КИНЕМАТИКА

УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

Получим уравнение равномерного прямолинейного движения точки. Для этого воспользуемся определением скорости.

Пусть радиус-вектор $\vec{r}_0$ задает положение точки в начальный момент времени t_0, а радиус-вектор $\vec{r}$ — в момент времени t. Тогда $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, и выражение для скорости принимает вид $\vec{v} = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$.

Если начальный момент времени t_0 принять равным нулю, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t}.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t.} \qquad (1.4)$$

Последнее уравнение и есть уравнение равномерного прямолинейного движения точки, записанное в векторной форме. Оно позволяет найти радиус-вектор точки при этом движении в любой момент времени, если известны скорость точки и радиус-вектор, задающий ее положение в начальный момент времени.

- Вместо векторного уравнения? Можно записать эквивалентные уравнения в проекции на координатные оси.

$$\boxed{x = x_0 + v_x t.}$$

- Уравнение равномерного прямолинейного движения точки, записанное в координатной форме.

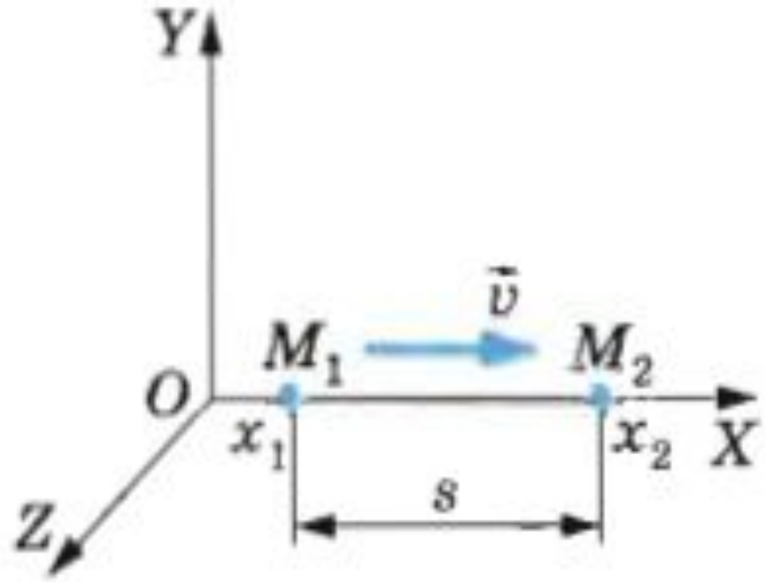

Рис. 1.13

Путь s, пройденный точкой при движении вдоль оси OX (рис. 1.13), равен модулю изменения ее координаты: $s = |x_2 - x_1|$. Его можно найти, зная модуль скорости $v = |v_x|$:

$$\boxed{s = |v_x|\, t = vt.} \qquad (1.6)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определите модуль и направление скорости точки, если при равномерном движении вдоль оси OX ее координата за время $t_1 = 4$ с изменилась от $x_1 = 5$ м до $x_2 = -3$ м.

Решение. Модуль и направление вектора можно найти по его проекциям на оси координат. Так как точка движется равномерно, то проекцию ее скорости на ось OX найдем по формуле

$$\upsilon_x = \frac{x_2 - x_1}{t_1}; \quad \upsilon_x = \frac{-3 - 5}{4} \text{ м/с} = -2 \text{ м/с}.$$

Отрицательный знак проекции скорости означает, что скорость точки направлена противоположно положительному направлению оси OX. Модуль скорости равен $\upsilon = |\upsilon_x| = |-2 \text{ м/с}| = 2$ м/с.

СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Пусть по реке плывет моторная лодка и нам известна ее скорость $\vec{v}_1$ относительно воды, точнее, относительно системы отсчета K_1, движущейся вместе с водой.

Такую систему отсчета можно связать, например, с мячом, выпавшим из лодки и плывущим по течению. Если известна еще и скорость течения реки $\vec{v}$ относительно системы отсчета K_2, связанной с берегом, т. е. скорость системы отсчета K_1 относительно системы отсчета K_2, то можно определить скорость лодки $\vec{v}_2$ относительно берега (рис. 1.20).

За промежуток времени Δt перемещения лодки и мяча относительно берега равны $\Delta\vec{r}_2$ и $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.20), а перемещение лодки относительно мяча равно $\Delta\vec{r}_1$. Из рисунка 1.21 видно, что

$$\Delta\vec{r}_2 = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}. \qquad (1.8)$$

Разделив левую и правую части уравнения (1.8) на Δt, получим

$$\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Учтем также, что отношения перемещений к интервалу времени равны скоростям. Поэтому

$$\boxed{\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}.} \qquad (1.9)$$

Скорости складываются геометрически, как и все другие векторы.

Мы получили простой и замечательный результат, который называется ***законом сложения скоростей: если тело движется относительно некоторой системы отсчета K_1 со скоростью $\vec{v}_1$ и сама система отсчета K_1 движется относительно другой системы***

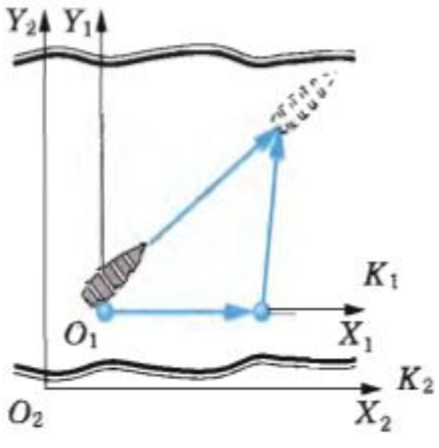

Рис. 1.20

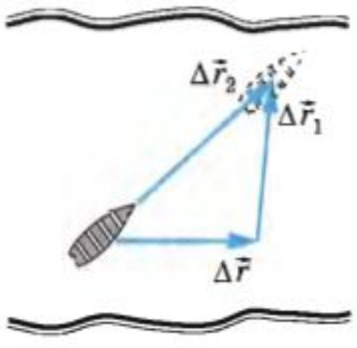

Рис. 1.21

отсчета K_2 со скоростью $\vec{v}$, то скорость тела относительно второй системы отсчета равна геометрической сумме скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}$. Закон сложения скоростей справедлив и для неравномерного движения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Два поезда движутся равномерно друг за другом. Скорость первого равна 80 км/ч, а скорость второго — 60 км/ч. Определите скорость второго поезда относительно первого.

Решение. Обозначим скорость первого поезда относительно Земли через $\vec{v}_1$, а скорость второго поезда — через $\vec{v}_2$. Тогда согласно закону сложения скоростей (1.9)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1,$$

где $\vec{v}_2'$ — искомая скорость второго поезда относительно первого. Отсюда

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

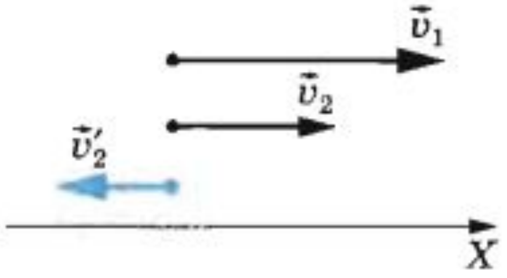

Рис. 1.22

Это сложение скоростей поясняется на рисунке 1.22. Из рисунка видно, что скорость второго поезда относительно первого направлена в сторону, противоположную направлению движения поездов, и второй поезд удаляется от первого. Проекция скорости v_2' на ось OX равна:

$$v_{2x}' = v_2 - v_1 = -20 \text{ км/ч}.$$

СКОРОСТЬ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Выясним зависимости скорости точки от времени при ее движении с постоянным ускорением. Для этого воспользуемся формулой

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Пусть $\vec{v}_0$ — скорость точки в начальный момент времени t_0, а $\vec{v}$ — ее скорость в некоторый момент времени t. Тогда $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, и формула для ускорения примет вид:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}.$$

Если начальный момент времени t_0 принять равным нулю, то получим

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.} \qquad (1.12)$$

Векторному уравнению (1.12) соответствуют в случае движения на плоскости два скалярных уравнения для проекций скорости на координатные оси X и Y:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned}} \qquad (1.13)$$

Как видим, при движении с постоянным ускорением скорость со временем меняется по линейному закону.

Теперь получим уравнения, которые позволяют рассчитывать для этого движения положение точки в любой момент времени.

Допустим, движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости, пусть это будет плоскость XOY. Если вектор начальной скорости и вектор ускорения не лежат на одной прямой, то точка будет двигаться по кривой линии. Следовательно, в этом случае с течением времени будут изменяться обе ее координаты x и y. Обозначим через x_0 и y_0 координаты в начальный момент времени $t_0 = 0$, а через x и y координаты в момент времени t. Тогда за время $\Delta t = t - t_0 = t$ изменения координат будут равны

$$\Delta x = x - x_0 \text{ и } \Delta y = y - y_0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, \\ y &= y_0 + \Delta y. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Значит, для нахождения положения точки в любой момент времени надо знать ее начальные координаты и уметь находить изменения координат Δx и Δy за время движения.

В случае движения, при котором проекция скорости изменяется со временем (рис. 1.30, кривая *1*), величину Δx за время t найдем следующим образом. Из § 8 мы знаем, что при равномерном движении изменение координаты точки за время Δt можно определить на графике зависимости $v_x(t)$ по площади прямоугольника. На рисунке 1.30 длина отрезка OC численно равна времени движения. Разделим его на малые интервалы Δt, в пределах которых проекцию скорости можно считать постоянной и равной ее среднему значению. Рассмотрим интервал Δt_i. Тогда $\Delta x_i = v_{i\,ср} \Delta t_i$, и, соответственно, площадь заштрихованного прямоугольника численно равна изменению координаты точки за время Δt_i. Сумма всех таких площадей численно равна изменению координаты точки за время t. Чем меньше интервал Δt, тем точнее будет результат. При стремлении Δt к нулю площадь фигуры $ABCO$ будет стремиться к изменению координаты тела Δx.

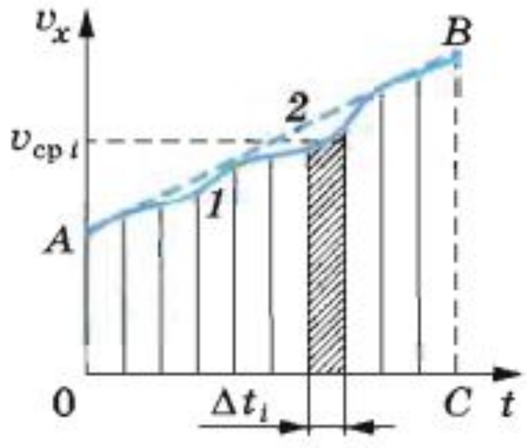

Рис. 1.30

В случае равноускоренного движения (рис. 1.30, прямая *2*) изменение координаты тела Δx численно равно площади трапеции $ABCO$. Длины оснований OA и BC этой трапеции численно равны проекциям начальной и конечной скоростей, а длина высоты OC — времени движения.

В случае равноускоренного движения (рис. 1.30, прямая 2) изменение координаты тела Δx численно равно площади трапеции $ABCO$. Длины оснований OA и BC этой трапеции численно равны проекциям начальной и конечной скоростей, а длина высоты OC — времени движения.

По формуле для площади трапеции имеем

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t.$$

Учитывая, что $v_x = v_{0x} + a_x t$, получаем

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Мы рассмотрели случай, когда $v_{0x} > 0$ и $a_x > 0$. Но полученная формула справедлива и тогда, когда одна из этих величин отрицательна или когда обе они отрицательны.

Изменение координаты Δy можно найти таким же способом, и оно имеет аналогичный вид

$$\Delta y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Подставив найденные значения изменения координат Δx и Δy в формулы (1.14), получим выражения для координат при движении с постоянным ускорением как функции времени (их называют кинематическими уравнениями движения):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{aligned}} \qquad (1.15)$$

При движении точки в плоскости XOY двум уравнениям (1.15) соответствует одно векторное уравнение

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}.} \qquad (1.16)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Ударом клюшки хоккейной шайбе сообщили скорость $\upsilon_0 = 20$ м/с. Через время $t = 2$ с скорость шайбы, движущейся прямолинейно, стала равна 16 м/с. Определите ускорение шайбы, считая его постоянным.

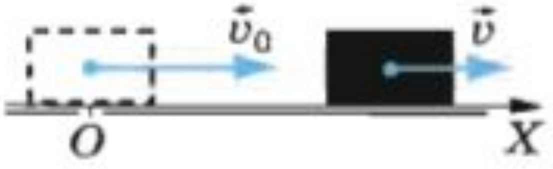

Рис. 1.31

Решение. Выберем оси координат так, чтобы движение шайбы происходило вдоль какой-нибудь координатной оси, например вдоль оси OX. За положительное направление оси OX примем направление вектора начальной скорости (рис. 1.31). Из определения ускорения следует:

$$a_x = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{16\ \text{м/с} - 20\ \text{м/с}}{2\ \text{с}} = -2\ \text{м/с}.$$

Знак «−» в конечном результате означает, что вектор ускорения направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси OX. Модуль же ускорения равен $a = |a_x| = -2\ \text{м/с}^2 = 2\ \text{м/с}^2$.


Рефлексия
Я доволен своей
работой на уроке.
На уроке я работал
неплохо.
На уроке мне было
трудно.