

# Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ .  
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ .  
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем  
приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

## Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ .  
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем  
приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную на интервале  $[a;b]$ .

Разделим интервал  $[a;b]$  на  $n$  равных частей.

Занумеруем полученные точки  $x_i$  начиная с нулевого номера  
 $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Длину каждого интервала будем называть *шагом*  $h=(b-a)/n$ ,

а полученные точки  $\{x_i\}$  и шаг  $h$  *разбиением* интервала  $[a;b]$ .

# Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ .  
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем  
приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную на интервале  $[a;b]$ .

Разделим интервал  $[a;b]$  на  $n$  равных частей.

Занумеруем полученные точки  $x_i$ , начиная с нулевого номера  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ .

Длину каждого интервала будем называть **шагом**  $h=(b-a)/n$ ,  
а полученные точки  $\{x_i\}$  и шаг  $h$  **разбиением** интервала  $[a;b]$ .

В каждой точке  $x_i$  вычислим значение функции  $y_i = f(x_i)$ .

Полученную пару  $(x_i ; y_i)$  будем называть **узлами** функции.



По формуле приближенного значения производной

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(если возьмем  $x = x_i$ ;  $\Delta x = h$ ) имеем:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

ИЛИ

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

(1)

Однако если возьмем  $\Delta x = -h$ , тогда получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

Или  
.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

(2)

Аналогично взяв  $\Delta x = 2h$ , получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

или

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

(3)

Аналогично взяв  $\Delta x = 2h$ , получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

или

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{3}$$

Полученные формулы (1) – (3) называются соответственно **правой, левой и центральной разностными формулами** численного дифференцирования для первой производной.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$



i	x	y
0	0	0
1	0,1	0,01
2	0,2	0,04
3	0,3	0,09
4	0,4	0,16
5	0,5	0,25
6	0,6	0,36
7	0,7	0,49
8	0,8	0,64
9	0,9	0,81
10	1	1

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную на интервале  $[0;1]$  и протабулированную с шагом 0,1.

Найдем первую производную этой функции.

Мы вывели для этого три различные формулы (1), (2) и (3).

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

i	x	y	y'(левая)	y'(правая)	y'(центральная)
0	0	0		0,1	
1	0,1	0,01	0,1	0,3	0,2
2	0,2	0,04	0,3	0,5	0,4
3	0,3	0,09	0,5	0,7	0,6
4	0,4	0,16	0,7	0,9	0,8
5	0,5	0,25	0,9	1,1	1
6	0,6	0,36	1,1	1,3	1,2
7	0,7	0,49	1,3	1,5	1,4
8	0,8	0,64	1,5	1,7	1,6
9	0,9	0,81	1,7	1,9	1,8
10	1	1	1,9		

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

i	x	y	y' (левая)	y' (правая)	y' (центральная)	Y'
0	0	0				
1	0,1	0,01				
2	0,2	0,04				
3	0,3	0,09	0,5	0,7	0,6	0,6
4	0,4	0,16				
5	0,5	0,25				
6	0,6	0,36				
7	0,7	0,49				
8	0,8	0,64				
9	0,9	0,81				
10	1	1				

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

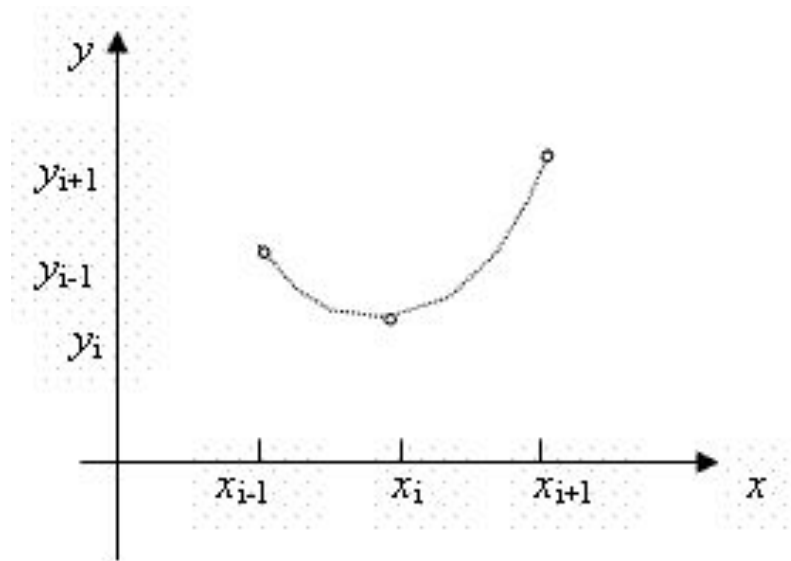
Аналогично определяются разностные формулы и для старших производных.

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= (f'(x_i))' = \frac{1}{h} (f'(x_i) - f'(x_{i-1})) = \frac{1}{h} \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))) \end{aligned}$$

Или

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$



i	x	y	y''
0	0	0	
1	0,1	0,01	
2	0,2	0,04	2
3	0,3	0,09	
4	0,4	0,16	
5	0,5	0,25	
6	0,6	0,36	
7	0,7	0,49	
8	0,8	0,64	
9	0,9	0,81	
10	1	1	

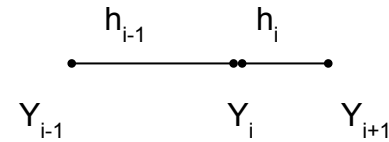
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

$$y'' = \frac{0.09 - 2 \cdot 0.04 + 0.01}{0.1^2} = \frac{0.02}{0.01} = 2$$

## Неравномерная сетка

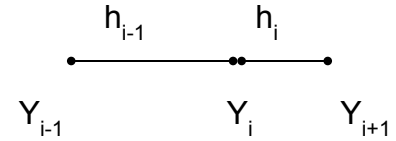
Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную узлами  $M_i=(x_i; y_i)$

Будем говорить, что функция задана *неравномерной сеткой*, если  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



## Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную узлами  $M_i=(x_i; y_i)$   
Будем говорить, что функция задана *неравномерной сеткой*,  
если  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



Тогда  $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$  - правая производная, где  $h_i = x_{i+1} - x_i$

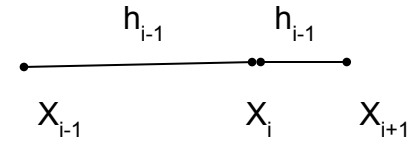
$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$  - левая производная,  
- где  $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$  - центральная производная,  
- где  $h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$



## Неравномерная сетка

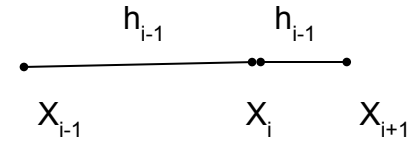
Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную узлами  $M_i=(x_i; y_i)$   
Будем говорить, что функция задана *неравномерной сеткой*,  
если  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



Тогда  $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$  - правая производная, где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

## Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную узлами  $M_i=(x_i; y_i)$   
Будем говорить, что функция задана *неравномерной сеткой*,  
если  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$

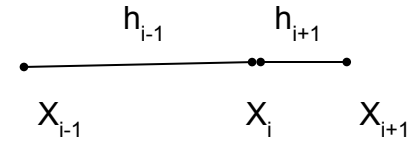


Тогда  $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$  - правая производная, где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$  - левая производная,  
- где  $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

## Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную узлами  $M_i=(x_i; y_i)$   
Будем говорить, что функция задана *неравномерной сеткой*,  
если  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



Тогда  $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$  - правая производная, где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$  - левая производная,  
- где  $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$  - центральная производная,  
- где  $h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

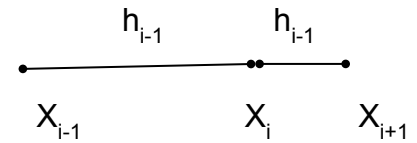
- правая производная,  
где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

- левая производная,  
где  $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$$

- центральная производная,  
где  $h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$



$$y'_i = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

Общая формула

Вторая производная задается формулой

$$y_i'' = \frac{1}{h_i \cdot h_{i-1} \cdot h_{i-1}} (h_{i-1} y_{i+1} - (h_i + h_{i-1}) y_i + h_i y_{i-1})$$

Пример.

Рассмотрим функцию, заданную таблицей

Найти  $Y'(0.2)$  и  $Y''(0.2)$

x	0	0.2	0.5
y	0	0.04	0.25

$$y'_i = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

$$y'_i = \frac{0.25 - 0.04}{0.5 - 0.2} = \frac{0.21}{0.3} = 0.7$$

- Правая

Пример.

Рассмотрим функцию, заданную таблицей

Найти  $Y'(0.2)$  и  $Y''(0.2)$

x	0	0.2	0.5
y	0	0.04	0.25

$$y'_i = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

$$y'_i = \frac{0.25 - 0.04}{0.5 - 0.2} = \frac{0.21}{0.3} = 0.7$$

- Правая

$$y''_i = \frac{1}{h_i \cdot h_{i-1} \cdot h_{i-1}} (h_{i-1}y_{i+1} - (h_i + h_{i-1})y_i + h_i y_{i-1})$$

h		0.2	0.3	
x	0	0.2	0.5	
y	0	0.04	0.25	

$$Y''(0.2) = (0.2 \cdot 0.25 - (0.2 + 0.3) \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0) / (0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2) = 1.67$$

Погрешность вычисленного значения производной зависит от шага  $h$ .