

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Теория моделей





# Классическая теория моделей первого порядка

Теория моделей для классической логики первого порядка является исторически первым и наиболее развитым примером теоретико-модельного подхода. В роли моделей здесь выступают множества, представляющие область возможных значений переменных. Функциональные символы интерпретируются как операции соответствующей ариности над ними, а предикаты — как отношения (более подробно, см. [Логика первого порядка, интерпретация](#)).

Логика первого порядка — формальное исчисление, допускающее высказывания относительно переменных, фиксированных функций и предикатов. Расширяет логику высказываний.

Помимо логики первого порядка существуют также логики высших порядков, в которых кванторы могут применяться не только к переменным, но и к множествам. Термины логика предикатов и исчисление предикатов могут означать как логику первого порядка, так и логики первого и высшего порядка вместе; в первом случае иногда говорится о чистой логике предикатов или чистом исчислении предикатов.

## Логика первого порядка

---

Всякая функция или предикатный символ, имеет определенное число аргументов.

Если функциональный символ  $f$  имеет,  $n$  аргументов, то  $f$  называется  $n$ -местным функциональным, символом.

(Индивидуальный символ или константа может рассматриваться, как функциональный символ без аргументов.)

Аналогично, если предикатный символ  $P$  имеет  $n$  аргументов, то  $P$  называется  $n$ -местным предикатным символом. Например, *отец* — одноместный функциональный символ, а БОЛЬШЕ и ЛЮБИТ — двухместные предикатные символы.

Функция есть отображение, которое отображает список кон-стант в данную константу. Например, *отец* — функция, которая отображает человека по имени Джон в человека, который есть отец Джона.

Следовательно, *отец* (Джон) представляет человека, даже если его имя неизвестно. В логике первого порядка мы называем выражение *отец* (Джон) термом.

# Теорема компактности

Одним из важнейших инструментов теории моделей является теорема компактности, доказанная Мальцевым, которая утверждает, что множество формул первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда модель имеет каждое конечное подмножество этого множества формул.

Название теоремы связано с тем, что она может быть сформулирована как утверждение о компактности стоуновского пространства.

Из теоремы компактности следует, что некоторые понятия не являются выразимыми в логике первого порядка. Например, понятия конечности или счётности не могут быть выражены никакими формулами первого порядка и даже их множествами: если множество формул имеет сколь угодно большие конечные модели, то оно имеет и бесконечную модель. Аналогично, теория, имеющая бесконечную модель, мощность которой не меньше мощности сигнатуры, имеет модели и любой большей мощности.

Теорема компактности находит применение для конструирования нестандартных моделей классических теорий, например, элементарной арифметики или математического анализа.