

# КИНЕМАТИКА

# УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

Получим уравнение равномерного прямолинейного движения точки. Для этого воспользуемся определением скорости.

Пусть радиус-вектор  $\vec{r}_0$  задает положение точки в начальный момент времени  $t_0$ , а радиус-вектор  $\vec{r}$  — в момент времени  $t$ . Тогда  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ , и выражение для скорости принимает вид  $\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$ .

Если начальный момент времени  $t_0$  принять равным нулю, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t}.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t.} \quad (1.4)$$

Последнее уравнение и есть уравнение равномерного прямолинейного движения точки, записанное в векторной форме. Оно позволяет найти радиус-вектор точки при этом движении в любой момент времени, если известны скорость точки и радиус-вектор, задающий ее положение в начальный момент времени.

- Вместо векторного уравнения? Можно записать эквивалентные уравнения в проекции на координатные оси.

$$x = x_0 + v_x t.$$

- Уравнение равномерного прямолинейного движения точки, записанное в координатной форме.

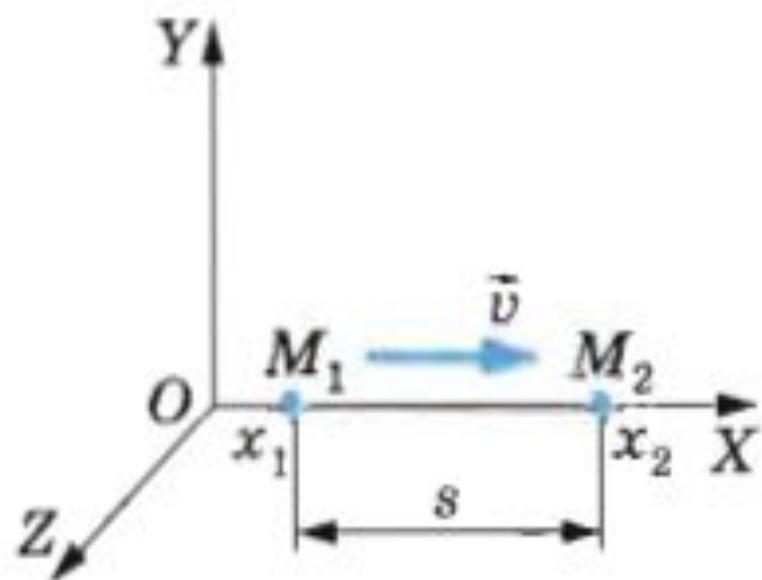


Рис. 1.13

Путь  $s$ , пройденный точкой при движении вдоль оси  $OX$  (рис. 1.13), равен модулю изменения ее координаты:  $s = |x_2 - x_1|$ . Его можно найти, зная модуль скорости  $v = |v_x|$ :

$$s = |v_x| t = vt. \quad (1.6)$$

# ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определите модуль и направление скорости точки, если при равномерном движении вдоль оси  $OX$  ее координата за время  $t_1 = 4$  с изменилась от  $x_1 = 5$  м до  $x_2 = -3$  м.

Решение. Модуль и направление вектора можно найти по его проекциям на оси координат. Так как точка движется равномерно, то проекцию ее скорости на ось  $OX$  найдем по формуле

$$v_x = \frac{x_2 - x_1}{t_1}; \quad v_x = \frac{-3 - 5}{4} \text{ м/с} = -2 \text{ м/с.}$$

Отрицательный знак проекции скорости означает, что скорость точки направлена противоположно положительному направлению оси  $OX$ . Модуль скорости равен  $v = |v_x| = |-2 \text{ м/с}| = 2 \text{ м/с}$ .

# СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Пусть по реке плывет моторная лодка и нам известна ее скорость  $\vec{v}_1$  относительно воды, точнее, относительно системы отсчета  $K_1$ , движущейся вместе с водой.

Такую систему отсчета можно связать, например, с мячом, выпавшим из лодки и плывущим по течению. Если известна еще и скорость течения реки  $\vec{v}$  относительно системы отсчета  $K_2$ , связанной с берегом, т. е. скорость системы отсчета  $K_1$  относительно системы отсчета  $K_2$ , то можно определить скорость лодки  $\vec{v}_2$  относительно берега (рис. 1.20).

За промежуток времени  $\Delta t$  перемещения лодки и мяча относительно берега равны  $\Delta\vec{r}_2$  и  $\Delta\vec{r}$  (рис. 1.20), а перемещение лодки относительно мяча равно  $\Delta\vec{r}_1$ . Из рисунка 1.21 видно, что

$$\Delta\vec{r}_2 = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}. \quad (1.8)$$

Разделив левую и правую части уравнения (1.8) на  $\Delta t$ , получим

$$\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Учтем также, что отношения перемещений к интервалу времени равны скоростям. Поэтому

$$\boxed{\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}.} \quad (1.9)$$

Скорости складываются геометрически, как и все другие векторы.

Мы получили простой и замечательный результат, который называется **законом сложения скоростей**: *если тело движется относительно некоторой системы отсчета  $K_1$  со скоростью  $\vec{v}_1$  и сама система отсчета  $K_1$  движется относительно другой системы*

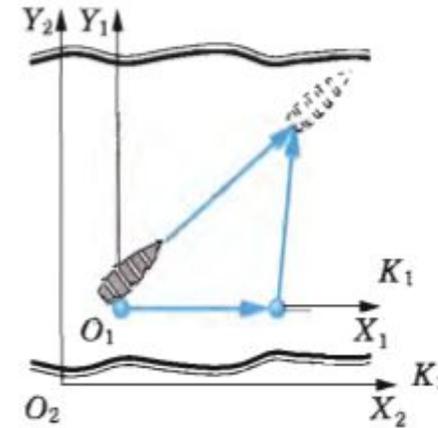


Рис. 1.20

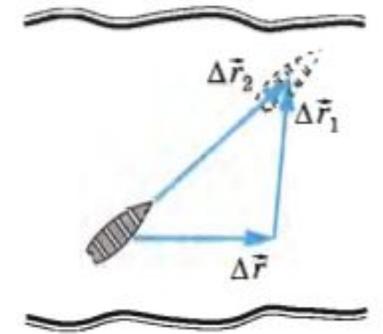


Рис. 1.21

*отсчета  $K_2$  со скоростью  $\vec{v}$ , то скорость тела относительно второй системы отсчета равна геометрической сумме скоростей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}$ . Закон сложения скоростей справедлив и для неравномерного движения.*

# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Два поезда движутся равномерно друг за другом. Скорость первого равна 80 км/ч, а скорость второго — 60 км/ч. Определите скорость второго поезда относительно первого.

Решение. Обозначим скорость первого поезда относительно Земли через  $\vec{v}_1$ , а скорость второго поезда — через  $\vec{v}_2$ . Тогда согласно закону сложения скоростей (1.9)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_1,$$

где  $\vec{v}'_2$  — искомая скорость второго поезда относительно первого. Отсюда

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

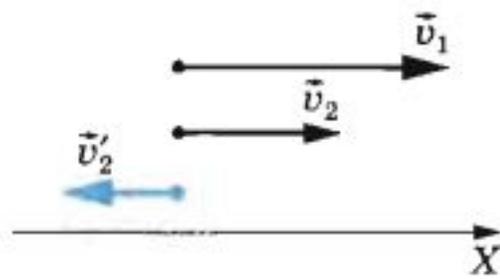


Рис. 1.22

Это сложение скоростей поясняется на рисунке 1.22. Из рисунка видно, что скорость второго поезда относительно первого направлена в сторону, противоположную направлению движения поездов, и второй поезд удаляется от первого. Проекция скорости  $v'_2$  на ось  $OX$  равна:

$$v'_{2x} = v_2 - v_1 = -20 \text{ км/ч.}$$

# СКОРОСТЬ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Выясним зависимости скорости точки от времени при ее движении с постоянным ускорением. Для этого воспользуемся формулой

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Пусть  $\vec{v}_0$  — скорость точки в начальный момент времени  $t_0$ , а  $\vec{v}$  — ее скорость в некоторый момент времени  $t$ . Тогда  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ , и формула для ускорения примет вид:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}.$$

Если начальный момент времени  $t_0$  принять равным нулю, то получим

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.} \quad (1.12)$$

Векторному уравнению (1.12) соответствуют в случае движения на плоскости два скалярных уравнения для проекций скорости на координатные оси  $X$  и  $Y$ :

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned}} \quad (1.13)$$

Как видим, при движении с постоянным ускорением скорость со временем меняется по линейному закону.

Теперь получим уравнения, которые позволяют рассчитывать для этого движения положение точки в любой момент времени.

Допустим, движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости, пусть это будет плоскость  $XOY$ . Если вектор начальной скорости и вектор ускорения не лежат на одной прямой, то точка будет двигаться по кривой линии. Следовательно, в этом случае с течением времени будут изменяться обе ее координаты  $x$  и  $y$ . Обозначим через  $x_0$  и  $y_0$  координаты в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , а через  $x$  и  $y$  координаты в момент времени  $t$ . Тогда за время  $\Delta t = t - t_0 = t$  изменения координат будут равны

$$\Delta x = x - x_0 \text{ и } \Delta y = y - y_0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, \\ y &= y_0 + \Delta y. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Значит, для нахождения положения точки в любой момент времени надо знать ее начальные координаты и уметь находить изменения координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  за время движения.

В случае движения, при котором проекция скорости изменяется со временем (рис. 1.30, кривая 1), величину  $\Delta x$  за время  $t$  найдем следующим образом. Из § 8 мы знаем, что при равномерном движении изменение координаты точки за время  $\Delta t$  можно определить на графике зависимости  $v_x(t)$  по площади прямоугольника. На рисунке 1.30 длина отрезка  $OC$  численно равна времени движения. Разделим его на малые интервалы  $\Delta t$ , в пределах которых проекцию скорости можно считать постоянной и равной ее среднему значению. Рассмотрим интервал  $\Delta t_i$ . Тогда  $\Delta x_i = v_{i\text{cp}}\Delta t_i$ , и, соответственно, площадь заштрихованного прямоугольника численно равна изменению координаты точки за время  $\Delta t_i$ . Сумма всех таких площадей численно равна изменению координаты точки за время  $t$ . Чем меньше интервал  $\Delta t$ , тем точнее будет результат. При стремлении  $\Delta t$  к нулю площадь фигуры  $ABCO$  будет стремиться к изменению координаты тела  $\Delta x$ .

В случае равноускоренного движения (рис. 1.30, прямая 2) изменение координаты тела  $\Delta x$  численно равно площади трапеции  $ABCO$ . Длины оснований  $OA$  и  $BC$  этой трапеции численно равны проекциям начальной и конечной скоростей, а длина высоты  $OC$  — времени движения.

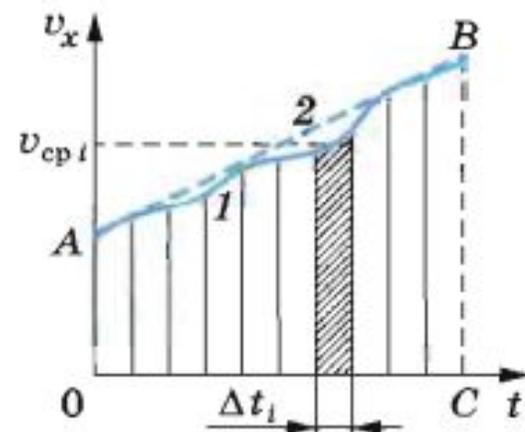


Рис. 1.30

В случае равноускоренного движения (рис. 1.30, прямая 2) изменение координаты тела  $\Delta x$  численно равно площади трапеции  $ABCO$ . Длины оснований  $OA$  и  $BC$  этой трапеции численно равны проекциям начальной и конечной скоростей, а длина высоты  $OC$  — времени движения.

По формуле для площади трапеции имеем

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t.$$

Учитывая, что  $v_x = v_{0x} + a_x t$ , получаем

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Мы рассмотрели случай, когда  $v_{0x} > 0$  и  $a_x > 0$ . Но полученная формула справедлива и тогда, когда одна из этих величин отрицательна или когда обе они отрицательны.

Изменение координаты  $\Delta y$  можно найти таким же способом, и оно имеет аналогичный вид

$$\Delta y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Подставив найденные значения изменения координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в формулы (1.14), получим выражения для координат при движении с постоянным ускорением как функции времени (их называют кинематическими уравнениями движения):

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \quad (1.15)$$

При движении точки в плоскости  $XOY$  двум уравнениям (1.15) соответствует одно векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \quad (1.16)$$

# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Ударом клюшки хоккейной шайбе сообщили скорость  $v_0 = 20$  м/с. Через время  $t = 2$  с скорость шайбы, движущейся прямолинейно, стала равна 16 м/с. Определите ускорение шайбы, считая его постоянным.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы движение шайбы происходило вдоль какой-нибудь координатной оси, например вдоль оси  $OX$ . За положительное направление оси  $OX$  примем направление вектора начальной скорости (рис. 1.31). Из определения ускорения следует:

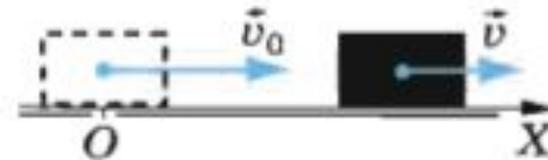


Рис. 1.31

$$a_x = \frac{v - v_0}{t} = \frac{16 \text{ м/с} - 20 \text{ м/с}}{2 \text{ с}} = -2 \text{ м/с}^2.$$

Знак « $-$ » в конечном результате означает, что вектор ускорения направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси  $OX$ . Модуль же ускорения равен  $a = |a_x| = -2 \text{ м/с}^2 = 2 \text{ м/с}^2$ .

## Рефлексия



*Я доволен своей  
работой на уроке.*



*На уроке я работал  
неплохо.*



*На уроке мне было  
трудно.*

