Теоретическая механика

Задачи

Подготовка к Контрольной работе

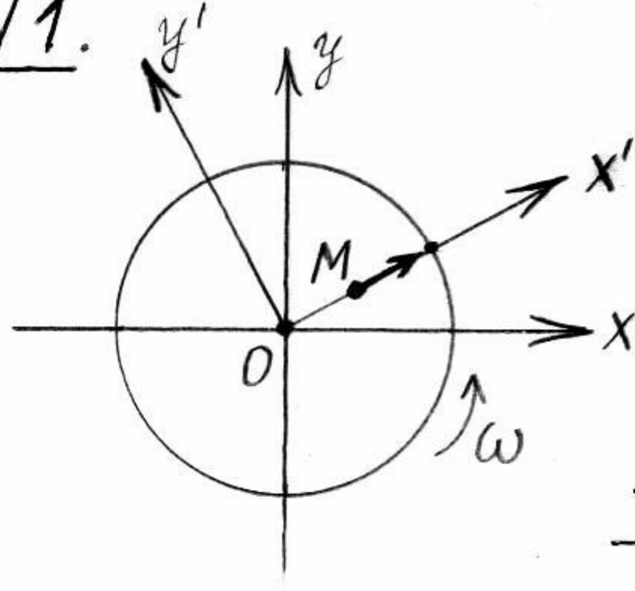
1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью v_0. Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω.

2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 *км* по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте $g = 8,5$ *м*$/$*с*^{2}, а радиус Земли $R \approx 6370$ *км*.

4. Точка движется по окружности радиусом R равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за T *сек*. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.

N1. 

$|v_{отн}| = v_0$; $\omega = const.$

$w_{кор}$ — ? $w_{абс}$ — ?

1) Найдем $w_{кор}$.

1-й способ.

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — м-да перехода от S к S';

$$\dot{D}(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\dot{r}' = \dot{r}'_{от} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\dot{r}' = \dot{r}'_{\text{от}} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\underline{w_{\text{кор}}} = 2 \cdot D\,\dot{r}'_{\text{от}} = 2 v_0 \omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{2 v_0 \omega e_\varphi}$$

$$\underline{|w_{\text{кор}}| = 2 v_0 \omega.}$$

<u>2-й способ.</u> $\underline{w_{\text{кор}} = 2 \cdot \Omega \times v_{\text{отн}}.}$

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ – вектор угловой скорости подвижн. системы S'.

(см. тему "Вращение твердой среды").

$$v_{отн} = D\dot{r}'_{от} = v_0 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 e_\rho .$$

$$\underline{w_{кор}} = 2v_0 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_0(\cos\omega t \cdot j - \sin\omega t \cdot i) =$$

$$= \underline{2v_0\omega e_\varphi}$$

2) Найдем $w_{абс}$.

$$r' = r'_{от} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (в нач. момент $t=0$ т. M наход-ся в т. O).

$\underline{r = r_{от} = Dr' = v_0 t \cdot e_\rho}$ – закон движ-я т. M в S.

$$\underline{v_{абс} = \dot{r} = v_0 \cdot e_\rho + v_0 \omega t \cdot e_\varphi .}$$

$$\underline{r = r_{OM} = Dr' = v_0 t \cdot e_\rho}$$ – закон движ-е т. M в S.

$$\underline{v_{абс} = \dot{r} = v_0 \cdot e_\rho + v_0 \omega t \cdot e_\varphi.}$$

$$\underline{w_{абс}} = \ddot{r} = v_0 \omega \cdot e_\varphi + v_0 \omega \cdot e_\varphi +$$

$$+ v_0 \omega^2 t \cdot (-e_\rho) = \underline{- v_0 \omega^2 t \cdot e_\rho +}$$

$$\underline{+ 2 v_0 \omega \cdot e_\varphi.}$$

$$\underline{|w_{абс}| = v_0 \omega \sqrt{4 + \omega^2 t^2}.}$$

№2 (12.2).

т. C – точка на свае.

$T = 0{,}02$ с; $v_k = 0$;

$l = 6$ см $= 0{,}06$ м.

Найти: v_0.

1)
$$\boxed{\ddot{x} = a = \text{const}} \quad (1)$$

$$\boxed{\dot{x} = at + v_0 = v_x(t)} \quad (2)$$

$$\boxed{x = \frac{at^2}{2} + v_0 t} \quad (3)$$

(считаем, что $x_0 = 0$).

Движение равнозамедленное $\Rightarrow$ $a < 0$.

Движение равнозамедленное $\Rightarrow$ $\underline{a < 0}$.

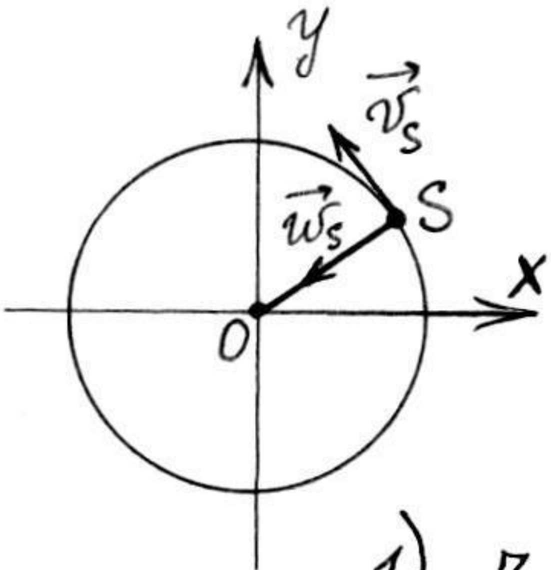
2) Имеем: $v(T) = v_к = 0$, $x(T) = \ell$

(начальный момент $t = 0$ — момент удара).

Тогда: $\begin{cases} aT + v_0 = 0, \\ \dfrac{aT^2}{2} + v_0 T = \ell. \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_0 = \dfrac{2\ell}{T}}$

$$\underline{\underline{v_0}} = \frac{2 \cdot 0{,}06}{0{,}02} = \underline{\underline{6\,(м/с)}}.$$

N3.



$\rho = R + H$; $R = 6370$ км;

$H = 500$ км;

$|w_s| = g = 8{,}5$ м/с².

Найти: T и $v = |v_s|$.

1) $r = r_{OS} = \rho \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \rho e_\rho$;

$\rho = \mathrm{const}$; $v_s = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} \cdot e_\varphi = \rho \omega \cdot e_\varphi$;

$w_s = \ddot{r} = -\rho \omega^2 \cdot e_\rho$.

Тогда $\underline{g = |w_s| = \rho \omega^2}$, $\underline{|v_s| = \rho \omega}$.

След-но, $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}$ (1)

$\rho = const$; $\quad v_s = \dot{r} = \rho\dot{\varphi}\cdot e_\varphi = \rho\omega\cdot e_\varphi$;

$w_\rho = \ddot{r} = -\rho\omega^2\cdot e_\rho$.

Тогда $\quad \underline{g = |w_s| = \rho\omega^2}, \quad \underline{|v_s| = \rho\omega}$.

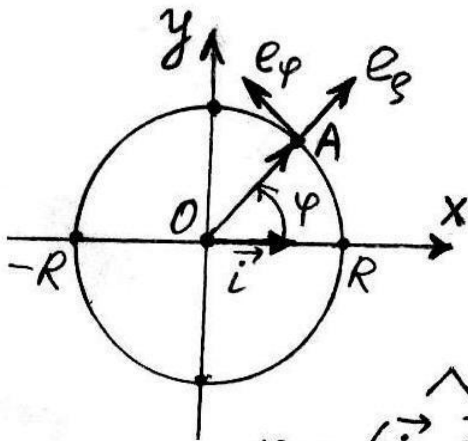
След-но, $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}$ (1)

2) Из (1) $\Rightarrow$ $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho}{g}}}$

$\left(\varphi(t) = \omega t \Rightarrow 2\pi = \varphi(T) = \omega T\right)$.

3) $\boxed{|v_s| = \rho\omega \overset{(1)}{=} \rho\sqrt{\dfrac{g}{\rho}} = \sqrt{g\rho}}$.

№4.



$\varphi = (\widehat{\vec{i}, \vec{OA}})_н$

A движ-ся против часовой стрелки

Дано: R – радиус окружности;

$\ddot{\varphi}(t) = const$ (равноускор-е движ-е по окружности);

$|v_A(0)| = 0$ (т. движется из состояния покоя);

T – время 1-го полного оборота.

Найти: $|v_A(T)|$ и $|w_A(T)|$.

1) Движение т. A – равноускоренное $\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = const \overset{обозн.}{=} \varepsilon$

След-но, $\boxed{\dot{\varphi}(t) = \varepsilon t + \overset{=0}{c} = \varepsilon t}$ (1) ($\dot{\varphi}(0) = 0$, т.к. $|v_A(0)| = 0 = R\dot{\varphi}(0)$).

Тогда $\boxed{\varphi(t) = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}}$ (2) ($\varphi(0) = 0$, т.к. ось Ox проведена через начальное положение т. A).

Найдем ε: $\underset{\text{(полный оборот)}}{\varphi(T) = 2\pi} \overset{(2)}{=} \dfrac{\varepsilon T^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \dfrac{4\pi}{T^2}}$ (3)

Найдем ε: $\varphi(T) = 2\pi \overset{(2)}{=} \dfrac{\varepsilon T^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \dfrac{4\pi}{T^2}}$ (3)

(полный оборот)

2) Закон движения т. A: $r(t) = R\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}}_{= e_\rho} = R\cdot e_\rho$.

Скорость т. A: $v_A(t) = \dot r(t) = R\dot\varphi\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}}_{= e_\varphi} = R\dot\varphi\cdot e_\varphi$;

$$|v_A(T)| = R\dot\varphi(T) \overset{(1)}{=} R\varepsilon T \overset{(3)}{=} R\cdot\frac{4\pi}{T^2}\cdot T = \frac{4\pi R}{T}.$$

$(\dot\varphi(t) > 0$, т.к. $\varphi(t)$ – возр.$)$

Ускорение т. A: $w_A(t) = \ddot r(t) = R\ddot\varphi e_\varphi + R\dot\varphi^2(-e_\rho) =$

$$= R\varepsilon\cdot e_\varphi - R(\varepsilon t)^2\cdot e_\rho \Rightarrow w_A(T) = \frac{4\pi R}{T^2}e_\varphi - \frac{16\pi^2 R}{T^2}\cdot e_\rho;$$

$$|w_A(T)| = \frac{4\pi R}{T^2}\sqrt{1+16\pi^2}.$$