

# Семинар 7

доцент Волков Н.П.

## Занятие 7

### Плоскость в пространстве.

915]  $P(2; -1; -1)$   $\vec{OP} \perp \Pi$ , т.е.  $\vec{n} = \vec{OP}$

Решение  $\vec{OP} = \{2; -1; -1\}$   $M(x, y, z) \in \Pi$

$$\Rightarrow \vec{PM} \in \Pi \quad \vec{OP} \cdot \vec{PM} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2) - 1(y+1) - 1(z+1) = 0$$

$$\boxed{\Pi: 2x - y - z - 6 = 0}$$

919]  $\Pi - ?$   $\Pi \ni M_1(2; -1; 3)$ ,  $\Pi \ni M_2(3; 1; 2)$

$$\Pi \parallel \vec{a} = \{3; -1; 4\}$$

Решение:  $\forall$  точки  $M(x, y, z) \in \Pi \Rightarrow \vec{M_1M} \in \Pi$

$$\Rightarrow \vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}, \vec{a} - \text{копланарные векторы}$$

$$\Rightarrow \vec{M_1M} \cdot \vec{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \Pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \Pi: (x-2)(8-1) - (y+1)(4+3) + (z-3)(-1-6) = 0$$

$$\Rightarrow \Pi: 7x - 7y - 7z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi: x - y - z = 0}$$

925] 1)  $\Pi_1: 3x - y - 2z - 5 = 0$ ,  $\Pi_2: x + 9y - 3z + 2 = 0$

$$\vec{n}_1 = \{3; -1; -2\}, \vec{n}_2 = \{1; 9; -3\}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{\Pi_1 \perp \Pi_2}$$

$$2) \Pi_1: 2x + 3y - z - 3 = 0, \Pi_2: x - y - z + 5 = 0$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 3 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\Pi_1 \perp \Pi_2}$$

$$3) \Pi_1: 2x - 5y + z = 0, \Pi_2: x + 2z - 3 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \{2; -5; 1\}, \vec{n}_2 = \{1; 0; 2\}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0 \quad \underline{\Pi_1 \nparallel \Pi_2}$$

930]  $\Pi - ? : \Pi \ni M_1(3; -2; -7), \Pi \parallel \Pi_1: 2x - 3z + 5 = 0$

Решение  $\vec{n} = \vec{n}_1 = \{2; 0; -3\}$

$$\forall \text{ точки } M(x, y, z) \in \Pi \Rightarrow \vec{M_1M} \in \Pi$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{M_1M} \Rightarrow \vec{M_1M} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \Pi: 2(x-3) + 0 \cdot (y+2) - 3(z+7) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi: 2x - 3z - 27 = 0}$$

937]  $\Pi_1: 7x + 4y + 7z + 1 = 0, \Pi_2: 2x - y - z + 2 = 0,$   
 $\Pi_3: x + 2y + 3z - 1 = 0$

Решение: Составим пучок плоскостей

$$\alpha(2x - y - z + 2) + \beta(x + 2y + 3z - 1) = 0 (*)$$

$$\Rightarrow (2\alpha + \beta)x + (-\alpha + 2\beta)y + (-\alpha + 3\beta)z + 2\alpha - \beta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 7 \\ -\alpha + 2\beta = 4 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow 5\beta = 15 \Rightarrow \beta = 3, \alpha = 2$$

При  $\alpha = 2, \beta = 3$  уравнение (\*) совпадает с уравнением г.л.  $\Pi_1$ , т.е. эти плоскости принадлежат пучку плоскостей.

$$947] \Pi: 2x - 3y + 6z - 12 = 0$$

Решение:  $\Pi: \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$  - уравнение  
в отрезках

$$\Omega_{\text{пар.}} = \frac{1}{6} 6 \cdot 4 \cdot 2 = \boxed{8}$$

$$957] 1) \Pi_1: 2x - 2y + z - 18 = 0$$

Решение:  $\mu = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\Pi_1: \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0}$$

$$2) \Pi_2: \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$$

Решение:  $\mu = \frac{-1}{\frac{\sqrt{9+36+4}}{49}} = \frac{-1}{1} = -1$

$$\boxed{\Pi_2: -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 3 = 0}$$

$$959] 1) M_1(-2; -4; 3), \Pi_1: 2x - y + 2z + 3 = 0$$

$$\delta(M_1, \Pi_1) = ? \quad \rho(M_1, \Pi_1) = ?$$

Решение:  $\mu = \frac{-1}{\sqrt{4+1+4}} = -\frac{1}{3}$

$$\Pi_1: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

$$\delta(M_1, \Pi_1) = -\frac{2}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-4) - \frac{2}{3}(3) - 1 = \boxed{-3}$$

$$\rho(M_1, \Pi_1) = |\delta(M_1, \Pi_1)| = \boxed{3}$$

$$2) \quad M_2(2; -1; -1), \quad \Pi_2: 16x - 12y + 15z - 4 = 0$$

Решение:  $\mu = \frac{1}{\sqrt{256+144+225}} = \frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}$

$$\Pi_2: \frac{16}{25}x - \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z - \frac{4}{25} = 0$$

$$\delta(M_2, \Pi_2) = \frac{16}{25} \cdot 2 - \frac{12}{25} - \frac{15}{25} - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} = \boxed{1}$$

$$\rho(M_2, \Pi_2) = |\delta(M_2, \Pi_2)| = \boxed{1}$$

975] 1)  $M(2; -1; 1), \quad N(1; 2; -3)$

$$\Pi_1: 3x - y + 2z - 3 = 0, \quad \Pi_2: x - 2y - z + 4 = 0$$

Решение:  $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$

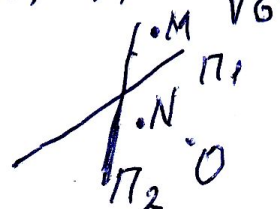
$$\Pi_1: \frac{1}{\sqrt{14}}(3x - y + 2z - 3) = 0, \quad \Pi_2: \frac{1}{\sqrt{6}}(-x + 2y + z - 4) = 0$$

$$\delta(M, \Pi_1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3 \cdot 2 + 1 + 2 - 3) = \frac{6}{\sqrt{14}} > 0$$

$$\delta(N, \Pi_1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3 - 2 - 6 - 3) = -\frac{8}{\sqrt{14}} < 0$$

$$\delta(M, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2 - 2 + 1 - 4) = -\frac{7}{\sqrt{6}} < 0$$

$$\delta(N, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 + 4 - 3 - 4) = -\frac{4}{\sqrt{6}} < 0$$

 Итак, точки  $M$  и  $N$  находятся в смежных углах.

977  $M(3; 2; -1), \Pi_1: 5x - y + z + 3 = 0$

$\Pi_2: 4x - 3y + 2z + 5 = 0$

Решение:  $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{25+1+1}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{16+9+4}} = -\frac{1}{\sqrt{29}}$

$\Pi_1: \frac{1}{3\sqrt{3}}(-5x + y - z - 3) = 0; \Pi_2: \frac{1}{\sqrt{29}}(-4x + 3y - 2z - 5) = 0$

$\Rightarrow \vec{n}_1 = \left\{ -\frac{5}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{3\sqrt{3}}; -\frac{1}{3\sqrt{3}} \right\}, \vec{n}_2 = \left\{ -\frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}} \right\}$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{29}}(20 + 3 + 2) > 0 \quad (\vec{n}_1, \vec{n}_2) - \text{острый}$

Начало координат лежит в тупом двугранном угле.

$\delta(M, \Pi_1) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-15 + 2 + 1 - 3) < 0$

$\delta(M, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-12 + 6 + 2 - 5) < 0$

Точки  $M$  и  $O$  лежат в одном угле.

Тогда точка  $M$  лежит в тупом двугранном угле.

979  $\Pi_1: 2x - y + 2z - 3 = 0, \Pi_2: 3x + 2y - 6z - 1 = 0$

$M(1; 2; -3). \Pi_3 - ?$

Решение:  $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}; \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{1}{7}$

$\Pi_1: \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0, \Pi_2: \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{1}{7} = 0$

$\delta(M, \Pi_1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - 2 - 1 = -3 < 0$

$\delta(M, \Pi_2) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{18}{7} - \frac{1}{7} = \frac{24}{7} > 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{не смежную} \\ \text{двугранную} \\ \text{углу!} \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \forall \text{ точки } M(x, y, z) \in \Pi_{\delta} \Rightarrow \delta(M, \Pi_1) = -\delta(M, \Pi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \Pi_{\delta}: \frac{23}{21}x - \frac{1}{21}y - \frac{4}{21}z - \frac{24}{21} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_{\delta}: 23x - y - 4z - 24 = 0}$$

981)  $\Pi_1: 3x - 4y - z + 5 = 0$ ,  $\Pi_2: 4x - 3y + z + 5 = 0$

Пл тупого угла?

Решение:  $\mu_1 = \frac{-1}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{-1}{\sqrt{26}}$ ,  $\mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{-1}{\sqrt{26}}$

$$\Pi_1: \frac{1}{\sqrt{26}}(-3x + 4y + z - 5) = 0; \quad \Pi_2: \frac{1}{\sqrt{26}}(-4x + 3y - z - 5) = 0$$

$$\vec{n}_1 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{26}}; \frac{4}{\sqrt{26}}; \frac{1}{\sqrt{26}} \right\}, \quad \vec{n}_2 = \left\{ -\frac{4}{\sqrt{26}}; \frac{3}{\sqrt{26}}; -\frac{1}{\sqrt{26}} \right\}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{12}{26} + \frac{12}{26} - \frac{1}{26} = \frac{23}{26} > 0 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) - \text{острый}$$

$\Rightarrow O(0,0,0)$  лежит в тупом двугранном <sup>угол</sup> угле.

$\Pi_{\delta}$  - биссекторная плоскость двугранного угла, в котором лежит  $O(0,0,0)$ .

$$\Rightarrow \forall \text{ точки } M(x, y, z) \in \Pi_{\delta} \quad \delta(M, \Pi_1) = \delta(M, \Pi_2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{26}}(-3x + 4y + z - 5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4x + 3y - z - 5)$$

$$\boxed{\Pi_{\delta}: x + y + 2z = 0}$$

## Прямая в пространстве

985]  $\ell: \begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases} \quad \ell \cap Oy = ?$

Решение:  $\exists ?$  точка  $M_0 = \ell \cap Oy$

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y+5z-6=0 & | \cdot 5 \\ 5y-7z+10=0 & | \cdot 3 \end{cases} +$$

$$\Rightarrow 4z=0 \Rightarrow z=0, y=-2 \Rightarrow M_0(0; -2; 0)$$

989] Пучок плоскостей  $2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$

1)  $\Pi_1 \ni M_1(1; -2; 3)$   $\Pi_1 = ?$

$$2+6+3-3+\lambda(1-6+6+1)=0 \Rightarrow 2\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=-4$$

$$\Pi_1: 2x-3y+z-3-4(x+3y+2z+1)=0$$

$$\Pi_1: -2x-15y-7z-7=0$$

$$\boxed{\Pi_1: 2x+15y+7z+7=0}$$

2)  $\Pi_2 = ?$   $\Pi_2 \parallel Ox \Rightarrow \vec{n}_2 \perp Ox \Leftrightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{r}$

$$\Pi_2: (2+\lambda)x + (-3+3\lambda)y + (1+2\lambda)z + (-3+\lambda) = 0$$

$$\vec{r} = \{1; 0; 0\}, \quad \vec{n}_2 = \{(2+\lambda); (-3+3\lambda); (1+2\lambda)\}$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{r} = 2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$$

$$\Pi_2: 0 \cdot x - 9y - 3z - 5 = 0$$

$$\boxed{\Pi_2: 9y + 3z + 5 = 0}$$

$$993) \Pi - ? \quad \Pi \ni \ell: \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Pi \perp \Pi_1: x - 2y + z + 5 = 0$$

Решение:  $\Pi: \alpha(3x - 2y + z - 3) + \beta(x - 2z) = 0$

$$\Pi: (3\alpha + \beta)x - 2\alpha y + (\alpha - 2\beta)z - 3\alpha = 0 \quad (*)$$

$$\Pi \perp \Pi_1 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\vec{n} = \{3\alpha + \beta; -2\alpha; \alpha - 2\beta\}, \quad \vec{n}_1 = \{1; -2; 1\}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 3\alpha + \beta + 4\alpha + \alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow 8\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 8$$

Из (\*)  $\boxed{\Pi: 11x - 2y - 15z - 3 = 0}$

---

Дома: К. 917, 921, 926, 931, 939, 950, 956(1,3),  
 957(3,4,5), 959(ост.), 974, 975(2), 976, 978,  
 980, 986, 988, 989(3,4), 990, 1006.

