ЛЕКЦИЯ 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ОТОБРАЖЕНИЕ

План лекции

I. Последовательности

1. Числовые последовательности
2. Сходящиеся последовательности
3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

II. Отображение

I. Последовательности

1. Числовые последовательности

Определение (числовая последовательность)

$$n \qquad a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

a_n $-n$-й элемент последовательности

Способы задания

аналитический

реккурентная формула (n элемент через $(n-1)$)

словесно

продолжение

Пример 1. Расписать числовую последовательность

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

Пример 2. Записать n элемент числовой последовательности

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \ldots$$

Решение

$$a_n = \begin{cases} 0, \ n = 2k-1 \\ n-1, n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\ldots\ )$$

Классификация последовательностей

- <u>*Ограниченные и неограниченные*</u>

Определение (ограниченная сверху)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad M \qquad \forall\, n$$

$$a_n \le M$$

M — верхняя грань

Определение (ограниченная снизу)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad m \qquad \forall\, n$$

$$a_n \ge m$$

m — нижняя грань

продолжение

- ***Определение*** (ограниченная сверху и снизу)

$$\{a_n\} \quad \exists \quad m \quad M \qquad \forall\, n$$

$$m \le a_n \le M$$

Определение (неограниченная)

$$\{a_n\} \quad \exists \;\; m \qquad M \qquad \forall\, n$$

$$a_n \le m \qquad a_n \ge M$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

на ограниченность.

Решение.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots$$

Последовательность ограниченна сверху и снизу.

продолжение

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \ldots$$

на ограниченность.

Решение.

Последовательность ограниченна снизу.

продолжение

- <u>*Монотонные*</u>

Монотонные – неубывающие (возрастающие) и
невозрастающие (убывающие)

Определение (неубывающая)

$$\{a_n\} \quad \forall\, n$$

$$a_{n-1} \leq a_n$$

Определение (неубывающая)

$$\{a_n\} \quad \forall\, n$$

$$a_{n-1} \geq a_n$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

на монотонность.

Решение.

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\dots$$

Последовательность монотонная (возрастающая).

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \ldots$$

на монотонность.

Решение.

Последовательность немонотонная.

продолжение

•<u>*Фундаментальные*</u>

Определение (фундаментальная)

$$a_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$n > N$ $\quad \forall\, p$ – фиксированное натуральное

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$$

продолжение

2. Сходящиеся последовательности

Определение (предел последовательности)

$$a \qquad \{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \qquad \forall\, a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

продолжение

- ***Определение*** (сходящаяся)

$$\{a_n\} \qquad a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \qquad \forall\, a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

продолжение

- ***Действия над пределами***

$$\{a_n\} \qquad \{b_n\}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

продолжение

-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

продолжение

-

<u>Основные теоремы</u>

<u>о сходящихся последовательностях</u>

Теорема (об ограниченности)

$\{a_n\}$ – сходящаяся $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\{a_n\}$ – ограниченная

продолжение

- **Теорема Вейерштрассса**

  (о монотонной и ограниченной)

$$\{a_n\} - \text{монотонная и ограниченная}$$

$$\{a_n\} - \text{сходящаяся} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

продолжение

- ***Критерий Коши***

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \qquad \forall\, p - \text{фиксированное натуральное}$$

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

продолжение

Пример 1. Исследовать числовую последовательность

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

на сходимость.

Решение.

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – сходящаяся

продолжение

Пример 2. Исследовать числовую последовательность

$$0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$$

на сходимость.

Решение.

$$a_n = \begin{cases} 0, \ n = 2k-1 \\ n-1, n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1,2, \dots)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \,, \ n = 2k-1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (n-1) = \infty \,, n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1,2, \dots)$$

Последовательность расходится.

продолжение

- **3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности**

$$\{a_n\}$$

a – предел последовательности

$$a = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

продолжение

- ***Определение*** (бесконечно малая)

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \qquad a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n| < \varepsilon$$

Определение (бесконечно большая)

$$\{a_n\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N = N(\varepsilon)$$

$$n > N \qquad a_n \in \{a_n\}$$

$$|a_n| > \varepsilon$$

продолжение

- ***Основные теоремы***
  о бесконечно малых последовательностях

$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $-$бесконечно малые последовательности

$\{a_n\}$ – ограниченная последовательность

Теорема 1

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$$

Теорема 2

$$\{\alpha_n\} \cdot \{a_n\} = \{\alpha_n \cdot a_n\}$$

продолжение

Пример 1. Показать, что числовая последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

бесконечно малая.

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – бесконечно малая

продолжение

Пример 2. Показать, что числовая последовательность

$$\{n\}$$

бесконечно большая.

Решение.

$$a_n = n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$\{n\}$ – бесконечно большая

II. Отображение и функция

- **Отображение** (обобщение понятия функции)

X, Y – множества

x, y – элементы множеств X, Y

Отображение – закон, по которому каждому

$$x \in X$$

сопоставляется однозначно определённый

$$y \in Y$$

$$y = f(x) \text{ или } f: X \to Y$$

f – *отображение* (закон)

продолжение

- <u>**Функция**</u>

Функция – закон, по которому каждому числу

$$x \in \{E\}$$

сопоставляется определённое число

$$y \in \{E\}$$

$$y = f(x),\ x \in \{E\}$$

f – закон

продолжение

- **Функция**

X, Y – множества

x, y – элементы множеств X, Y

<u>*Отображение*</u> – закон по которому каждому

$$x \in X$$

сопоставляется однозначно определённый

$$y \in Y$$

$$y = f(x) \text{ или } f: X \to Y$$

f – закон

продолжение

- *Однозначные функции*:
  каждому числу $x \in \{E\}$ ставится в соответствие единственное число $y \in \{E\}$

  Пример

  $$y = lnx$$

  Многозначные функции:
  каждому числу $x \in \{E\}$ ставится в соответствие несколько чисел $y \in \{E\}$

  Пример

  $$y^2 = x$$