

ЛЕКЦИЯ 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЕ

План лекции

I. Последовательности

1. Числовые последовательности
2. Сходящиеся последовательности
3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

II. Отображение

I. Последовательности

1. Числовые последовательности

Определение (числовая последовательность)

$$\begin{array}{c} n \quad a_n \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \end{array}$$

a_n — n -й элемент последовательности

Способы задания

аналитический

рекуррентная формула (n элемент через $(n - 1)$)

словесно

продолжение

Пример 1. Расписать числовую последовательность

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Пример 2. Записать n элемент числовой последовательности

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$$

Решение

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ n - 1, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Классификация последовательностей

Ограниченные и неограниченные

Определение (ограниченная сверху)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad M \quad \forall n$$

$$a_n \leq M$$

M — верхняя грань

Определение (ограниченная снизу)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad m \quad \forall n$$

$$a_n \geq m$$

m — нижняя грань

продолжение

•Определение (ограниченная сверху и снизу)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad m \quad M \quad \forall n$$

$$m \leq a_n \leq M$$

Определение (неограниченная)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad m \quad M \quad \forall n$$

$$a_n \leq m \quad a_n \geq M$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

на ограниченность.

Решение.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$$

Последовательность ограничена сверху и снизу.

продолжение

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$

на ограниченность.

Решение.

Последовательность ограничена снизу.

продолжение

• Монотонные

Монотонные – неубывающие (возрастающие) и
невозрастающие (убывающие)

Определение (неубывающая)

$$\{a_n\} \quad \forall n$$

$$a_{n-1} \leq a_n$$

Определение (неубывающая)

$$\{a_n\} \quad \forall n$$

$$a_{n-1} \geq a_n$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}.$$

на монотонность.

Решение.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$$

Последовательность монотонная (возрастающая).

продолжение

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$

на монотонность.

Решение.

Последовательность немонотонная.

продолжение

• Фундаментальные

Определение (фундаментальная)

$$a_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$

$n > N \quad \forall p$ – фиксированное натуральное

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

продолжение

2. Сходящиеся последовательности

Определение (предел последовательности)

$$a \quad \{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \quad \forall a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

продолжение

• **Определение** (сходящаяся)

$\{a_n\}$ a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \quad \forall a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

продолжение

• Действия над пределами

$\{a_n\}$

$\{b_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

продолжение



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

продолжение

•

Основные теоремы

о сходящихся последовательностях

Теорема (об ограниченности)

$\{a_n\}$ – сходящаяся $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\{a_n\}$ – ограниченная

продолжение



Теорема Вейерштрасса

(о монотонной и ограниченной)

$\{a_n\}$ — монотонная и ограниченная

$\{a_n\}$ — сходящаяся

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

продолжение

- ***Критерий Коши***

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$

$n > N$ $\forall p$ – фиксированное натуральное

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

на сходимость.

Решение.

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ – сходящаяся

продолжение

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$$

на сходимость.

Решение.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ n - 1, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, & n = 2k - 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) = \infty, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Последовательность расходится.

продолжение

•3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

$$\{a_n\}$$

a – предел последовательности

$$a = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

продолжение

- **Определение** (бесконечно малая)

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$
$$n > N \quad a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n| < \varepsilon$$

- **Определение** (бесконечно большая)

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$$
$$n > N \quad a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n| > \varepsilon$$

продолжение

- Основные теоремы
о бесконечно малых последовательностях

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности

$\{a_n\}$ – ограниченная последовательность

Теорема 1

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$$

Теорема 2

$$\{\alpha_n\} \cdot \{a_n\} = \{\alpha_n \cdot a_n\}$$

продолжение

Пример 1. Показать, что числовая последовательность

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

бесконечно малая.

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ – бесконечно малая

продолжение

Пример 2. Показать, что числовая последовательность

$$\{n\}$$

бесконечно большая.

Решение.

$$a_n = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$\{n\}$ – бесконечно большая

II. Отображение и функция

● Отображение (обобщение понятия функции)

X, Y – множества

x, y – элементы множеств X, Y

Отображение – закон, по которому каждому

$$x \in X$$

сопоставляется однозначно определённый

$$y \in Y$$

$$y = f(x) \text{ или } f: X \rightarrow Y$$

f – отображение (закон)

продолжение

- **Функция**

Функция – закон, по которому каждому числу

$$x \in \{E\}$$

сопоставляется определённое число

$$y \in \{E\}$$

$$y = f(x), x \in \{E\}$$

f – закон

продолжение

- **Функция**

X, Y – множества

x, y – элементы множеств X, Y

Отображение – закон по которому каждому

$x \in X$

сопоставляется однозначно определённый

$y \in Y$

$$y = f(x) \text{ или } f: X \rightarrow Y$$

f – закон

продолжение

- *Однозначные функции:*
каждому числу $x \in \{E\}$ ставится в соответствие
единственное число $y \in \{E\}$

Пример

$$y = \ln x$$

Многозначные функции:
каждому числу $x \in \{E\}$ ставится в соответствие
несколько чисел $y \in \{E\}$

Пример

$$y^2 = x$$