Обратная польская запись (ОПЗ)

Сложные вычислительные задачи обычно требуют больших объемов вычислений, поэтому к разработчикам языков программирования предъявлялось требование: максимально приблизить форму записи математических выражений в коде программы к естественному языку математики.

Одну из первых областей системного программирования составили исследования способов трансляции математических выражений. В результате наибольшее распространение получил метод трансляции с помощью обратной польской записи, которую предложил польский математик Я. Лукашевич.

ОПЗ представляет собой выражение, записанное в постфиксной форме, без скобок, по специальным правилам.

- Пусть для операндов A и B выполняется операция сложения.
- Привычная форма записи A+B называется $u+dpu\kappa c+ou$.
- Форма записи, в которой знак операции следует перед операндами +AB, называется *префиксной*.
- Если же операция записывается после операндов AB+, то это *постфиксная* форма.
- Получение ОПЗ реализуется с использованием структур в виде стека и дерева.

Алгоритм, использующий стек

Получение ОПЗ с использованием стека может осуществляться весьма просто на основе алгоритма, предложенного Дейкстрой, который ввел понятие стекового приоритета операций, например:

Операция	Приоритет
(1
+ _	2
* /	3

Суть алгоритма в следующем

- Исходное выражение, записанное в виде строки символов S, просматривается слева направо.
- Операнды переписываются в выходную строку \boldsymbol{B} , операции обрабатываются с использованием стека, который первоначально пуст, на основе следующих правил.
- 1. Если в строке S встретился операнд (буква), то его помещаем в строку B.
- 2. Если в S встретилась *открывающая скобка*, то ее помещаем в стек.

- 3. Если в **S** встретилась *закрывающая скобка*, то извлекаем из стека и записываем в строку **B** все операции до "(", саму "(" скобку также извлекаем из стека. Обе скобки игнорируются.
- 4. Если в S встретилась операция X (+, -, *, /), то выталкиваем из стека все операции, приоритет которых не ниже X, после чего саму операцию X записываем в стек.
- 5. При достижении конца строки S, анализируем стек и, если он не пуст, извлекаем и переписываем его элементы в выходную строку B.

Пример реализации

Исходное выражение задано в виде строки S

"
$$a + b*c + (d*e + f)*g$$
"

Запишем это выражение в форме ОПЗ.

Ответом будет выражение (без скобок)

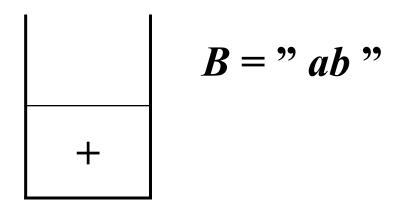
Результат будем получать в строке B.

Начинаем последовательно просматривать символы исходной строки, причем \boldsymbol{B} — пустая строка и стек пуст.

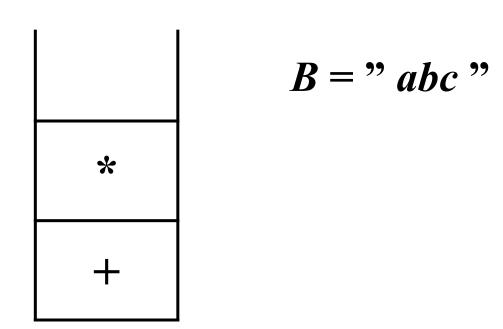
Всего в строке 15 символов (15 п.п.).

- 1. Букву «a» помещается в строку B
- 2. Операцию «+» помещаем в стек.
- 3. Букву «b» помещаем в строку B.

На этот момент стек и строка \boldsymbol{B} выглядят следующим образом:



- 4. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. элемент «+» в вершине стека имеет более низкий приоритет.
- 5. Букву «c» помещаем в строку B, после чего имеем



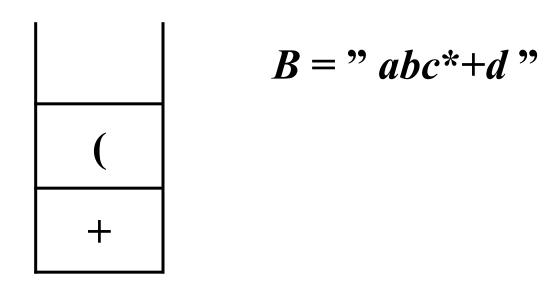
6. Следующая операция «+»: анализируем стек и видим, что в вершине стека «*» и следующая за ней «+» имеют приоритеты не ниже текущей. Следовательно, обе операции извлекаем из стека и помещаем в строку **В**, а текущую операцию «+» помещаем в стек.

В итоге имеем

$$B = \text{"} abc*+\text{"}$$

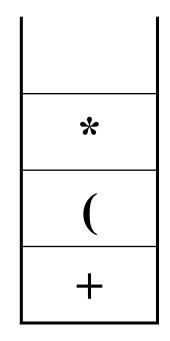
- 7. Далее следует символ «(»), его помещаем в стек.
- 8. Букву $\langle d \rangle$ помещаем в строку B.

В результате получается



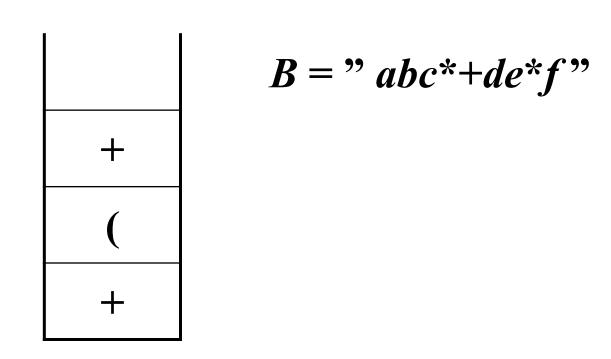
- 9. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. приоритет у скобки самый низкий.
- 10. Букву «e» помещаем в строку B.

Получили



$$B =$$
" $abc*+de$ "

- 11. Следующая операция «+»: приоритет операции «*» в вершине стека выше, поэтому извлекаем из стека «*» и помещаем в строку \boldsymbol{B} . Текущий символ «+» помещаем в стек.
- 12. Букву «f» помещаем в строку B. Получаем



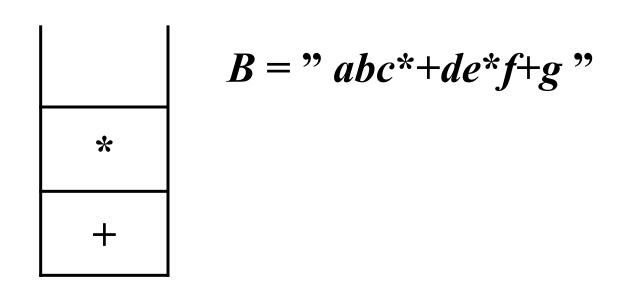
13. Далее идет закрывающая скобка, все элементы до символа «(» извлекаем из стека и помещаем в строку \boldsymbol{B} (это элемент «+»), сам символ «(» тоже извлекаем из стека.

Обе скобки игнорируются:

$$B = \text{"} abc*+de*f+\text{"}$$

14. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. ее приоритет выше операции «+» в вершине стека.

15. Букву «g» записываем в строку B. Получаем



Все символы строки S просмотрены, следовательно, анализируем состояние стека, если он не пуст, то переписываем все его элементы в строку B, т.е. операции «+» и «*» последовательно извлекаем из стека в строку:

$$B = \text{``abc*+de*f+g*+''}$$

Просмотрев исходную информацию только один раз, мы решили поставленную задачу.

Вычисление выражения, записанного в ОПЗ, может проводиться путем однократного просмотра, что является весьма удобным при генерации объектного кода программ.

Рассмотрим простой пример.

Выражение
$$(A + B) * (C + D) - E$$
 в виде ОПЗ: $AB + CD + *E -$

Его вычисление проводится следующим образом $(R_1, R_2, \dots -$ вспомогательные переменные):

Шаг	Анализируемая строка	Действие
1	AB+CD+*E-	$R_1 = A + B$
2	$R_1 CD + *E -$	$R_2 = C + D$
3	$R_1 R_2 * E -$	$R_3 = R_1 * R_2$
4	$R_3 E -$	$R_4 = R_3 - E$
5	R_4	

Текст программы, реализующий рассмотренные алгоритмы, может иметь следующий вид:

```
struct Stack {
char c; // Символ операции
Stack *next;
int Prior (char);
Stack* InS (Stack*, char);
Stack* OutS (Stack*, char&);
double Result (char*);
```

```
void main ()
  Stack *t,
  *Op = NULL; // Стек операций Op - пуст
  char a, In [81], Out [81];
// In — входная (S), Out — выходная (B) строки
  int k, l = 0; // Текущие индексы для строк
  cout << "Input formula: ";
  cin >> In;
```

```
// Анализируем символы строки In for ( k = 0; In[k] != '\0'; ++k ) {
```

// **1**. Если символ — буква, заносим ее в *Out*

// **2**. Если **«(»**, записываем ее в стек

/* 3. Если «)», извлекаем из стека в строку *Out* все операции до открывающей скобки */ if (In[k] == ')')while ((Op -> c)! = '('))// Считываем элемент а из стека Op = OutS (Op, a);if (!Op) $a = ' \ 0';$ // и записываем его в строку Out.

Out [l++] = a;

```
// Удаляем из стека открывающую скобку
     t = Op;
     Op = Op \rightarrow next;
     delete t;
// Вместо этих трех строк можно записать одну
      Op = OutS (Op, a);
```

```
/* 4. Если операция, извлекаем из стека в Out опе-
  рации с большим или равным приоритетом */
  if (In[k]=='+' || In[k]=='-' || In[k]=='*' || In[k]=='/') {
  while (Op!=NULL &&
     Prior (Op \rightarrow c) \rightarrow Prior (In[k])) {
        Op = OutS (Op, a);
        Out [l++] = a;
// Текущий символ операции записываем в стек
  Op = InS (Op, In[k]);
```

} // Конец цикла for () анализа входной строки

```
/* 5. Если стек не пуст, извлекаем из него
 операции и записываем в выходную строку */
 while (Op!=NULL) {
 Op = OutS (Op, a);
 Out [l++] = a;
 Out [l] = '\0'; // Окончание строки
 cout << "\n Polish = " << Out << endl;
 cout << " Res = " << Result ( Out ) << endl;
system("pause");
```

Обратите внимание на то, что группа операторов if() в пунктах 1 – 4 организована НЕ ЭФФЕКТИВНО, поправьте это!!!

// Функция реализации приоритета операций

```
int Prior (char a) {
switch (a) {
   case '*': case '/': return 3;
   case '-': case '+': return 2;
   case '(': return 1;
return 0;
```

```
// Добавление элемента в стек
  Stack* InS (Stack *p, char s)
      Stack *t = new Stack;
      t -> c = s;
      t \rightarrow next = p;
      return t;
```

// Извлечение элемента из стека (со ссылкой)

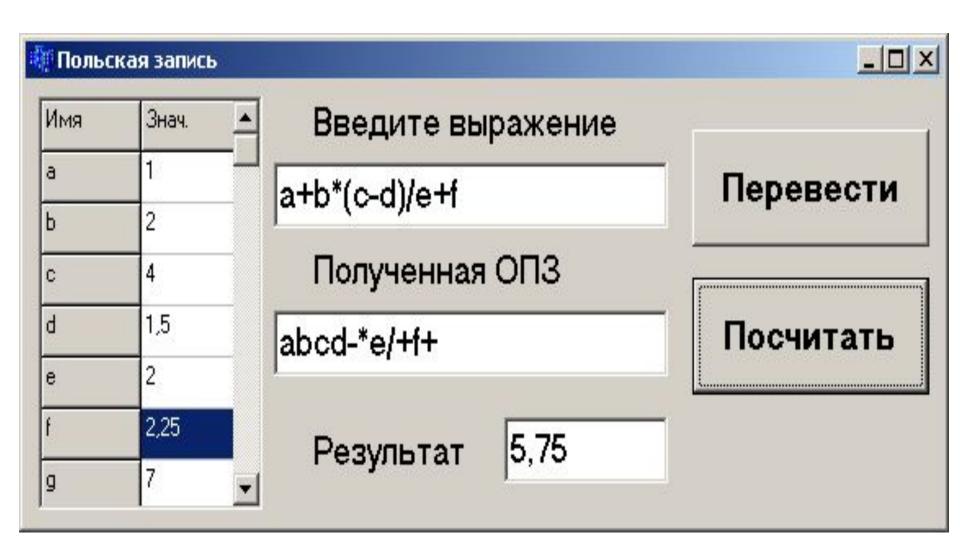
```
Stack* OutS (Stack *p, char &s)
   Stack *t = p;
   s = p -> c;
   p = p \rightarrow next;
   delete t;
   return p;
```

```
----- Расчет выражения ОПЗ -----
double Result (char *str ) {
 int i; Stack *begin = NULL;
 char ss, ss1, ss2, ssR = 'z' + 1;
 double op1, op2, res, mas[50];
 cout << " Input data" << endl;
 for (i = 0; str[i] != '\0'; ++i) 
     ss = str[i];
     if ( ss \ge 'a' \&\& ss \le 'z' ) { // Буква
           cout << ss << " = ";
     cin >> mas [ int ( ss - 'a' ) ];
```

```
for ( i=0; str [ i ] != '\0'; ++i ) {
    ss = str [i];
    if (!(ss == '+' ||ss == '-' ||ss == '*' ||
    ss == '/' || ss == '^' ) ) // Если буквы
          begin = InStack (begin, ss);
    else {
                      // Если операции
       begin = OutStack (begin, &ss2);
       begin = OutStack (begin, &ss1);
       op2 = mas [int (ss2 - 'a')];
       op1 = mas [int (ss1 - 'a')];
```

```
switch (ss) {
    case '+': res = op1 + op2; break;
    case '-': res = op1 - op2; break;
    case '*': res = op1 * op2; break;
    case '/': res = op1 / op2; break; //??
 mas [ int ( ssR - 'a' ) ] = res;
    begin = InStack (begin, ssR);
    ssR ++; // Символ для следующего R.
  // Конец else
      // Koнeц for
return res;
```

Пример, реализованный в методичке для оконного приложения:



```
struct Stack {
  char info;
  Stack *next;
  } *begin;
int Prior (char);
Stack* InStack (Stack*, char);
Stack* OutStack (Stack*, char*);
double Rezult (String);
double mas [100]; // Массив для вычисления
Set < char, 0, 255 > znak;
// Множество символов-знаков
  int Kol = 10;
```

//---- Текст функции-обработчика *FormCreate* ----

```
Edit1->Text = ''a+b*(c-d)/e'';
Edit2->Text = "";
char a = 'a':
StringGrid1->Cells[0][0] ="Имя";
StringGrid1->Cells[1][0] ="Знач.";
for (int i = 1; i \le Kol; i++) {
     StringGrid1->Cells[0][i] = a++;
   StringGrid1->Cells[1][i] = i;
```

```
// ---- Текст обработчика кнопки Перевести ----
  Stack *t:
  begin = NULL;
  char ss, a;
  String InStr, OutStr;
  OutStr = "";
  Edit2->Text = "";
  InStr = Edit1->Text;
  znak << '*' << '+' << '-' << '^':
  int len = InStr.Length(), k;
```

```
for (k = 1; k \le len; k++)
  ss = InStr[k];
// ----- Пункт 1 алгоритма -----
  if (ss \ge 'a' \&\& ss \le 'z')
     OutStr += ss;
// ----- Пункт 2 алгоритма -----
  if ( ss == '(')
     begin = InStack (begin, ss);
```

```
// ----- Пункт 3 алгоритма -----
  if (ss == ')')
        while ( (begin \rightarrow info) != '(') {
           begin = OutStack (begin, &a);
        OutStr += a;
        begin = OutStack (begin, &a);
```

```
// ----- Пункт 4 алгоритма -----
   if (znak. Contains (ss)) {
    while (begin != NULL &&
     Prior (begin->info) >= Prior (ss)) {
              begin = OutStack (begin, &a);
              OutStr += a;
      begin = InStack (begin, ss);
       // Конец оператора if
 } // Конец оператора for
```

```
// ----- Пункт 5 алгоритма -----
  while (begin != NULL) {
         begin = OutStack (begin, &a);
         OutStr += a;
 Edit2 -> Text = OutStr;
// Выводим полученную строку
```

```
//---- Текст обработчика кнопки Посчитать ----
  char ch;
  String OutStr = Edit2 -> Text;
  for ( int i = 1; i \le Kol; i++) {
     ch = StringGrid1 -> Cells[0][i][1];
     mas[int(ch)] = StrToFloat(SG1->Cells[1][i]);
// SG это StringGrid
  Edit3->Text=FloatToStr( Rezult ( OutStr ) );
```

//-- Функция реализации приоритета операций --

```
int Prior (char a){
switch (a) {
       case '^': return 4; //!!!
       case '*': case '/': return 3;
       case '-': case '+': return 2;
       case '(': return 1;
return 0;
```

//---- Расчет арифметического выражения -----

```
double Rezult(String Str)
char ch, ch1, ch2, chr;
double op1, op2, rez;
int len = Str.Length();
znak << '*' << '+' << '-' << '^':
chr = 'z' + 1;
for (int i=1; i \le len; i++) {
      ch = Str[i];
```

```
if (! znak. Contains (ch))
     begin = InStack (begin, ch);
  else {
     begin = OutStack (begin, &ch1);
     begin = OutStack (begin, &ch2);
     op1 = mas[int (ch1) - 97]; // код 'a' - 97
     op2 = mas[int (ch2) - 97];
```

```
switch (ch){
         case '+' : rez = op2 + op1;
                                          break;
         case '-' : rez = op2 - op1;
                                          break;
         case '*': rez = op2 * op1;
                                          break;
         case '/': rez = op2 / op1;
                                          break;
         case '^{\prime}: rez = pow(op2,op1); break;
     mas[int (chr) - 97] = rez;
     begin = InStack (begin, chr);
     chr++;
         // Конец else
        // Конец оператора for
return rez;
```