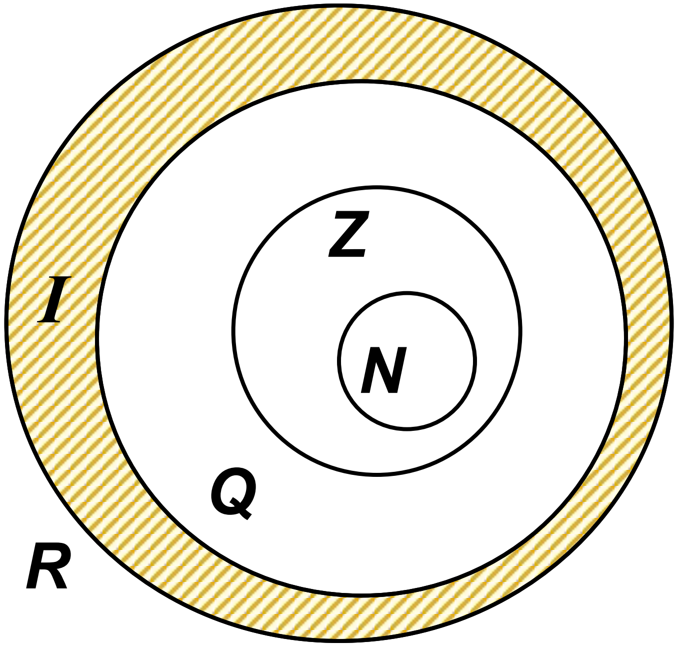
1) Все отличники группы являются юношами
2) В группе есть отличники
3) Ни один юноша группы не является отличником
4) Все юноши группы являются отличниками

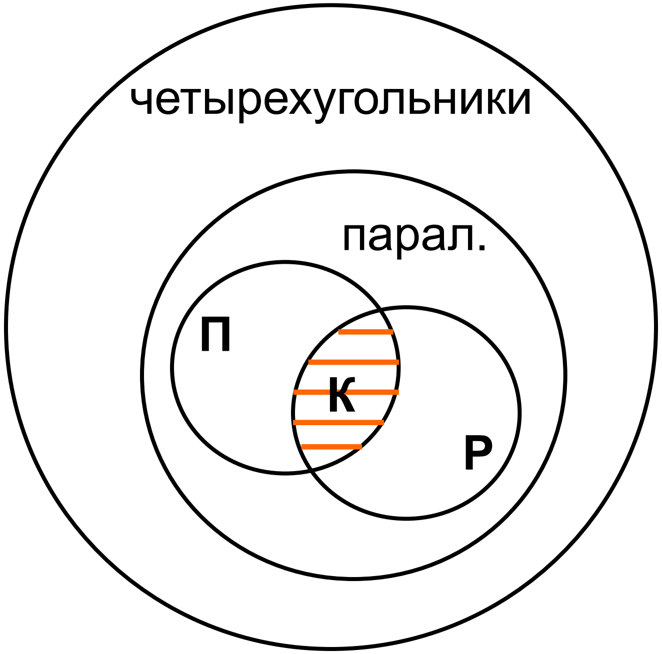
Задание

- Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна отношения следующих множеств:

1) ***R***, ***Z***, ***N***, ***I*** и ***Q***; $N \subset Z \subset Q \subset R$ $I \subset R$

2) четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов.





Задание

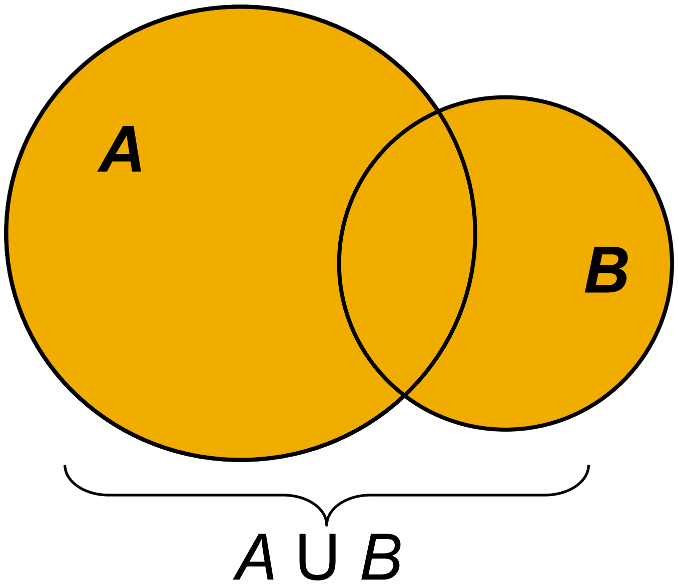
Установите соответствие между множествами и верными для них высказываниями.

1) А – множество натуральных чисел, кратных 3; В – множество натуральных чисел, не кратных 3	А) А является подмножеством В
2) А – множество натуральных чисел, кратных 6; В – множество натуральных чисел, кратных 2	Б) В включено в А
3) А – множество натуральных чисел, кратных 2; В – множество четных натуральных чисел	С) множества А и В равны
	Д) А и В не пересекаются

Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество, все элементы которого являются элементами множества A или элементами множества B.

Обозначение: $A \cup B$

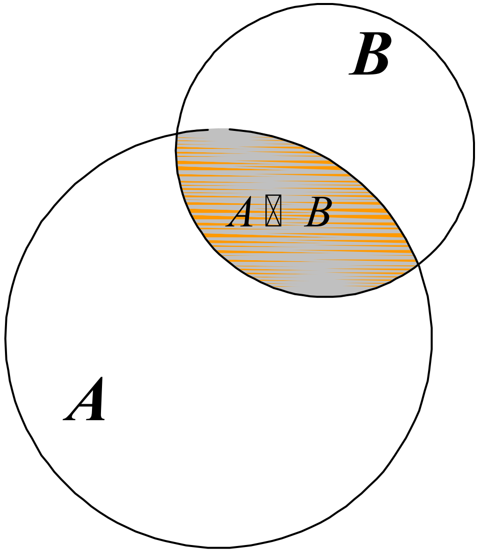


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Операции над множествами

Пересечением двух множеств А и В называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству А и множеству В одновременно.

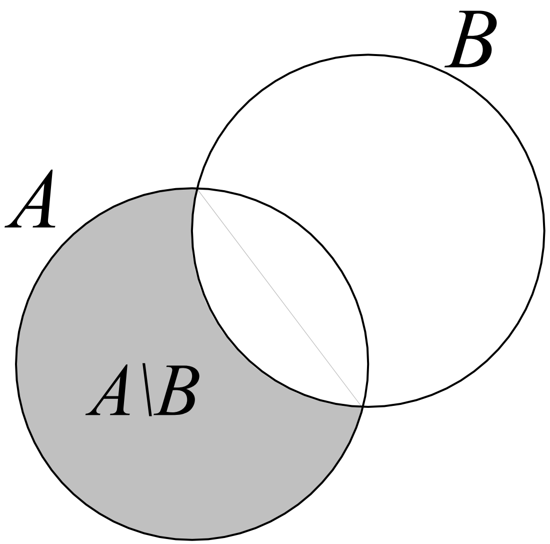
Обозначение $A \cap B$



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Операции над множествами

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, элементами которого являются элементы множества *A*, не принадлежащие множеству *B*.
Обозначение *A\B.*



$$A \setminus B = \{x |\ x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Операции над множествами

Дополнением к множеству А называется разность между универсальным множеством и множеством А.

Обозначение: $\bar{A} = U \setminus A$.

Задание

A – множество однозначных чисел, меньших 9
B – множество однозначных чисел, кратных 4.

Тогда для них верны следующие высказывания

1) $A \cap B = B$
2) $A \cup B = A$
3) $A \cap B = A$
4) $A \cup B = B$

Задание

Даны множества $A = [-4; 4]$ - отрезок числовой оси и $B = (-2; 5)$ - интервал числовой оси. Тогда количество целых чисел, входящих в пересечение этих множеств, равно…

1) 6
2) 5
3) 4
4) 8

Задание

- Даны множества

A={2, 3, 5, 8, 13, 15}

B={1, 3, 4, 8, 16}

C={12, 13, 15, 16}

D={0, 1, 20}

Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \backslash \mathrm{C}$, $C \backslash \mathrm{A}$

$A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap C \cup D$

Задание

В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?

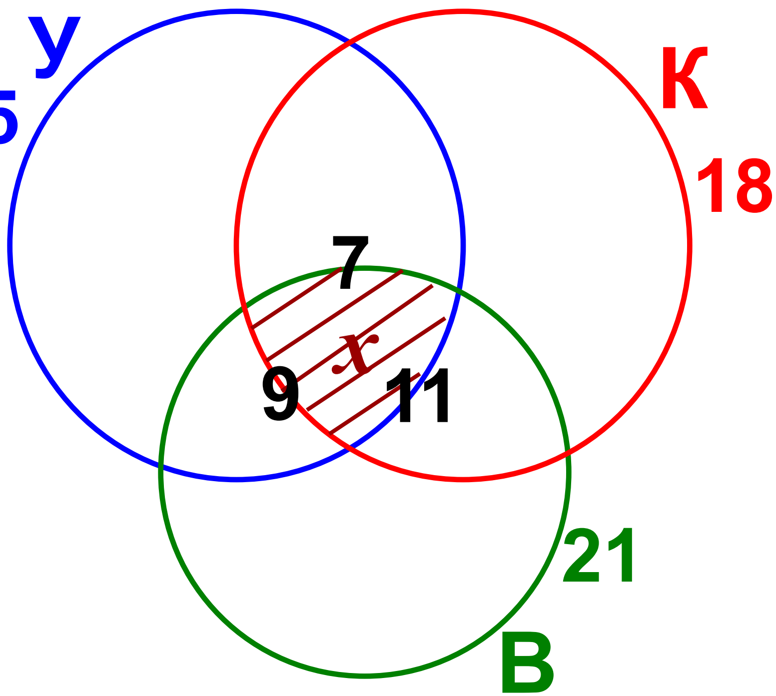
Задание

- Каждая из 30 невест, зарегистрированных в клубе знакомств, красива, воспитана или умна. Воспитанных невест – 21, красивых – 18, умных – 15. Красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя качествами?
    - ***В*** – множество воспитанных невест
    - ***К*** – множество красивых невест
    - ***У*** – множество умных невест

Решение

- **В** – множество воспитанных невест
- **К** – множество красивых невест
- **У** – множество умных невест

$|В|=21, \quad |К|=18, \quad |У|=15$



$$\left|В \cap К\right| = 11 \qquad \left|У \cap К \cap В\right| = x$$

$$\left|У \cap В\right| = 9 \qquad \left|В \cup К \cup У\right| = 30$$

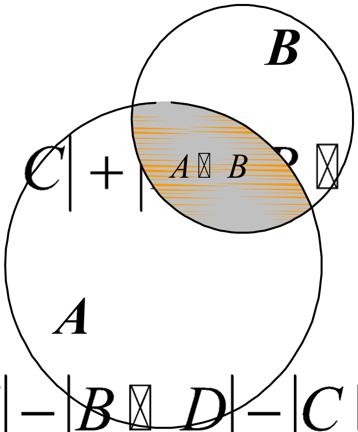
$$\left|У \cap К\right| = 7$$

$$x + (\cancel{9 - x}) + (\cancel{7 - x}) + (\cancel{11 - x}) +$$
$$+ (15 - 7 - (\cancel{9 - x})) + (18 - 11 - (\cancel{7 - x})) + (21 - 9 - (\cancel{11 - x}))$$
$$= 30$$

$$\mathbf{21 + 18 + 15 - 9 - 11 - 7 + x = 30} \qquad \mathbf{x = 3}$$

Формула включений-исключений

1. $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$



2. $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

3. $|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$

$$-|A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| +$$

$$+|A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| -$$

$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

…

$$|A_1\cup A_2\cup \ldots\cup A_n| = \left(|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|\right) - \left(|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + \ldots + |A_{n-1}\cap A_n|\right) +$$

$$+\left(|A_1\cap A_2\cap A_3| + \ldots + |A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$