Обратная польская запись (ОПЗ)

Сложные вычислительные задачи обычно требуют больших объемов вычислений, поэтому к разработчикам языков программирования предъявлялось требование: максимально приблизить форму записи математических выражений в коде программы к естественному языку математики.

Одну из первых областей системного программирования составили исследования способов трансляции математических выражений.

В результате наибольшее распространение получил метод трансляции с помощью обратной польской записи, которую предложил польский математик Я. Лукашевич.

ОПЗ представляет собой выражение, записанное в постфиксной форме, без скобок, по специальным правилам.

Пусть для операндов ***A*** и ***B*** выполняется операция сложения.

Привычная форма записи ***A+B*** называется ***инфиксной.***

Форма записи, в которой знак операции следует перед операндами +***AB***, называется ***префиксной***.

Если же операция записывается после операндов ***AB***+, то это ***постфиксная*** форма**.**

Получение ОПЗ реализуется с использованием структур в виде стека и дерева.

Алгоритм, использующий стек

Получение ОПЗ с использованием стека может осуществляться весьма просто на основе алгоритма, предложенного Дейкстрой, который ввел понятие стекового приоритета операций, например:

Операция	**Приоритет**
(	**1**
+ –	**2**
*** /**	**3**

Суть алгоритма в следующем

Исходное выражение, записанное в виде строки символов ***S***, просматривается слева направо.

Операнды переписываются в выходную строку ***B***, операции обрабатываются с использованием стека, который первоначально пуст, на основе следующих правил.

1. Если в строке ***S*** встретился операнд (буква), то его помещаем в строку ***B***.
2. Если в ***S*** встретилась ***открывающая скобка***, то ее помещаем в стек.

3. Если в ***S*** встретилась ***закрывающая скобка***, то извлекаем из стека и записываем в строку ***B*** все операции до "(", саму "(" скобку также извлекаем из стека. Обе скобки игнорируются.

4. Если в ***S*** встретилась операция ***X*** (+, - , *, /), то выталкиваем из стека все операции, приоритет которых не ниже ***X***, после чего саму операцию ***X*** записываем в стек.

5. При достижении конца строки ***S***, анализируем стек и, если он не пуст, извлекаем и переписываем его элементы в выходную строку ***B***.

Пример реализации

Исходное выражение задано в виде строки ***S***

$$"a + b*c + (d*e + f)*g"$$

Запишем это выражение в форме ОПЗ.

Ответом будет выражение (без скобок)

$$abc*+de*f+g*+$$

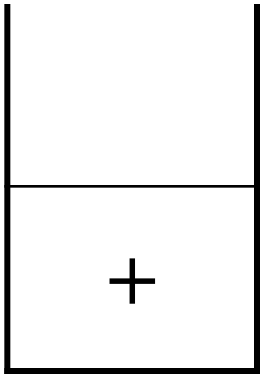
Результат будем получать в строке ***B***.

Начинаем последовательно просматривать символы исходной строки, причем ***B*** – пустая строка и стек пуст.

Всего в строке 15 символов (15 п.п.).

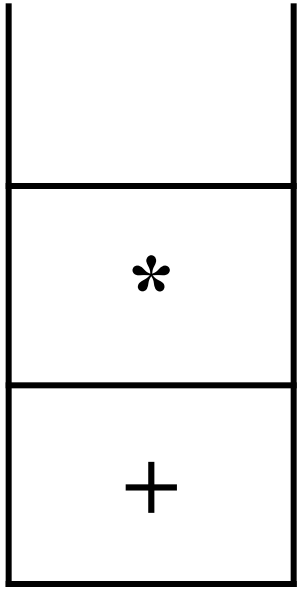
1. Букву «***a***» помещается в строку ***B***
2. Операцию «+» помещаем в стек.
3. Букву «***b***» помещаем в строку ***B***.

На этот момент стек и строка ***B*** выглядят следующим образом:



B **= ” *ab* ”**

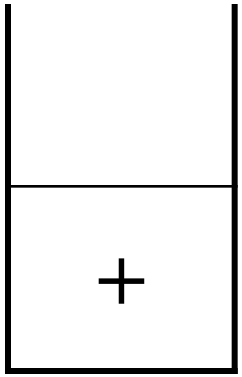
4. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. элемент «+» в вершине стека имеет более низкий приоритет.
5. Букву «***c***» помещаем в строку ***B***, после чего имеем



B **=** ***” abc ”***

6. Следующая операция «+»: анализируем стек и видим, что в вершине стека «*» и следующая за ней «+» имеют приоритеты не ниже текущей. Следовательно, обе операции извлекаем из стека и помещаем в строку ***B***, а текущую операцию «+» помещаем в стек.

В итоге имеем

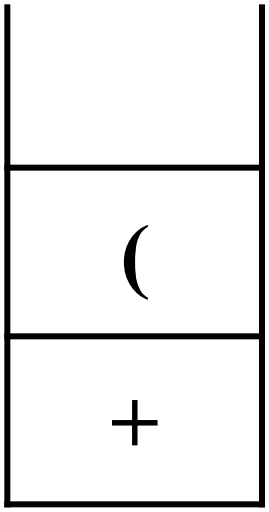


B **= ” *abc**+ ”**

7. Далее следует символ «**(**», его помещаем в стек.

8. Букву «***d***» помещаем в строку ***B***.

В результате получается

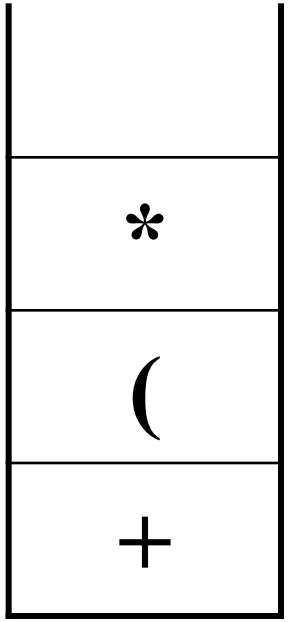


B **=** ***” abc*+d ”***

9. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. приоритет у скобки самый низкий.

10. Букву «***e***» помещаем в строку ***B***.

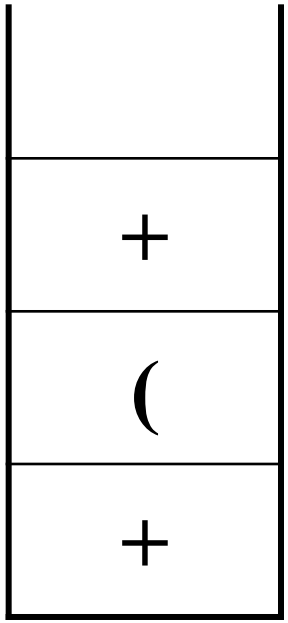
Получили



B **= ” *abc*+*de* ”**

11. Следующая операция «+»: приоритет операции «*» в вершине стека выше, поэтому извлекаем из стека «*» и помещаем в строку ***B***. Текущий символ «+» помещаем в стек.

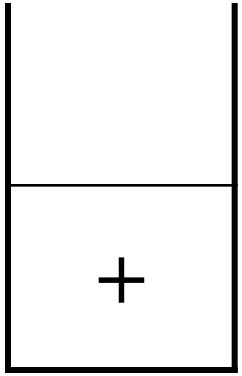
12. Букву «***f***» помещаем в строку ***B***. Получаем



B **=** ***” abc*+de*f ”***

13. Далее идет закрывающая скобка, все элементы до символа «**(**» извлекаем из стека и помещаем в строку ***B*** (это элемент «+»), сам символ «**(**» тоже извлекаем из стека.

Обе скобки игнорируются:

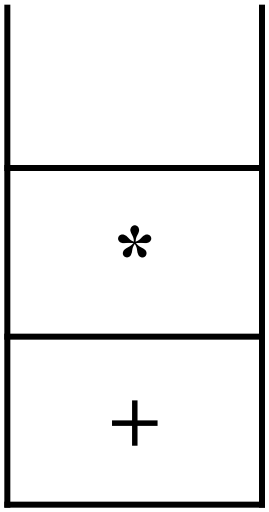


B **=** ” ***abc****+***de****f***+** ”

14. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. ее приоритет выше операции «+» в вершине стека.

15. Букву «***g***» записываем в строку ***B***.

Получаем



B **=** ***” abc*+de*f+g ”***

Все символы строки ***S*** просмотрены, следовательно, анализируем состояние стека, если он не пуст, то переписываем все его элементы в строку ***B***, т.е. операции «+» и «*» последовательно извлекаем из стека в строку:

B = ”***abc****+***de****f***+g****+”

Просмотрев исходную информацию только один раз, мы решили поставленную задачу.

Вычисление выражения, записанного в ОПЗ, может проводиться путем однократного просмотра, что является весьма удобным при генерации объектного кода программ.

Рассмотрим простой пример.

Выражение $(A + B) * (C + D) - E$ в виде ОПЗ:

$$AB+CD+*E-$$

Его вычисление проводится следующим образом (R_1, R_2, … – вспомогательные переменные):

Шаг	Анализируемая строка	Действие
1	$A\ B + C\ D + *\ E -$	$R_1 = A + B$
2	$R_1\ C\ D + *\ E -$	$R_2 = C + D$
3	$R_1\ R_2\ *\ E -$	$R_3 = R_1 * R_2$
4	$R_3\ E -$	$R_4 = R_3 - E$
5	R_4	

Текст программы, реализующий рассмотренные алгоритмы, может иметь следующий вид:

```
    . . .
struct Stack {
 char c;            // Символ операции
 Stack *next;
} ;
int  Prior (char);
Stack*  InS ( Stack*, char);
Stack*  OutS ( Stack*, char&);
double Result ( char* );
```

```
void main ()
{
   Stack *t,
   *Op = NULL;        // Стек операций Op – пуст
   char a, In [81], Out [81];
// In – входная (S), Out – выходная (B) строки
   int   k,  l = 0;        // Текущие индексы для строк
   cout << " Input formula : ";
   cin >> In;
```

// Анализируем символы строки ***In***

```
 for ( k = 0;  In[k] != '\0' ;  ++k ) {
```

// **1**. Если символ – буква, заносим ее в ***Out***

```
   if ( In[k] >= 'a' && In[k] <= 'z' )
        Out [ l++ ] = In [ k ];
```

// **2**. Если «**(**», записываем ее в стек

```
   if ( In[k] == '(' )
        Op = InS ( Op, In[k] );
```

/* **3**. Если «**)**», извлекаем из стека в строку ***Out*** все операции до открывающей скобки */

```
 if ( In[k] == ')' ) {
     while ( (Op -> c) != '(' ) {
// Считываем элемент a из стека
         Op = OutS ( Op, a );                    if ( !Op
) a = '\0';
// и записываем его в строку Out.
         Out [ l++ ] = a;                    }
```

```
// Удаляем из стека открывающую скобку
        t = Op;
        Op = Op -> next;
        delete t;
// Вместо этих трех строк можно записать одну
//        Op =  OutS ( Op, a );
    }
```

```
/* 4. Если операция, извлекаем из стека в Out опе-
   рации с большим или равным приоритетом */
   if (In[k]=='+' || In[k]=='–' || In[k]=='*' || In[k]=='/') {
    while ( Op != NULL  &&
        Prior (Op -> c) >= Prior ( In[k] ) ) {
            Op = OutS  ( Op, a );
            Out [ l++ ] = a;
        }
// Текущий символ операции записываем в стек
    Op = InS ( Op, In[k] );
   }
}   // Конец цикла for () анализа входной строки
```

/* **5**. Если стек не пуст, извлекаем из него операции и записываем в выходную строку */

```
while ( Op != NULL ) {
 Op = OutS ( Op, a );
 Out [ l++ ] = a;
}
Out [ l ] = '\0';      //  Окончание строки
cout << "\n Polish = " << Out << endl;
cout << " Res = " << Result ( Out ) << endl;
system("pause");
}
```

Обратите внимание на то, что группа операторов if() в пунктах **1 – 4** организована НЕ ЭФФЕКТИВНО, поправьте это!!!

// Функция реализации приоритета операций

```
int  Prior ( char a )  {
 switch ( a ) {
     case '*': case '/':  return 3;
     case '–': case '+':     return 2;
     case '(':   return 1;
 }
 return 0;
}
```

// Добавление элемента в стек

```
Stack*  InS ( Stack *p, char s )
{
    Stack *t =  new Stack;
    t -> c  = s;
    t -> next = p;
    return t;
}
```

// Извлечение элемента из стека (со ссылкой)

```
Stack*  OutS ( Stack *p,  char &s )
{
    Stack *t = p;
    s = p -> c;
    p = p -> next;
    delete t;
    return p;
}
```

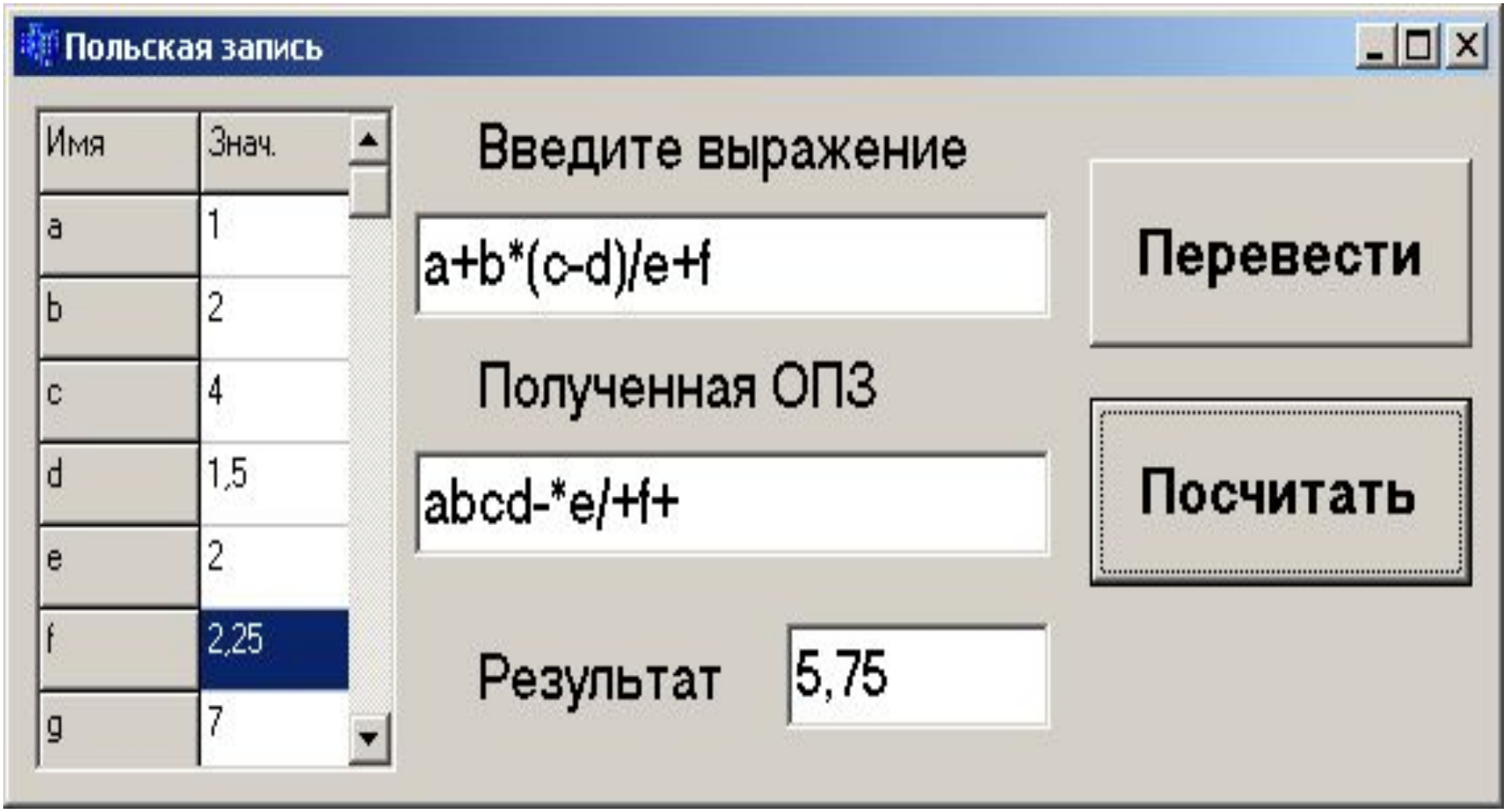
// ---------- Расчет выражения ОПЗ ----------

```
double Result (char *str ) {
   int  i;        Stack *begin = NULL;
   char ss, ss1, ss2, ssR = 'z' + 1 ;
   double op1, op2, res, mas[50];
   cout << " Input data" << endl;
   for ( i = 0; str[i] != '\0'; ++i ) {
       ss = str[i];
       if ( ss >= 'a' && ss <= 'z‘ ) {     // Буква
                cout << ss << " = ";
        cin >> mas [ int ( ss - 'a' ) ];
    }
   }
```

```
for ( i=0; str [ i ] != '\0'; ++i ) {
        ss = str [ i ];
        if ( !( ss == '+' || ss == '-' || ss == '*' ||
        ss == '/' || ss == '^' ) )    // Если буквы
                begin = InStack ( begin, ss );
        else {                        // Если операции
            begin = OutStack  (begin, &ss2 );
            begin = OutStack (begin, &ss1 );
            op2 = mas [ int (ss2 - 'a') ];
            op1 = mas [ int (ss1 - 'a') ];
```

```
    switch ( ss ) {
        case '+' :    res = op1 + op2;   break;
        case '-' :    res = op1 – op2;   break;
        case '*' :    res = op1 * op2;   break;
        case '/' :    res = op1 /  op2;   break;  // ??
        }
    mas [ int ( ssR - 'a' ) ] = res;
        begin = InStack ( begin, ssR );
        ssR ++;    // Символ для следующего R_i
    }           // Конец else
}               // Конец for
 return res;
```

Пример, реализованный в методичке для оконного приложения:



```
   struct Stack {
    char info;
    Stack *next;
   } *begin;
int  Prior (char);
Stack*  InStack ( Stack*, char);
Stack*  OutStack ( Stack*, char*);
double  Rezult (String);
double mas[100];   // Массив для вычисления
Set  < char, 0, 255 > znak;
// Множество символов-знаков
   int Kol = 10;
```

//---- Текст функции-обработчика ***FormCreate*** ----

```
Edit1->Text = "a+b*(c-d)/e";
Edit2->Text = "";
char a = 'a';
StringGrid1->Cells[0][0] ="Имя";
StringGrid1->Cells[1][0] ="Знач.";
for (int i = 1; i <= Kol; i++) {
        StringGrid1->Cells[0][i] = a++;
    StringGrid1->Cells[1][i] = i;
}
```

// ---- Текст обработчика кнопки ***Перевести*** ----

```
Stack *t;
begin = NULL;
char ss, a;
String InStr, OutStr;
OutStr = "";
Edit2->Text = "";
InStr = Edit1->Text;
znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';
int len = InStr.Length(), k;
```

```
for (k = 1; k <= len; k++) {
 ss = InStr[k];
// ----------- Пункт 1 алгоритма ------------
 if (ss >=  'a' && ss <= 'z' )
     OutStr += ss;
// ----------- Пункт 2 алгоритма ------------
 if ( ss == '(' )
     begin = InStack ( begin, ss);
```

// ---------- Пункт **3** алгоритма ----------

```
if ( ss == ')' ) {
        while ( (begin -> info) != '(' ) {
            begin = OutStack ( begin, &a );
        OutStr += a;
    }
        begin = OutStack ( begin, &a );
}
```

```
// ----------- Пункт 4 алгоритма ------------
    if ( znak.Contains ( ss ) ) {
     while ( begin != NULL &&
       Prior ( begin->info ) >= Prior ( ss ) ) {
                    begin = OutStack ( begin, &a );
                    OutStr += a;
     }
        begin = InStack ( begin, ss );
    }     // Конец оператора  if
  }     // Конец оператора  for
```

```
// ------------ Пункт 5 алгоритма ------------
   while ( begin != NULL) {
            begin = OutStack ( begin, &a );
            OutStr += a;
   }
   Edit2 -> Text = OutStr;
// Выводим полученную строку
}
```

//---- Текст обработчика кнопки ***Посчитать*** ----

```
char ch;
String OutStr = Edit2 -> Text;
for ( int i = 1; i <= Kol; i++) {
    ch = StringGrid1 -> Cells[0][i][1];
    mas[int(ch)] = StrToFloat(SG1->Cells[1][i]);
}
```

// ***SG*** это *StringGrid*

```
Edit3->Text=FloatToStr( Rezult ( OutStr ) );
```

//-- Функция реализации приоритета операций --

```
int Prior ( char a ){
 switch ( a ) {
        case '^':            return 4;       // !!!
        case '*':   case '/':  return 3;
        case '-':   case '+':     return 2;
        case '(':            return 1;
 }
 return 0;
}
```

//------ Расчет арифметического выражения ------

```
double Rezult(String Str)
{
 char ch, ch1, ch2, chr;
 double op1, op2, rez;
 int len = Str.Length();
 znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';
 chr = 'z' + 1;
 for (int i=1; i <= len;  i++)  {
        ch = Str[i];
```

```
if (! znak.Contains (ch) )
        begin = InStack ( begin, ch );
    else {
        begin = OutStack ( begin, &ch1 );
        begin = OutStack ( begin, &ch2 );
        op1 = mas[int (ch1) - 97];   // код ‘a’ - 97
        op2 = mas[int (ch2) - 97];
```

```
    switch (ch){
            case '+' : rez = op2 + op1;          break;
            case '-' :  rez = op2 - op1;         break;
            case '*' :  rez = op2 * op1;         break;
            case '/' :   rez = op2 / op1;        break;
            case '^' :  rez = pow(op2,op1);  break;
        }
        mas[int (chr) - 97] = rez;
        begin = InStack ( begin, chr);
        chr++;
    }         // Конец  else
  }           // Конец оператора  for
  return rez;
}
```