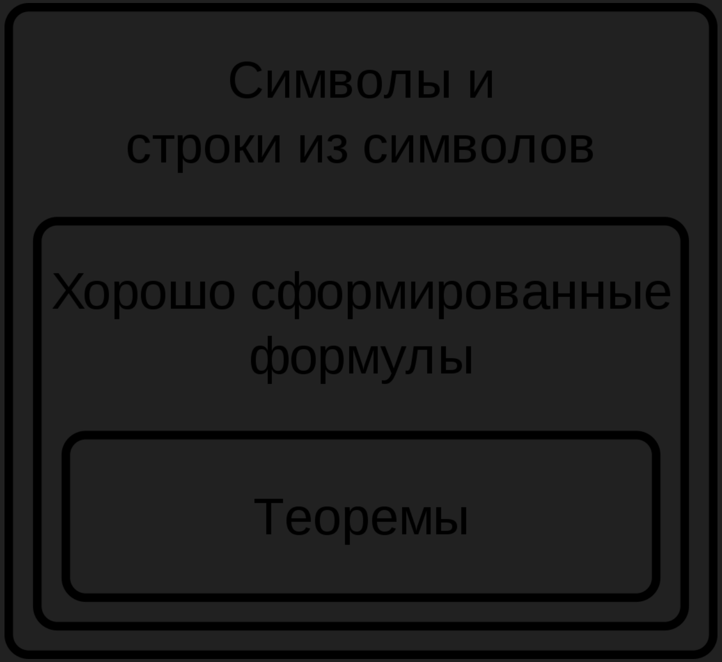
элементы математической логики

Теория моделей

Теория моделей — раздел математической логики, который занимается изучением связи между формальными языками и их интерпретациями, или моделями. Название теория моделей было впервые предложено Альфредом Тарским в 1954 году. Основное развитие теория моделей получила в работах Тарского, Мальцева и Робинсона.

Форма́льный язы́к в математической логике, информатике и лингвистике — множество конечных слов (строк, цепочек) над конечным алфавитом. Понятие языка чаще всего используется в теории автоматов, теории вычислимости и теории алгоритмов. Научная теория, которая имеет дело с этим объектом, называется теорией формальных языков.

В теории моделей язык строится из множеств символов, функций и отношений вместе с их арностью, а также множества переменных. Каждое из этих множеств может быть бесконечным. Из языка вместе с универсальными логическими символами составляются логические высказывания.



Классическая теория моделей первого порядка

Теория моделей для классической логики первого порядка является исторически первым и наиболее развитым примером теоретико-модельного подхода. В роли моделей здесь выступают множества, представляющие область возможных значений переменных. Функциональные символы интерпретируются как операции соответствующей арности над ними, а предикаты — как отношения (более подробно, см. Логика первого порядка, интерпретация).

Логика первого порядка — формальное исчисление, допускающее высказывания относительно переменных, фиксированных функций и предикатов. Расширяет логику высказываний.

Помимо логики первого порядка существуют также логики высших порядков, в которых кванторы могут применяться не только к переменным, но и к множествам. Термины логика предикатов и исчисление предикатов могут означать как логику первого порядка, так и логики первого и высшего порядка вместе; в первом случае иногда говорится о чистой логике предикатов или чистом исчислении предикатов.

Логика первого порядка

Всякая функция или предикатный символ, имеет определенное число аргументов.

Если функциональный символ f имеет, n аргументов, то f называется *n-местным функциональным, символом.*

(Индивидный символ или константа может рассматриваться, как функциональный символ без аргументов.)

Аналогично, если предикатный символ P имеет n аргументов, то P называется *n-местным предикатным символом.* Например, *отец* – одноместный функциональный символ, а БОЛЬШЕ и ЛЮБИТ – двухместные предикатные символы.

Функция есть отображение, которое отображает список кон-стант в данную константу. Например, *отец* – функция, которая отображает человека по имени Джон в человека, который есть отец Джона. Следовательно, *отец* (Джон) представляет человека, даже если его имя неизвестно. В логике первого порядка мы называем выражение *отец* (Джон) *термом.*

Теорема компактности

Одним из важнейших инструментов теории моделей является теорема компактности, доказанная Мальцевым, которая утверждает, что множество формул первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда модель имеет каждое конечное подмножество этого множества формул.

Название теоремы связано с тем, что она может быть сформулирована как утверждение о компактности стоуновского пространства.

Из теоремы компактности следует, что некоторые понятия не являются выразимыми в логике первого порядка. Например, понятия конечности или счётности не могут быть выражены никакими формулами первого порядка и даже их множествами: если множество формул имеет сколь угодно большие конечные модели, то оно имеет и бесконечную модель. Аналогично, теория, имеющая бесконечную модель, мощность которой не меньше мощности сигнатуры, имеет модели и любой большей мощности.

Теорема компактности находит применение для конструирования нестандартных моделей классических теорий, например, элементарной арифметики или математического анализа.