

# Теоретическая механика

## Задачи

# Подготовка к Контрольной работе

1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью  $v_0$ . Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

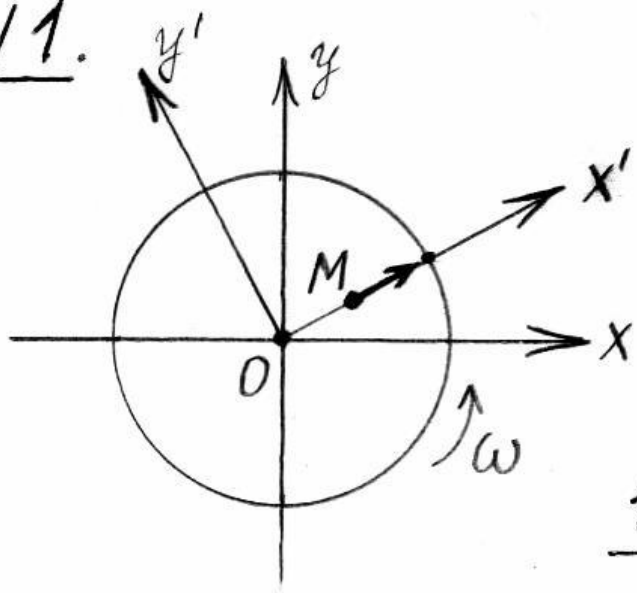
2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 км по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте  $g = 8,5 \text{ м/с}^2$ , а радиус Земли  $R \approx 6370 \text{ км}$ .

4. Точка движется по окружности радиусом  $R$  равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за  $T$  сек. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.

N1.



$$|\vec{v}_{отн}| = v_0 ; \quad \omega = \text{const.}$$

$$\omega_{кор} - ? \quad \omega_{абс} - ?$$

1) Найдем  $\omega_{кор}$ .

1-й способ.

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{— матрица перекоса от } S \text{ к } S';$$

$$\dot{D}(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\dot{\vec{z}}' = \dot{\vec{z}}'_{отн} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\dot{z}' = \dot{z}'_{\text{от}} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\underline{\omega_{\text{кор}}} = 2 \cdot \dot{D} \dot{z}'_{\text{от}} = 2v_0 \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{2v_0 \omega e_\varphi}$$

$$\underline{|\omega_{\text{кор}}| = 2v_0 \omega.}$$

$$\underline{2\text{-й способ.}} \quad \underline{\omega_{\text{кор}}} = 2 \cdot \underline{\Omega} \times v_{\text{отк.}}$$

$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$  — вектор угловой скорости  
повращения системы  $S'$ .

(см. тему "Вращение твердой среды").

$$v_{0M} = D \dot{z}'_{0M} = v_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 e_\varphi.$$

$$\underline{\omega_{\text{кор}}} = \underline{v_0} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\cos \omega t \cdot j - \sin \omega t \cdot i) = \\ = \underline{2v_0 \omega e_\varphi}$$

2) Найдем  $v_{\text{адс}}$ .

$$z' = z'_{0M} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{в кар. момент } t=0 \\ \text{т. М находится в т. О}).$$

$$\underline{z = z_{0M} = D z' = v_0 t \cdot e_\varphi} \quad \text{— закон движения} \\ \text{т. М в S.}$$

$$\underline{v_{\text{адс}} = \dot{z} = v_0 \cdot e_\varphi + v_0 \omega t \cdot e_\varphi.}$$

$$\underline{z = z_{0M} = D z' = v_0 t \cdot e_g} \quad \text{— закон галилея}$$

Т.М. в С.

$$\underline{v_{acc} = \dot{z} = v_0 \cdot e_g + v_0 \omega t \cdot e_\varphi.}$$

$$\underline{w_{acc} = \ddot{z} = v_0 \omega \cdot e_\varphi + v_0 \omega \cdot e_\varphi +}$$
$$+ v_0 \omega^2 t \cdot (-e_g) = \underline{-v_0 \omega^2 t \cdot e_g +}$$
$$\underline{+ 2 v_0 \omega \cdot e_\varphi.}$$

$$\underline{|w_{acc}| = v_0 \omega \sqrt{4 + \omega^2 t^2}.}$$

N2 (12.2).



т. С - точка на свае.

$$T = 0,02 \text{ с}; \quad v_k = 0;$$

$$l = 6 \text{ см} = 0,06 \text{ м.}$$

Найти:  $v_0$ .

1)	$\ddot{x} = a = \text{const}$	(1)
	$\dot{x} = at + v_0 = v_x(t)$	(2)
	$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t$	(3)

(считаем, что  $x_0 = 0$ ).

Движение равнозамедленное  $\Rightarrow \underline{a < 0}$ .

Движение равнозамедленное  $\Rightarrow$   $a < 0$ .

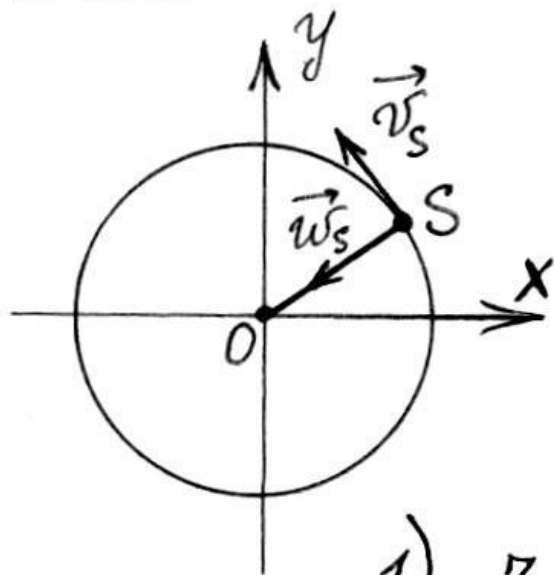
2) Имеем:  $v(T) = v_k = 0$ ,  $x(T) = l$   
(начальный момент  $t = 0$  — момент удара).

Тогда: 
$$\begin{cases} aT + v_0 = 0, \\ \frac{aT^2}{2} + v_0T = l. \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{2l}{T}}$$

$$\underline{\underline{v_0}} = \frac{2 \cdot 0,06}{0,02} = \underline{\underline{6}} \text{ (м/с)}.$$



N3.



$$\rho = R + H; \quad R = 6370 \text{ km};$$

$$H = 500 \text{ km};$$

$$|\omega_s| = g = 8,5 \text{ m/s}^2.$$

---

$$\text{Найти: } T \text{ и } v = |\mathbf{v}_s|.$$

---

$$1) \quad \mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_s = \rho \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \rho \mathbf{e}_s;$$

$$\rho = \text{const}; \quad \mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{r}} = \rho \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \rho \omega \cdot \mathbf{e}_\varphi;$$

$$\omega_s = \ddot{\mathbf{r}} = -\rho \omega^2 \cdot \mathbf{e}_s.$$

$$\text{Тогда } g = |\omega_s| = \rho \omega^2, \quad \underline{|\mathbf{v}_s| = \rho \omega}.$$

$$\text{След-но, } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}}} \quad (1)$$

$$g = \text{const}; \quad v_s = \dot{z} = g\dot{\varphi} \cdot e_\varphi = g\omega \cdot e_\varphi;$$

$$w_s = \ddot{z} = -g\omega^2 \cdot e_s.$$

Тогда  $g = |w_s| = g\omega^2, \quad \underline{|v_s| = g\omega}.$

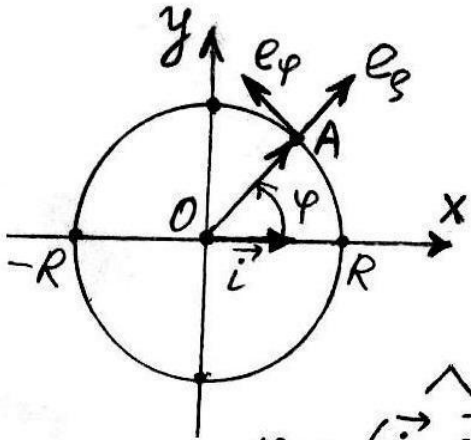
След-но,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{s}} \quad (1)$

2) Из (1)  $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}}$

( $\varphi(t) = \omega t \Rightarrow 2\pi = \varphi(T) = \omega T$ ).

3)  $\underline{|v_s| = g\omega \stackrel{(1)}{=} g\sqrt{\frac{g}{s}} = \underline{\underline{\sqrt{gs}}}}$

N4.



$$\varphi = (\vec{i}, \widehat{OA})$$

A движется против часовой стрелки

Дано:  $R$  - радиус окружности;  
 $\ddot{\varphi}(t) = \text{const}$  (равноускоренное движение по окружности);  
 $|v_A(0)| = 0$  (т. движется из состояния покоя);  
 $T$  - время 1-го полного оборота.

Найти:  $|v_A(T)|$  и  $|w_A(T)|$ .

1) Движение т. А - равноускоренное  $\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \text{const} = \overset{\text{обозн.}}{\varepsilon}$

След-но,  $\boxed{\dot{\varphi}(t) = \varepsilon t + c^0 = \varepsilon t}$  (1) ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ , т.к.  $|v_A(0)| = 0 = R\dot{\varphi}(0)$ ).

Тогда  $\boxed{\varphi(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}}$  (2) ( $\varphi(0) = 0$ , т.к. ось  $Ox$  проведена через начальное положение т. А).

Найдем  $\varepsilon$ :  $\varphi(T) = 2\pi \stackrel{(2)}{=} \frac{\varepsilon T^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{4\pi}{T^2}}$  (3)

(полный оборот)

Найдем  $\varepsilon$  :  $\varphi(T) = 2\pi \stackrel{(2)}{=} \frac{\varepsilon T^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{4\pi}{T^2}} \quad (3)$   
 (полный оборот)

2) Закон движения т. А:  $\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = R \cdot \underline{e_\varphi}$

Скорость т. А :  $\vec{v}_A(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = R \dot{\varphi} \cdot \underline{e_\varphi}$ ;

$|\vec{v}_A(T)| = R \dot{\varphi}(T) \stackrel{(1)}{=} R \varepsilon T \stackrel{(3)}{=} R \cdot \frac{4\pi}{T^2} \cdot T = \underline{\underline{\frac{4\pi R}{T}}}$

( $\dot{\varphi}(t) > 0$ , т.к.  $\varphi(t)$  - возр.)

Ускорение т. А:  $\vec{w}_A(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = R \ddot{\varphi} \underline{e_\varphi} + R \dot{\varphi}^2 (-\underline{e_\varphi}) =$

$= R \varepsilon \cdot \underline{e_\varphi} - R(\varepsilon t)^2 \cdot \underline{e_\varphi} \Rightarrow \vec{w}_A(T) = \frac{4\pi R}{T^2} \underline{e_\varphi} - \frac{16\pi^2 R}{T^2} \cdot \underline{e_\varphi}$ ;

$|\vec{w}_A(T)| = \frac{4\pi R}{T^2} \sqrt{1 + 16\pi^2}$