

# Метод Ньютона

Решаем уравнение  $f$

Пусть известно, что на  $[a, b]$  есть корень  $x_*$  уравнения  $f(x)=0$ , причем  $f'(x)$  и  $f''(x)$  непрерывны и сохраняют определенные знаки на  $[a, b]$ . Пусть  $x_k$  – некоторое приближенное значение корня. Можно записать  $x_* = x_k + h$ , где  $h$  – малая величина.

Применяем разложение в ряд Тейлора:

$$f(x_*) = f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k) = 0,$$

# Метод Ньютона

$$h \approx -f(x_k)/f'(x_k)$$

$$x_* \approx x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

Таким образом, следующее приближение к корню будет

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Это итерационная схема носит название метода Ньютона (или метода *касательных*)

# Метод Ньютона

Уравнение касательной:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Для  $y=0$  значение  $x$  будет равно  $x_1$ :

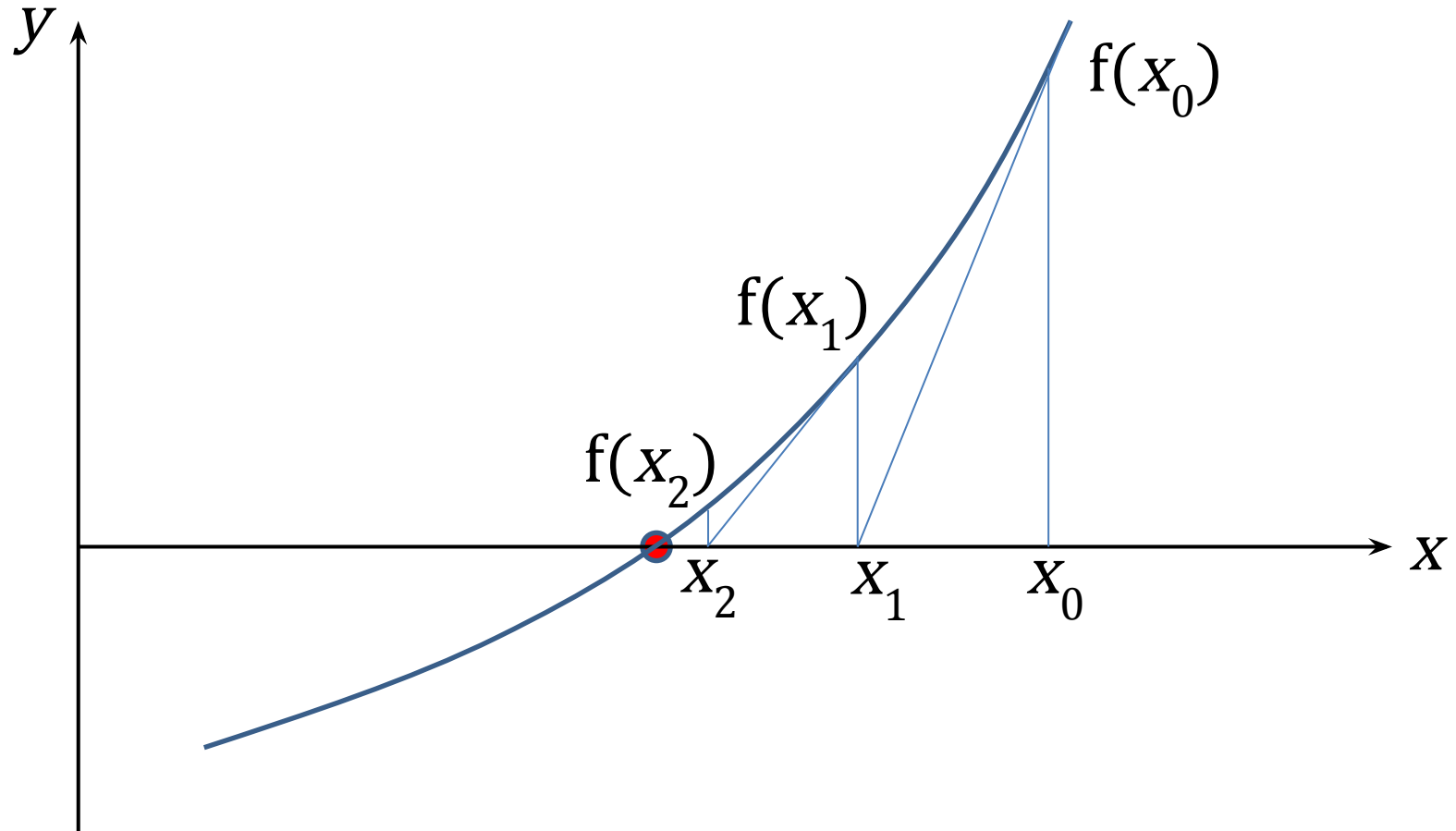
$$0 = y_0 + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Находим  $x_1$ :

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}$$

Т.к.  $y_0 \equiv f(x_0)$ , то  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

# Метод Ньютона



# Метод Ньютона

*Условие сходимости метода Ньютона*

Т.к. 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

а в методе простых итераций  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ , то в методе Ньютона можно принять

$$\varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Условие сходимости  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  дает

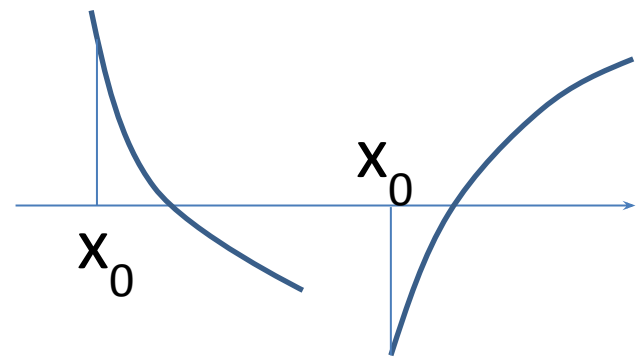
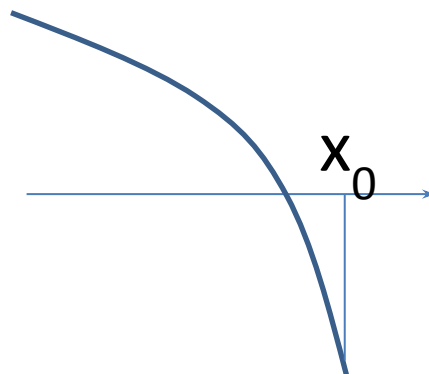
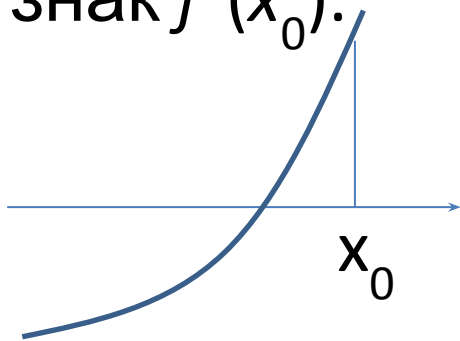
$$|ff'' / (f')^2| \leq q < 1$$

# Метод Ньютона

«Хорошим» начальным приближением  $x_0$  является то, для которого выполняется неравенство

$$f(x_0) f''(x_0) > 0.$$

Таким образом в качестве исходной точки  $x_0$  можно выбрать тот конец интервала  $[a, b]$ , которому отвечает ордината того же знака, что и знак  $f''(x_0)$ .



# Метод Ньютона

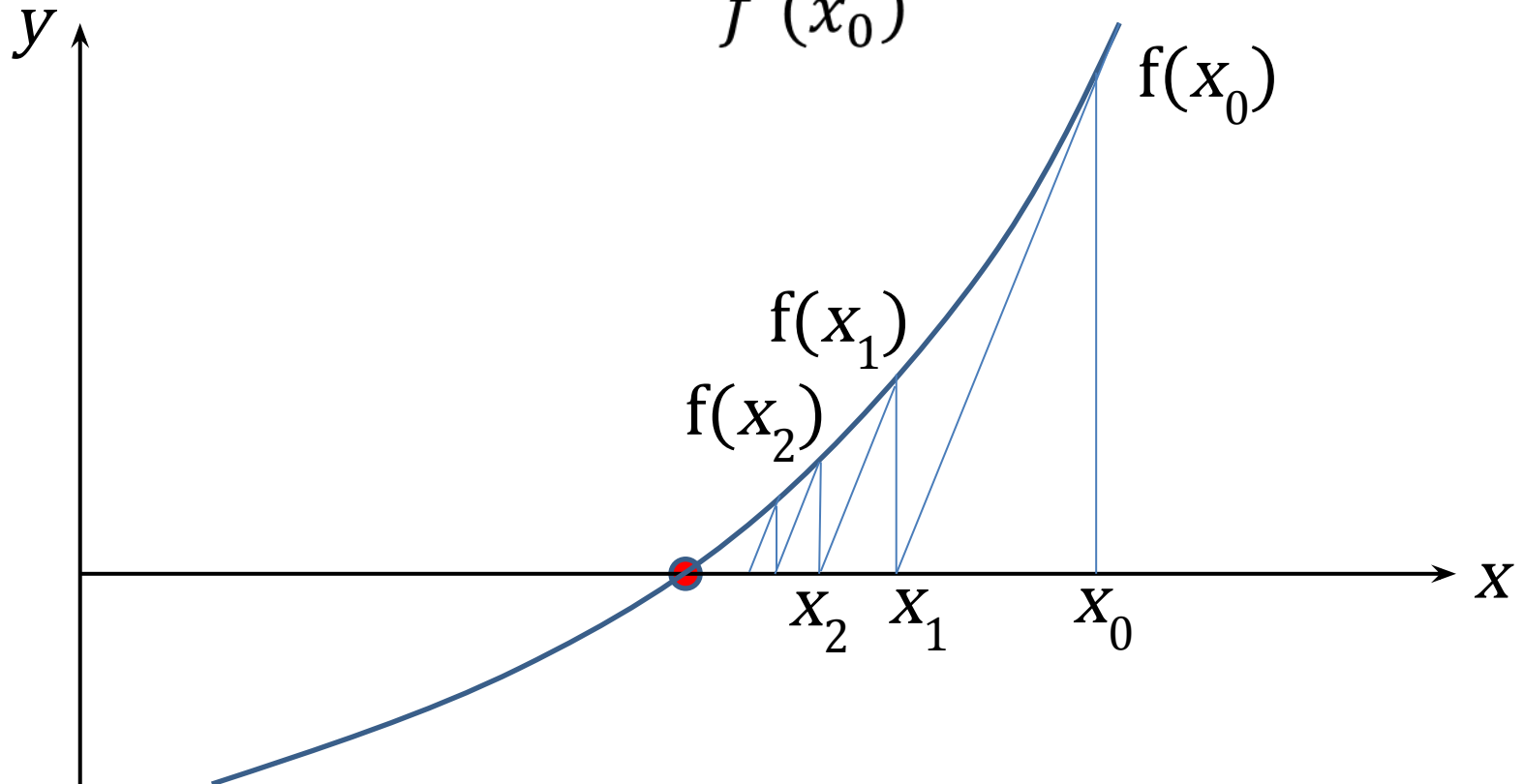
Примеры «плохого» поведения метода  
Н

# Метод Ньютона

Модификации метода

1) Метод «замороженной» производной

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$



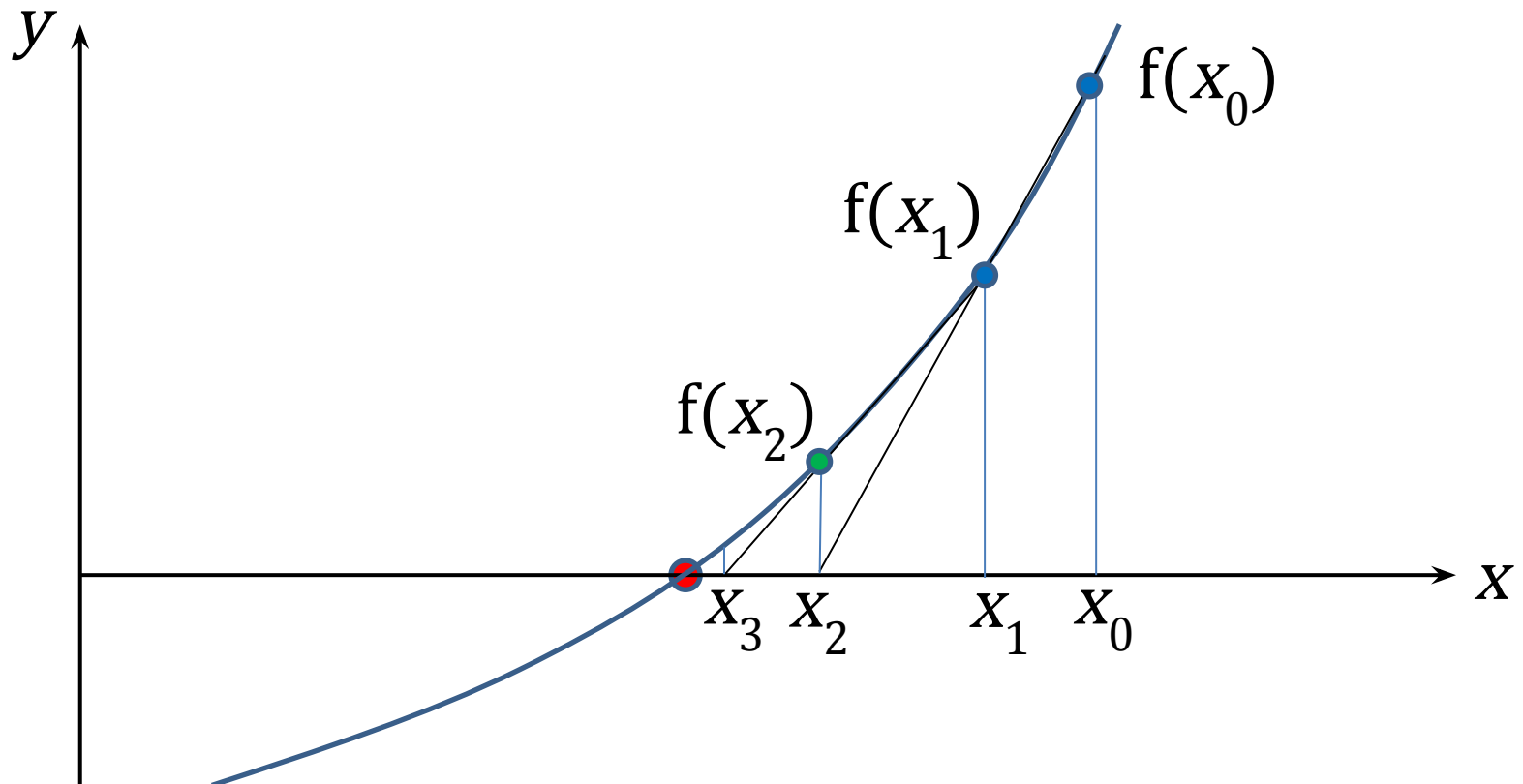


# Метод Ньютона

## Модификации метода Ньютона

2) Метод  
секущих

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$



# Метод Чебышева построения итераций

## ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть уравнение  $y = f(x) = 0$  на  $[a, b]$  имеет корень  $x_*$ .

Пусть  $f'(x) \neq 0$ . Функция  $y = f(x)$  имеет обратную функцию  $x = F(y)$  и  $x \equiv F(f(x))$ .

Тогда

$$x_* = F(0) = F(y) + \frac{F'(y)}{1!} (0 - y)^1 + \frac{F''(y)}{2!} (0 - y)^2 + \dots \approx$$

$$\approx F(y) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{F^{(j)}(y)}{j!} f^j(x)$$

# Метод Чебышева построения итераций высших порядков

Можно записать, что

$$x_* \approx x + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{F^{(j)}(y)}{j!} f^j(x)$$

Следовательно, итерационная схема будет иметь  
вид

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{F^{(j)}(f(x_k))}{j!} f^j(x_k)$$

Найдем производные от обратной функции  $F^{(j)}(f(x_k))$

# Метод Чебышева построения итераций высших порядков

Дифференцируем

соотношение  $x = F(y) \equiv F(f(x))$

$$1 = F'(y)f'(x) \quad \rightarrow \quad F'(y) = 1/f'(x)$$

Дифференцируем соотношение еще раз

$$\begin{aligned} 0 &= F''(y)f'(x)f'(x) + F'(y)f''(x) = \\ &= F''(y)[f'(x)]^2 + f''(x)/f'(x) \end{aligned}$$

# Метод Чебышева построения итераций

## ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$F''(y) = -f''(x)/[f'(x)]^3$$

И т.д.

### *Частные случаи*

$$j=1 \quad x_{k+1} = x_k + (-1)^1 \frac{F^{(1)}(f(x_k))}{1!} f^1(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad - \text{ формула Ньютона}$$

# Метод Чебышева построения итераций

## ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$j=2 \quad x_{k+1} = x_k + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{F^{(j)}(f(x_k))}{j!} f^j(x_k) =$$
$$= x_k + (-1)^1 \frac{F^{(1)}(f(x_k))}{1!} f^1(x_k) + (-1)^2 \frac{F^{(2)}(f(x_k))}{2!} f^2(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(x_k) \cdot f^2(x_k)}{2[f'(x)]^3}$$

# Скорость сходимости методов

$$|X_{k+1} - X_*| = q |X_k - X_*|^\alpha$$

Название метода	$q$	$\alpha$	
Метод половинного деления	0.5	1	
Метод хорд	$1 - \frac{m_1}{M_1}$	1	$m_1 = \min  f'(x) $ $M_1 = \max  f'(x) $
Метод простых итераций	$ \varphi'(x) $	1	
Метод Ньютона	$\frac{M_2}{2m_1}$	2	$M_2 = \max  f''(x) $
Метод Чебышева	$\frac{Q_3}{3!} M_1^3$	3	$Q_3 = \max  F'''(y) $

# Нахождение корней полиномов

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Рассмотренные выше методы решения нелинейных трансцендентных уравнений пригодны и для алгебраических уравнений.

*Особенности нахождения корней*

*полиномов.*

1) Неустойчивость корней некоторых полиномов как функций от их коэффициентов, что предъявляет особые требования к точности вычислений.



# Нахождение корней полиномов

2) Полином степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней, действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

3) Комплексные корни образуют комплексно-сопряженные пары, т.е. каждому корню  $x = c + id$  соответствует  $x = c - id$ .

4) Известны оценки границ корней полинома:

$$r < |x_k| < R$$

# Нахождение корней полиномов

$$R = 1 + \frac{\max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_0|\}}{|a_n|}$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|\}}{|a_0|}}$$

- 1) Это завышенные оценки.
- 2) В связи с малостью  $r$  на практике пользуются оценкой  $|x_k| < R$ .
- 3) Эти оценки справедливы и для комплексных корней.

# Нахождение корней полиномов

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x +$$

Теорема Лагранжа.

Пусть  $a_n > 0$  и  $0 \leq k \leq n-1$  – номер первого отрицательного коэффициента полинома  $P_n(x)$ , если просматривать их в порядке убывания степени  $x$ .

Тогда за верхнюю границу положительных корней

уравнения  $P_n(x)=0$  может быть взято число  $R = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{C}{a_n}}$ .

$C$  – наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов полинома  $P_n(x)$ .

Если отрицательных коэффициентов нет, то  $P_n(x)$  не имеет положительных корней.

# Нахождение корней полиномов

Как быть, если рассматриваемое уравнение имеет **комплексные корни**?

1) Если все значения функции вещественны и в качестве начального приближения  $x_0$  также взято **вещественное** число, то и все последующие значения  $x_k$  также будут вещественны.

2) Однако если взять в качестве  $x_0$  **комплексное** число, то последующие  $x_k$  **могут** оказаться комплексными.

3) Если найден один комплексный корень  $x_1 = c + id$ , то всегда будет существовать сопряженный ему корень

# Нахождение корней полиномов

Если многочлен  $P_n(x)$  имеет пару комплексно-сопряженных корней  $x_{1,2} = c \pm id$ , то его можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)P_{n-2}(x)$$

$$\text{или } P_n(x) = ((x-c)^2+d^2)P_{n-2}(x)$$

Дальше можно решать уравнение  $P_{n-2}(x) = 0$  вместо  $P_n(x) = 0$ .

# Решение систем нелинейных уравнений

В координатном виде система нелинейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

или

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

В векторном виде  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T; \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

# Метод простых итераций

Представим исходную систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

В векторном виде:  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x})$

Метод простых итераций записывается в виде:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$$

$\mathbf{x}^{(0)}$  – вектор начального приближения

Достаточное условие сходимости:  $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \leq q < 1$

# Метод простых итераций

Матрица

Якоби:

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В норме Чебышева:

$$\|\varphi'(\mathbf{x})\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$$

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



# Метод простых итераций

В норме Евклида:

$$\|\varphi'(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)^2} \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

Оценка погрешности метода (используемая для прекращения процесса итерации) имеет вид:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$$



# Метод Ньютона

Этот метод обладает гораздо **более быстрой** сходимостью, чем метод простых итераций.

**Недостатки:**

- 1) Очень важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости;
- 2) Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.

# Метод Ньютона

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

или

в векторном виде  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,

# Метод Ньютона

Метод Ньютона можно применить, если могут быть вычислены все частные производные

функций  $f_i$  по переменным  $x_j$ :  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Процесс начинается с задания произвольного начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

Далее разлагаем функцию  $f$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{x}^{(0)}$ :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) + J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) + \dots$$

# Метод Ньютона

$J(\mathbf{x})$  – матрица Якоби, составленная из частных производных:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

# Метод Ньютона

Ограничиваясь линейным приближением,

имеем:  $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^{(0)}) + J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)})$

Предположим, что  $f(\mathbf{x})=0$ , тогда

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) + J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \approx \mathbf{0}$$

Чтобы найти следующее приближение  $\mathbf{x}^{(1)}$  к решению системы  $f(\mathbf{x})=0$ , решаем систему уравнений:

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) + J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{0}$$

# Метод Ньютона

Для нахождения приближения  $\mathbf{x}^{(k)}$ , решаем систему уравнений:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + J(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

Эту систему можно переписать для поправки  $\Delta\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}$$



# Метод Ньютона

Решение можно записать и в другом виде – непосредственно для  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [J(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Систему линейных уравнений, как правило, решать проще, чем искать обратную матрицу

$$[J(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}.$$

Еще одно ограничение, накладываемое на метод Ньютона: **определитель** матрицы Якоби должен быть **отличен от нуля**.

# Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений

Рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Матрица  
Якоби:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Обратная ей матрица:  $[J(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} = \frac{1}{|J|} \tilde{A}$

# Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений

$\tilde{A}$  – присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений матрицы  $J(\mathbf{x})$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$|J| = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

# Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений

Уравнение

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [J(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k)} - \frac{1}{|J^{(k)}|} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}^{(k)}$$

# Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений

Для каждой переменной уравнения записываются в виде:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{|J^{(k)}|} \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{|J^{(k)}|} \left( f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^{(k)}$$