Семинар 7

доцент Волков Н.П.

Занятие 7

Плоскость в пространстве.

915 $P(2;-1;-1)$ $\overrightarrow{OP} \perp \Pi$, т.е. $\vec{n}_\Pi = \overrightarrow{OP}$

Решение $\overrightarrow{OP} = \{2;-1;-1\}$ $M(x,y,z) \in \Pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{PM} \in \Pi$ $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$

$\Rightarrow 2(x-2) - 1(y+1) - 1\cdot(z+1) = 0$

$\boxed{\Pi: 2x - y - z - 6 = 0}$

919 Π - ? $\Pi \ni M_1(2;-1;3)$, $\Pi \ni M_2(3;1;2)$

$\Pi \parallel \vec{a} = \{3;-1;4\}$

Решение: $\forall$ точки $M(x,y,z) \in \Pi \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} \in \Pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}$ - компланарные векторы

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \Pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \Pi: (x-2)(8-1) - (y+1)(4+3) + (z-3)(-1-6) = 0$

$\Rightarrow \Pi: 7x - 7y - 7z = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Pi: x - y - z = 0}$

925 1) $\Pi_1: 3x - y - 2z - 5 = 0$, $\Pi_2: x + 9y - 3z + 2 = 0$

$\vec{n}_1 = \{3;-1;-2\}$, $\vec{n}_2 = \{1;9;-3\}$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{\Pi_1 \perp \Pi_2}$

2) $\Pi_1: 2x+3y-z-3=0$, $\Pi_2: x-y-z+5=0$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2-3+1=0 \Rightarrow \underline{\Pi_1 \perp \Pi_2}$

3) $\Pi_1: 2x-5y+z=0$, $\Pi_2: x+2z-3=0$

$\vec{n}_1=\{2;-5;1\}$, $\vec{n}_2=\{1;0;2\}$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2+0+2=4\neq 0$ $\quad \underline{\Pi_1 \not\perp \Pi_2}$

930 Π-? : $\Pi \ni M_1(3;-2;-7)$, $\Pi \parallel \Pi_1: 2x-3z+5=0$

Решение $\vec{n}=\vec{n}_1=\{2;0;-3\}$

$\forall$ точки $M(x,y,z)\in\Pi \Rightarrow \overrightarrow{M_1M}\in\Pi$

$\Rightarrow \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}_1=0$

$\Rightarrow \Pi: 2(x-3)+0\cdot(y+2)-3(z+7)=0$

$\Rightarrow \boxed{\Pi: 2x-3z-27=0}$

937 $\Pi_1: 7x+4y+7z+1=0$, $\Pi_2: 2x-y-z+2=0$,

$\Pi_3: x+2y+3z-1=0$

Решение: Составим пучок плоскостей

$\alpha(2x-y-z+2)+\beta(x+2y+3z-1)=0$ (*)

$\Rightarrow (2\alpha+\beta)x+(-\alpha+2\beta)y+(-\alpha+3\beta)z+2\alpha-\beta=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=7 \\ -\alpha+2\beta=4 \end{cases} \Big| \cdot 2 + \Rightarrow 5\beta=15 \Rightarrow \beta=3, \alpha=2$

При $\alpha=2$, $\beta=3$ уравнение (*) совпадает с уравнением для Π_1, т.е. эти плоскости принадлежат пучку плоскостей.

947 $\Pi: 2x-3y+6z-12=0$

Решение: $\Pi: \frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$ – уравнение в отрезках

$\Omega_{пир.}=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 4\cdot 2=\boxed{8}$

957 1) $\Pi_1: 2x-2y+z-18=0$

Решение: $\mu=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}$

$\boxed{\Pi_1: \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0}$

2) $\Pi_2: \frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$

Решение: $\mu=\frac{-1}{\sqrt{\frac{9+36+4}{49}}}=\frac{-1}{1}=-1$

$\boxed{\Pi_2: -\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0}$

959 1) $M_1(-2;-4;3)$, $\Pi_1: 2x-y+2z+3=0$

$\delta(M_1,\Pi_1)=?$ $\rho(M_1,\Pi_1)=?$

Решение: $\mu=\frac{-1}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{1}{3}$

$\Pi_1: -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$

$\delta(M_1,\Pi_1)=-\frac{2}{3}(-2)+\frac{1}{3}(-4)-\frac{2}{3}(3)-1=\boxed{-3}$

$\rho(M_1,\Pi_1)=|\delta(M_1,\Pi_1)|=\boxed{3}$

2) $M_2(2;-1;-1)$, $\Pi_2: 16x-12y+15z-4=0$

Решение: $\mu = \frac{1}{\sqrt{256+144+225}} = \frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}$

$\Pi_2: \frac{16}{25}x - \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z - \frac{4}{25} = 0$

$\delta(M_2, \Pi_2) = \frac{16}{25}\cdot 2 + \frac{12}{25} - \frac{15}{25} - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} = \boxed{1}$

$\rho(M_2, \Pi_2) = |\delta(M_2, \Pi_2)| = \boxed{1}$

975] 1) $M(2;-1;1)$, $N(1;2;-3)$

$\Pi_1: 3x-y+2z-3=0$, $\Pi_2: x-2y-z+4=0$

Решение: $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$

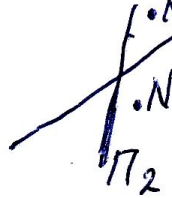
$\Pi_1: \frac{1}{\sqrt{14}}(3x-y+2z-3)=0$, $\Pi_2: \frac{1}{\sqrt{6}}(-x+2y+z-4)=0$

$\delta(M;\Pi_1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\cdot 2+1+2-3) = \frac{6}{\sqrt{14}} > 0$

$\delta(N, \Pi_1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3-2-6-3) = -\frac{8}{\sqrt{14}} < 0$

$\delta(M, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2-2+1-4) = -\frac{7}{\sqrt{6}} < 0$

$\delta(N, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1+4-3-4) = -\frac{4}{\sqrt{6}} < 0$



Итак, точки M и N находятся в смежных углах.

977 $M(3;2;-1)$, $\Pi_1: 5x-y+z+3=0$

$\Pi_2: 4x-3y+2z+5=0$

Решение: $\mu_1 = \frac{-1}{\sqrt{25+1+1}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{16+9+4}} = \frac{-1}{\sqrt{29}}$

$\Pi_1: \frac{1}{3\sqrt{3}}(-5x+y-z-3)=0$; $\Pi_2: \frac{1}{\sqrt{29}}(-4x+3y-2z-5)=0$

$\Rightarrow \vec{n}_1 = \left\{-\frac{5}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{3\sqrt{3}}; -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right\}$, $\vec{n}_2 = \left\{-\frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}}\right\}$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{29}}(20+3+2) > 0$ $(\hat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$ – острый

Начало координат лежит в тупом двугранном угле.

$\delta(M, \Pi_1) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-15+2+1-3) < 0$

$\delta(M, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-12+6+2-5) < 0$

Точки M и O лежат в одном угле.

Тогда точка M лежит в тупом двугранном угле.

979 $\Pi_1: 2x-y+2z-3=0$, $\Pi_2: 3x+2y-6z-1=0$

$M(1;2;-3)$. Π_8 – ?

Решение: $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}$; $\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{1}{7}$

$\Pi_1: \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$, $\Pi_2: \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{1}{7} = 0$

$\delta(M, \Pi_1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - 2 - 1 = -3 < 0$

$\delta(M, \Pi_2) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{18}{7} - \frac{1}{7} = \frac{24}{7} > 0$

M ∈ смежному двугранному углу!

$\Rightarrow$ $\forall$ точки $M(x,y,z) \in \Pi_\delta \Rightarrow \delta(M,\Pi_1) = -\delta(M,\Pi_2)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{1}{7}$

$\Rightarrow \Pi_\delta : \frac{23}{21}x - \frac{1}{21}y - \frac{4}{21}z - \frac{24}{21} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Pi_\delta : 23x - y - 4z - 24 = 0}$

981 $\Pi_1 : 3x - 4y - z + 5 = 0$, $\Pi_2 : 4x - 3y + z + 5 = 0$

Π_δ тупого угла?

Решение: $\mu_1 = \frac{-1}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{-1}{\sqrt{26}}$, $\mu_2 = \frac{-1}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{-1}{\sqrt{26}}$

$\Pi_1 : \frac{1}{\sqrt{26}}(-3x + 4y + z - 5) = 0$; $\Pi_2 : \frac{1}{\sqrt{26}}(-4x + 3y - z - 5) = 0$

$\vec{n}_1 = \{-\frac{3}{\sqrt{26}}; \frac{4}{\sqrt{26}}; \frac{1}{\sqrt{26}}\}$, $\vec{n}_2 = \{-\frac{4}{\sqrt{26}}; \frac{3}{\sqrt{26}}; -\frac{1}{\sqrt{26}}\}$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{12}{26} + \frac{12}{26} - \frac{1}{26} = \frac{23}{26} > 0 \Rightarrow (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$ – острый угол

$\Rightarrow O(0,0,0)$ лежит в тупом двугранном угле.

Π_δ – биссекторная плоскость двугранного угла, в котором лежит $O(0,0,0)$.

$\Rightarrow$ $\forall$ точки $M(x,y,z) \in \Pi_\delta$ $\delta(M,\Pi_1) = \delta(M,\Pi_2)$

$\frac{1}{\sqrt{26}}(-3x + 4y + z - 5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4x + 3y - z - 5)$

$\boxed{\Pi_\delta : x + y + 2z = 0}$

Прямая в пространстве

985 $\ell: \begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ $\ell \cap Oy = ?$

Решение: $\exists$? точка $M_0 = \ell \cap Oy$

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y+5z-6=0 \\ 5y-7z+10=0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{matrix} +$$

$\Rightarrow 4z=0 \Rightarrow z=0,\ y=-2 \Rightarrow M_0(0;-2;0)$

989 Пучок плоскостей $2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$

1) $\Pi_1 \ni M_1(1;-2;3)$ Π_1 - ?

$2+6+3-3+\lambda(1-6+6+1)=0 \Rightarrow 2\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=-4$

$\Pi_1: 2x-3y+z-3-4(x+3y+2z+1)=0$

$\Pi_1: -2x-15y-7z-7=0$

$\boxed{\Pi_1: 2x+15y+7z+7=0}$

2) Π_2 - ? $\Pi_2 \parallel Ox \Rightarrow \vec{n}_2 \perp Ox \Leftrightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{\tau}$

$\Pi_2: (2+\lambda)x+(-3+3\lambda)y+(1+2\lambda)z+(-3+\lambda)=0$

$\vec{\tau}=\{1;0;0\}$, $\vec{n}_2=\{(2+\lambda);(-3+3\lambda);(1+2\lambda)\}$

$\vec{n}_2 \cdot \vec{\tau} = 2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$\Pi_2: 0\cdot x-9y-3z-5=0$

$\boxed{\Pi_2: 9y+3z+5=0}$

993] $\Pi - ?$ $\Pi \ni l: \begin{cases} 3x-2y+z-3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$

$\Pi \perp \Pi_1 : x-2y+z+5=0$

Решение: $\Pi: \alpha(3x-2y+z-3)+\beta(x-2z)=0$

$\Pi: (3\alpha+\beta)x-2\alpha y+(\alpha-2\beta)z-3\alpha=0 \quad (*)$

$\Pi \perp \Pi_1 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$

$\vec{n}=\{3\alpha+\beta; -2\alpha; \alpha-2\beta\}$, $\vec{n}_1=\{1; -2; 1\}$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 3\alpha+\beta+4\alpha+\alpha-2\beta=0$

$\Rightarrow 8\alpha=\beta \Rightarrow \alpha:=1 \Rightarrow \beta=8$

Из (*) $\boxed{\Pi: 11x-2y-15z-3=0}$

Дома: К. 917, 921, 926, 931, 939, 950, 956(1,2,3), 957(3,4,5), 959(ост.), 974, 975(2), 976, 978, 980; 986, 988, 989(3,4), 990, 1006.