



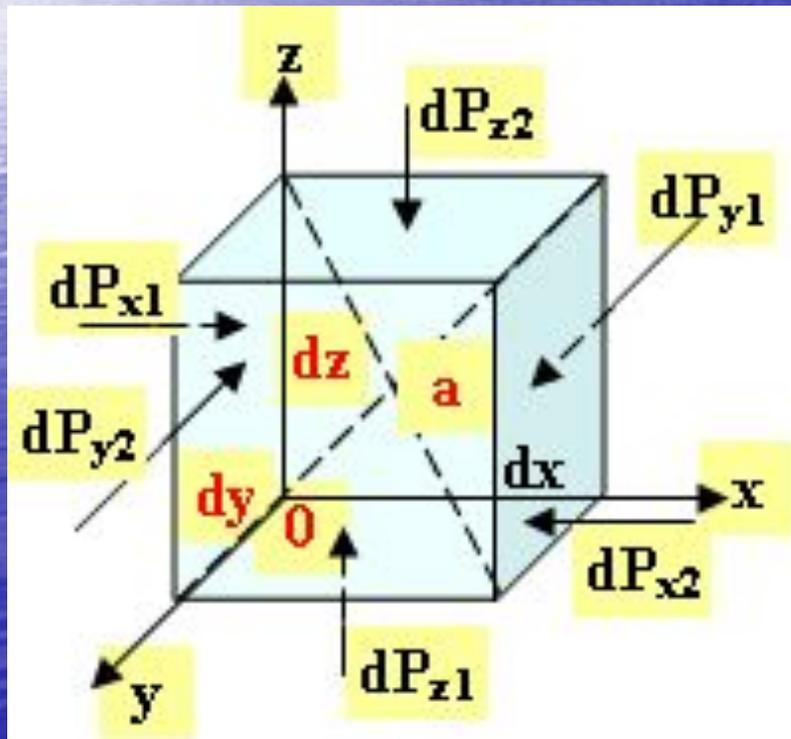
ЛЕКЦИЯ №2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ.
СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).
2. Основное уравнение гидростатики, поверхности равного давления.
3. Относительное равновесие жидкости.
4. Силы давления жидкости на плоские и криволинейные поверхности.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

$$p_a = f(dx, dy, dz)$$



$$p_{x1} = p_a - (\partial p / \partial x) \cdot (dx/2)$$

$$p_{x2} = p_a + (\partial p / \partial x) \cdot (dx/2)$$

$$M = ma = \rho dx dy dz \cdot a$$

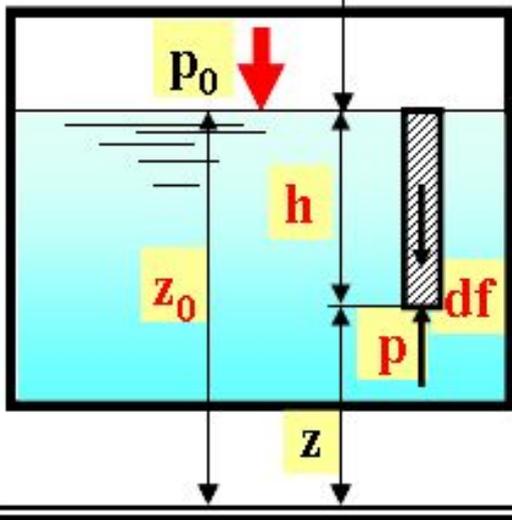
$$p_{x1} dy dz - p_{x2} dy dz + \rho X dx dy dz = 0$$

$$\begin{cases} X = (1/\rho) \cdot (\partial p / \partial x) \\ Y = (1/\rho) \cdot (\partial p / \partial y) \\ Z = (1/\rho) \cdot (\partial p / \partial z) \end{cases}$$

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Пьезометрическая
плоскость

$$h_0 = p_0 / \rho g$$



$$(Xdx + Ydy + Zdz) - (1/\rho) \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0$$

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$X = Y = 0$$

$$Z = -g$$

$$p = -\rho g z + C$$

$$z = z_0; \quad p = p_0$$

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

$$z + p / \rho g = z_0 + p_0 / \rho g = \text{const}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

ПОВЕРХНОСТЬ УРОВНЯ

Поверхностями уровня называют поверхности, которые проходят через точки с одинаковым гидростатическим давлением

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$dp = \text{const} \quad \rho \neq 0$$

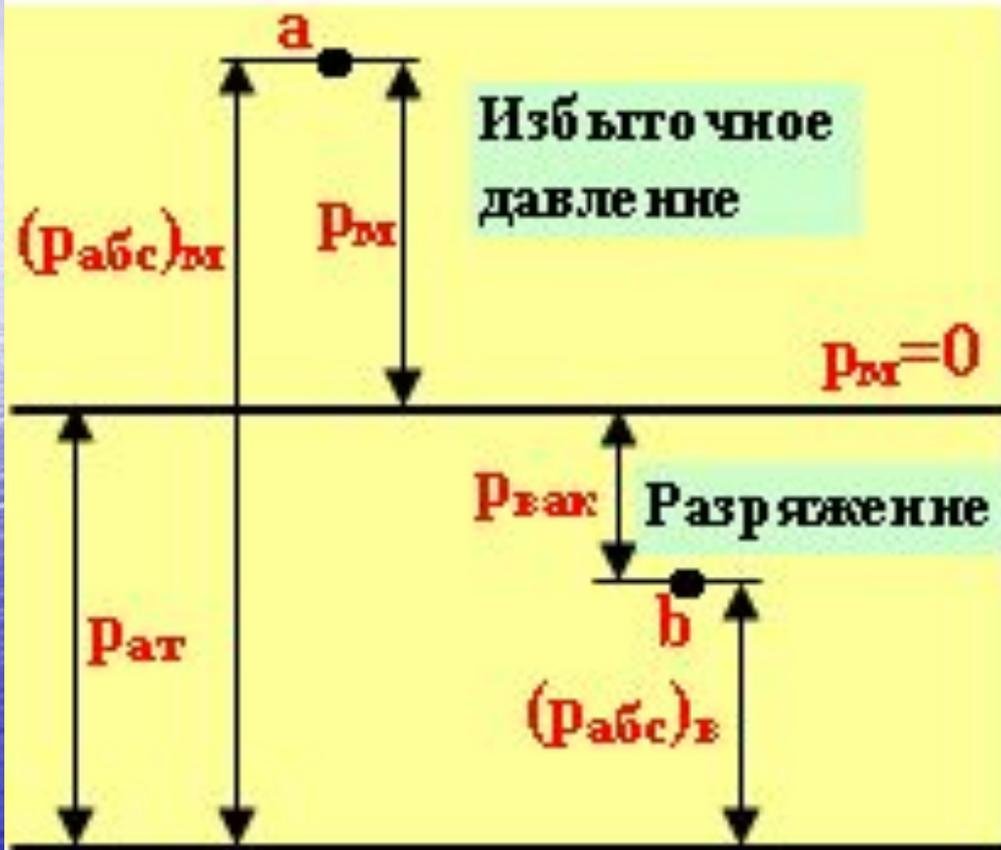
$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

$$X = Y = 0$$

$$Z = -g$$

$$Z = \text{const}$$

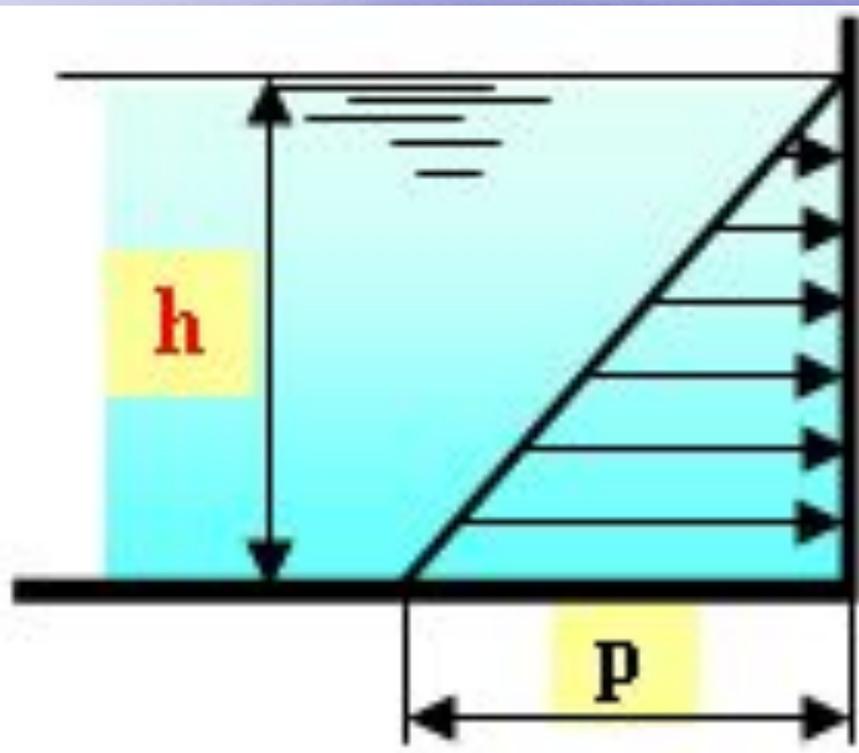
ПРЕДЕЛЫ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ



0% вакуум
Атмосферное давление

Абсолютное нулевое
давление 100% вакуум

ЭПЮРЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ



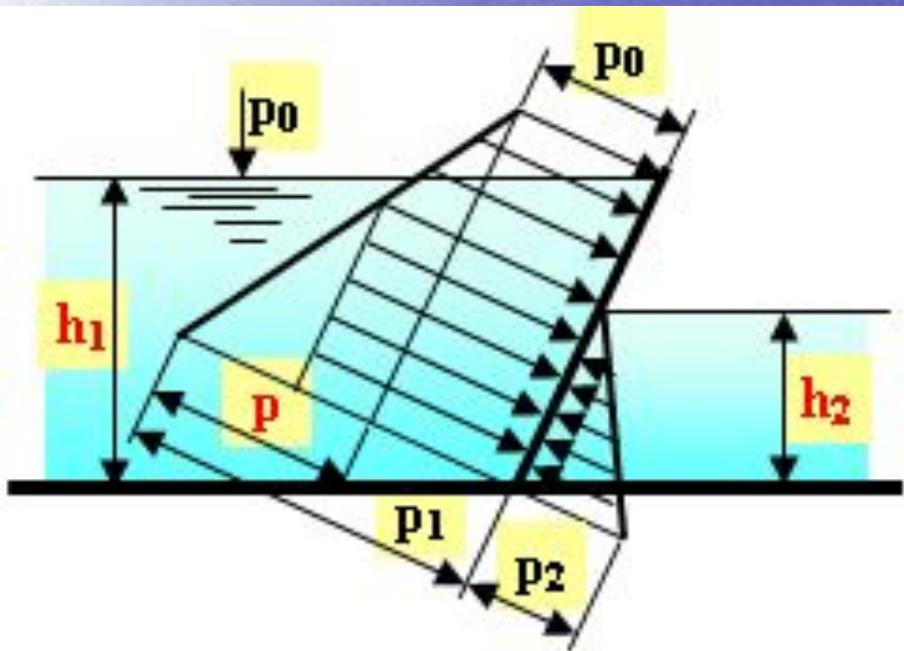
Распределение избыточного давления вдоль плоской вертикальной стенки при одностороннем воздействии жидкости

$$p = \rho gh$$

$$F_{\text{эп}} = 1/2(\rho gh^2)$$

ЭПЮРЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Распределение избыточного и полного давления вдоль плоской наклонной стенки при двустороннем воздействии жидкости

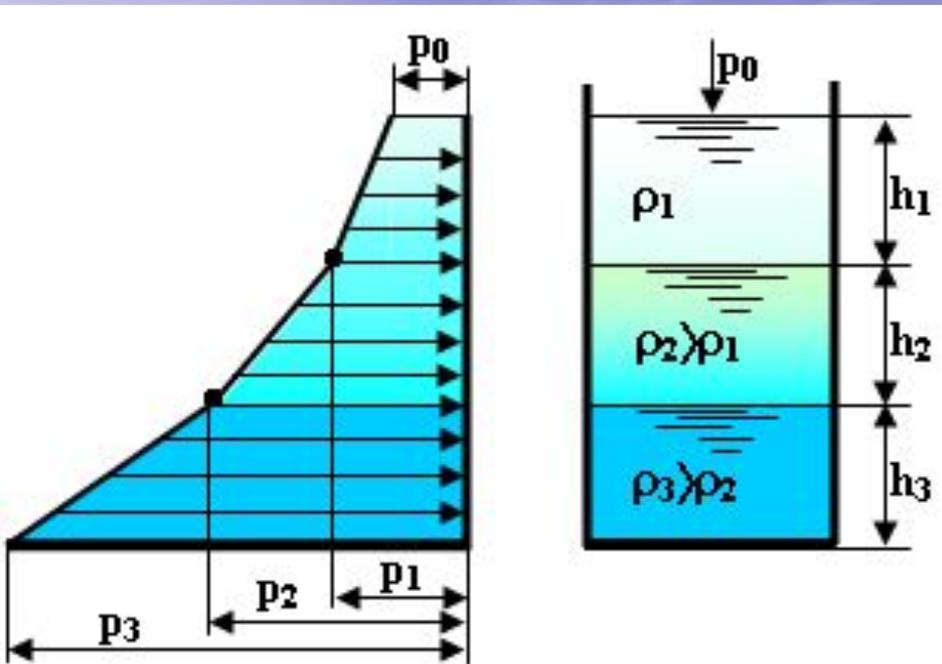


$$p = \rho g h_1$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1$$

$$p_2 = \rho g h_2$$

ЭПЮРЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ



Равновесие несмешивающихся жидкостей

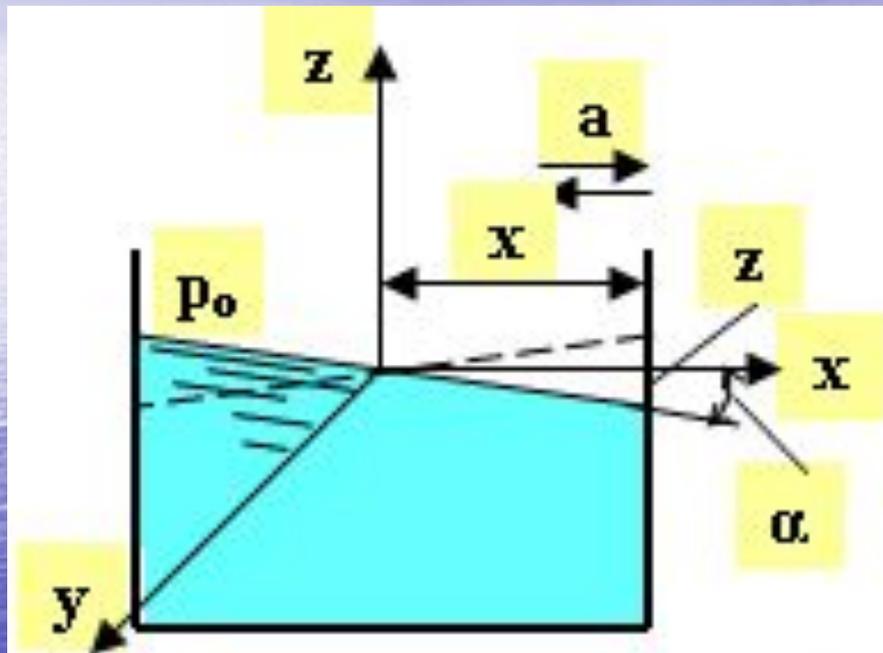
Котангенс угла наклона линии давления прямо пропорционален плотности жидкости

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$p_2 = p_1 + \rho_2 g h_2 = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

$$p_3 = p_2 + \rho_3 g h_3 = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$$

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ



Горизонтальное перемещение
сосуда с жидкостью

$$X = \pm a; Y = 0; Z = -g$$

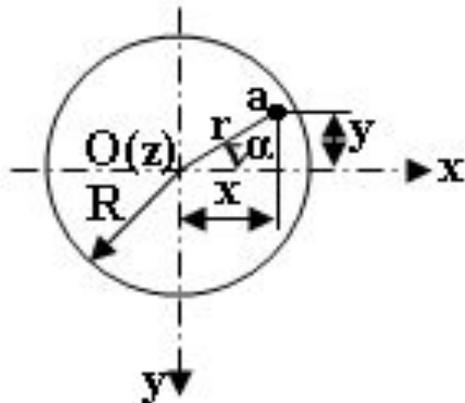
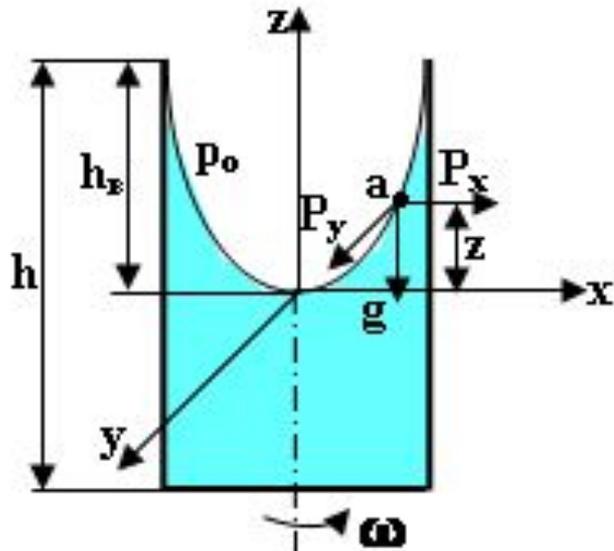
$$\pm a dx - g dz = 0$$

$$\pm ax - gz = \text{const}$$

$$\pm ax = gz$$

$$\pm a/g = z/x = \text{tg}\alpha$$

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ



$$P_a = m\omega^2 r$$

$$P_x = m\omega^2 r \cos(r, x)$$

$$P_y = m\omega^2 r \cos(r, y)$$

$$X = \omega^2 x; Y = \omega^2 y; Z = -g$$

$$\omega^2 dx + \omega^2 dy - g dz = 0$$

$$\omega^2 r^2 / 2 - gz = \text{const}$$

$$h_B = \omega^2 R^2 / 2g$$

$$h_B = h = \omega_{\text{max}}^2 R^2 / 2g$$

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ

$$V_{\text{ц}} = V_{\text{ж}} + V_{\text{п}}$$

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 h$$

$$V_{\text{ж}} = \pi R^2 h_0$$

$$V_{\text{п}} = \pi \omega^2 R^4 / 4g$$

$$V_{\text{п}} = \pi R^2 h_{\text{в}} / 2$$

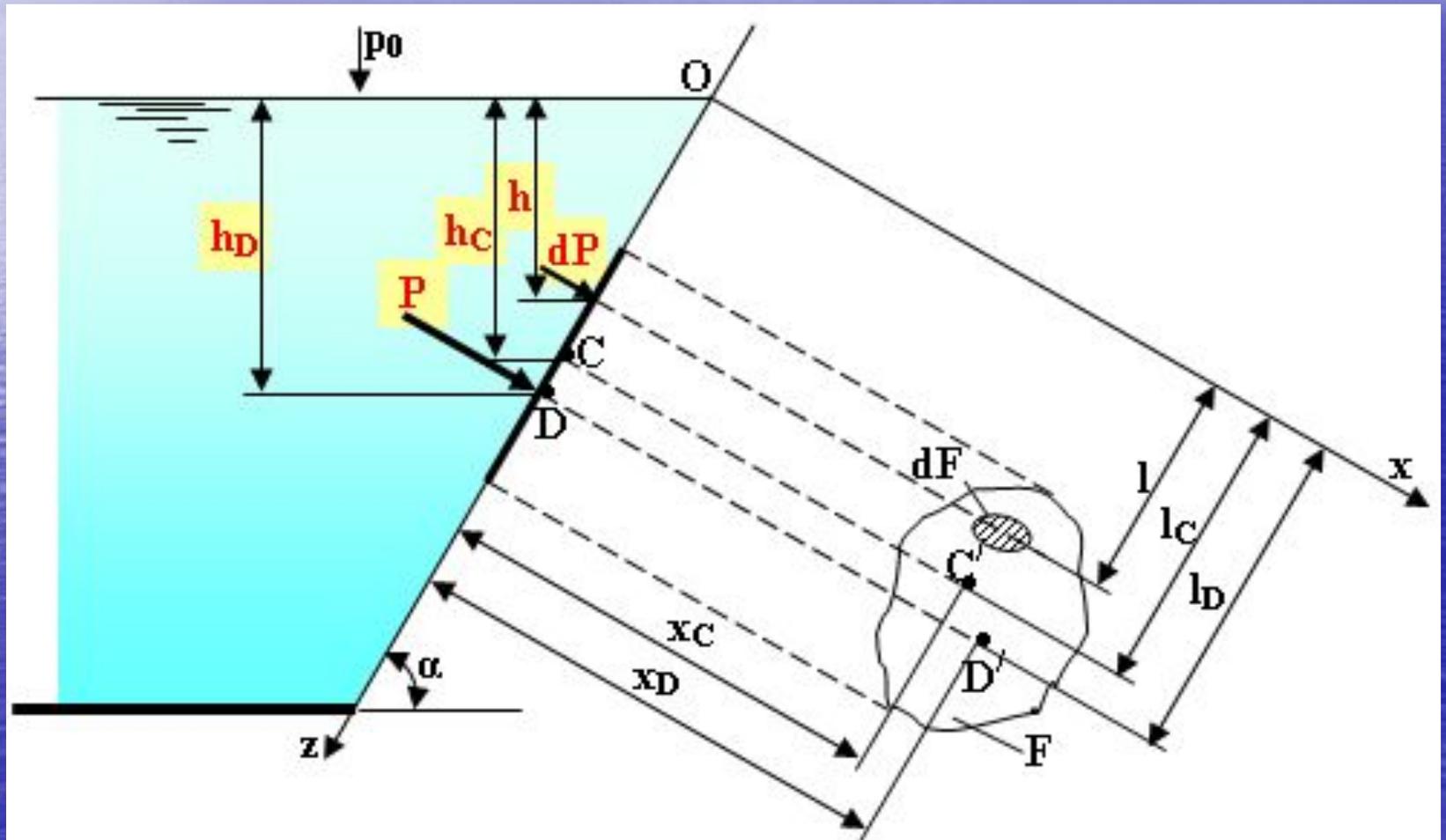
$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \pi R^2 h_{\text{в}} / 2$$

$$h_{\text{в}} = 2(h - h_0)$$

$$r_{\text{с}} = \sqrt{2g(h_0 + h/2)}/\omega$$

$$r_{\text{м}} = \sqrt{2g(h_0 - h/2)}/\omega$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ



СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

$$dP = p dF = (p_0 + \rho g h) dF = p_0 dF + \rho g h \cdot dF$$

$$P = \int_F p_0 dF + \int_F \rho g h \cdot dF = p_0 F + \rho g \sin \alpha \int_F l \cdot dF$$

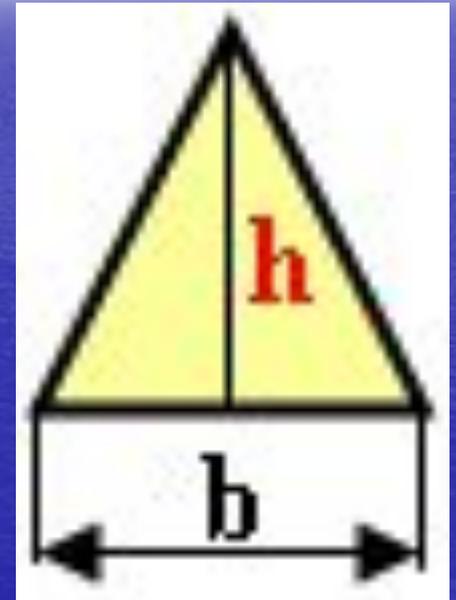
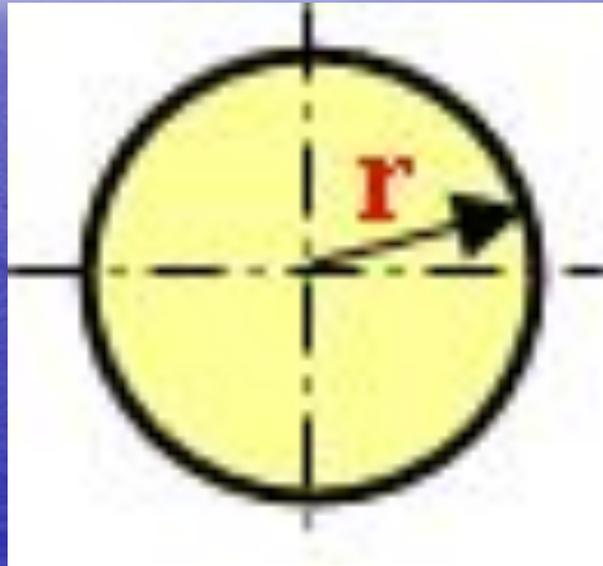
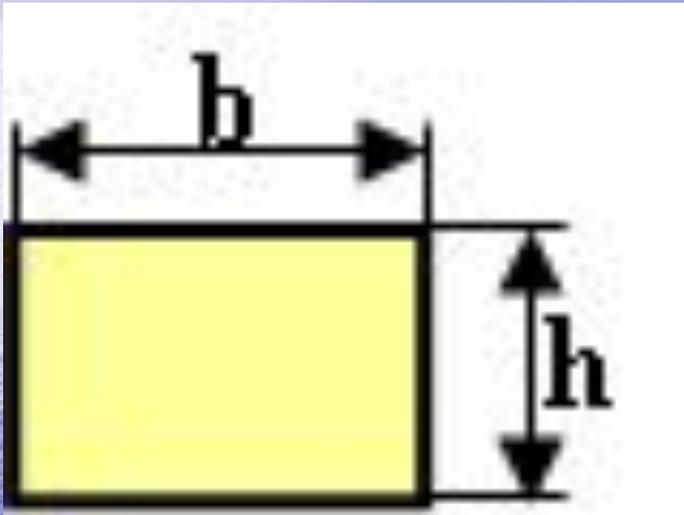
$$\int_F l \cdot dF = l_c \cdot F$$

$$P = p_0 F + \rho g \sin \alpha \cdot l_c \cdot F = p_0 F + \rho g h_c \cdot F$$

$$P = (p_0 + \rho g h_c) \cdot F = p_c \cdot F$$

$$l_D = l_c + I_0 / (F \cdot l_c)$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

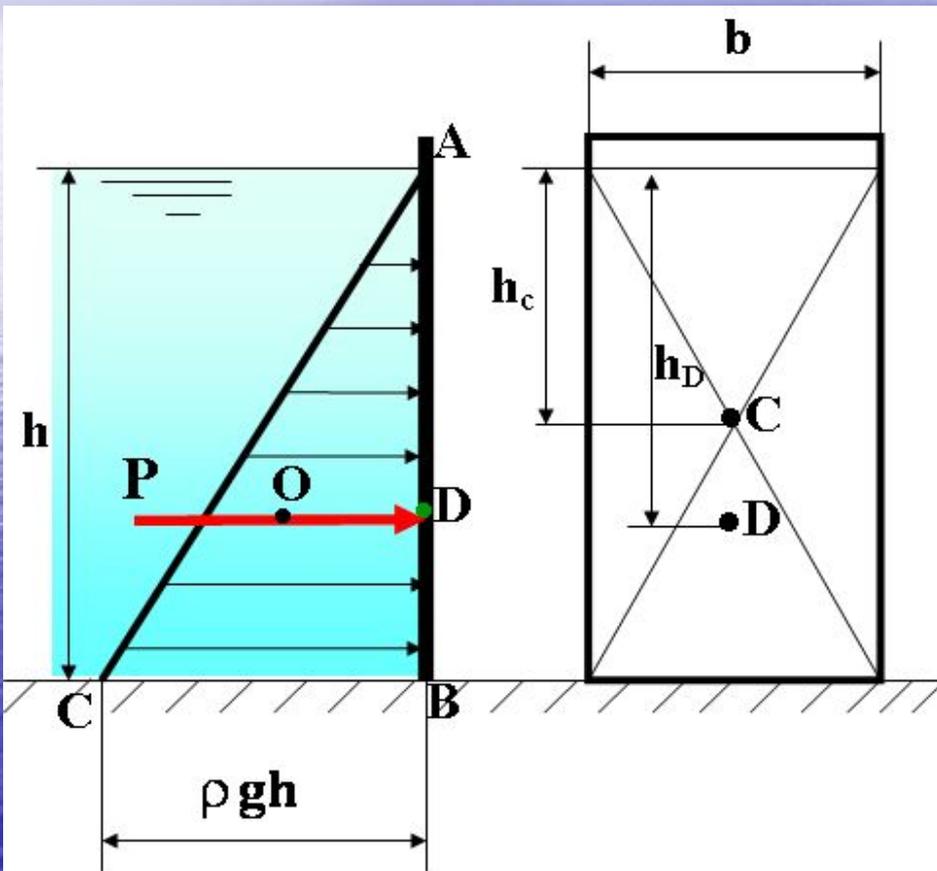


$$I_0 = bh^3/12$$

$$I_0 = \pi r^4/4$$

$$I_0 = bh^3/36$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ



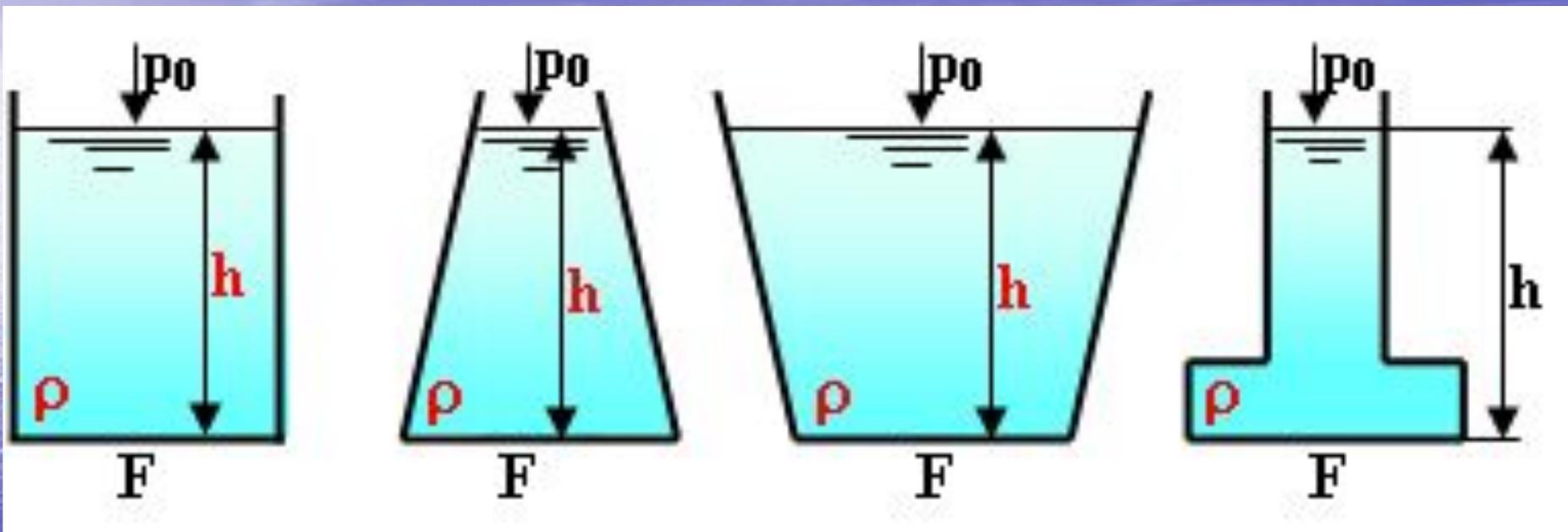
$$P = \rho g \left(\frac{h}{2} \right) \cdot b h = \frac{1}{2} \cdot \rho g h^2 b$$

$$h_D = \frac{h}{2} + \frac{2bh^3}{12bh^2} = \frac{2}{3}h$$

$$F_{\text{эп}} = \left(\frac{1}{2} \right) \rho g h^2$$

$$P = F_{\text{эп}} \cdot b$$

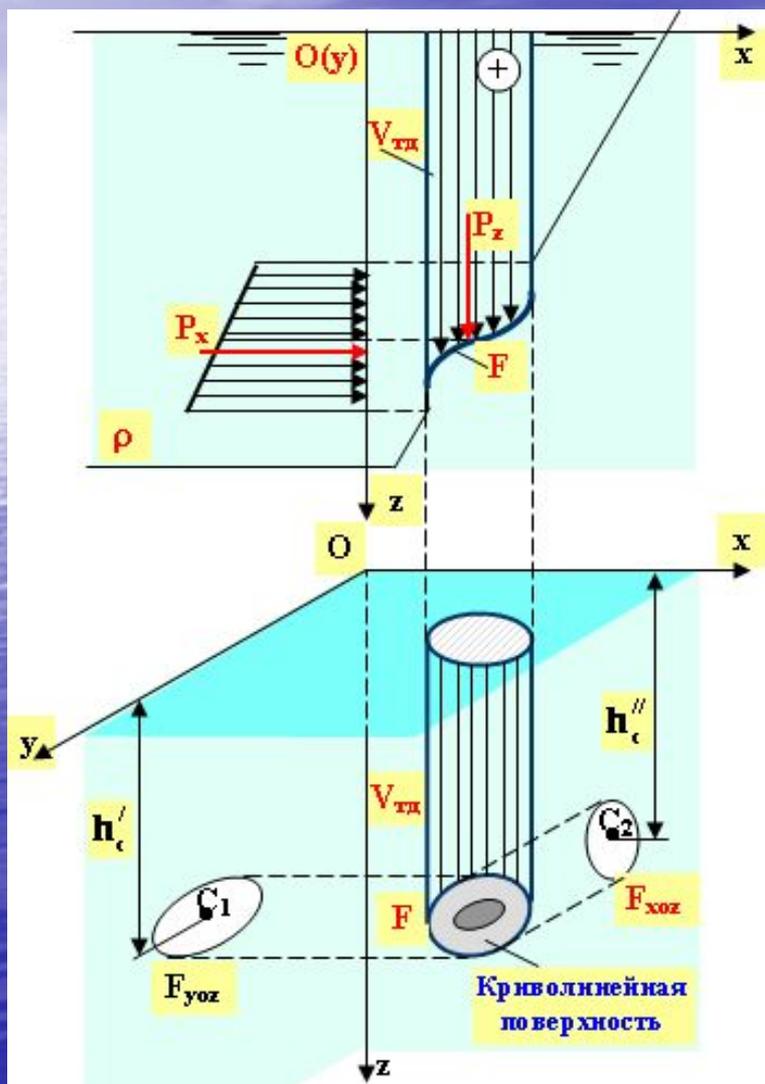
ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС



$$P = p \cdot F = (p_0 + \rho gh) \cdot F$$

Сила давления на дно сосуда, заполненного жидкостью, не зависит от формы сосуда и формы его дна

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



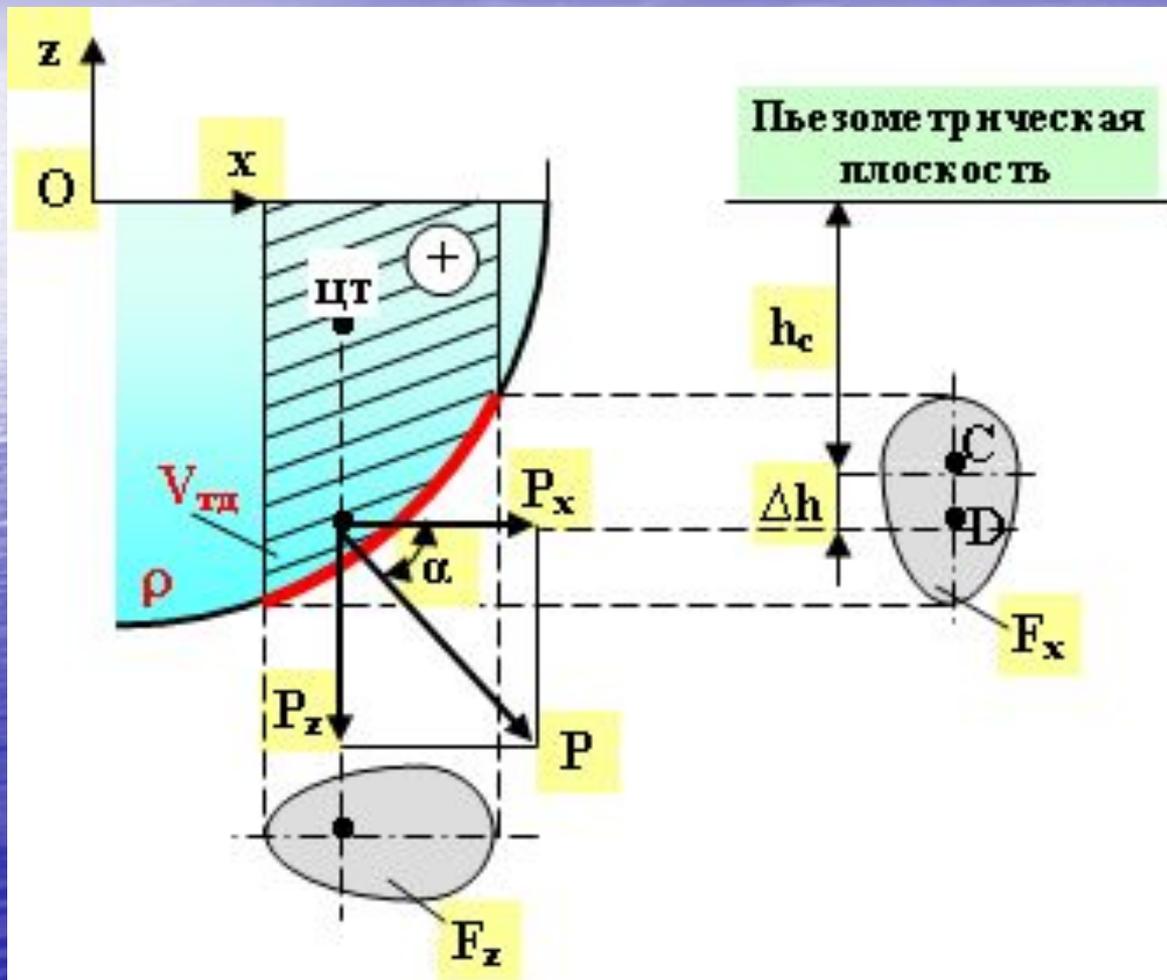
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$P_x = \rho g h'_c \cdot F_{yoz}$$

$$P_y = \rho g h''_c \cdot F_{xoz}$$

$$P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ



$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

*Вертикальная составляющая
силы давления*

$$dP_z = dP \cdot \sin \alpha$$

$$dP_z = \rho g h \cdot dF_z$$

$$dF_z = dF \cdot \sin \alpha$$

$$P_z = \int_F \rho g h \cdot dF_z$$

$$V_{\text{тд}} = \int_F h \cdot dF_z$$

$$P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

*Горизонтальная составляющая
силы давления*

$$dP_x = dP \cdot \cos \alpha$$

$$dP_x = \rho g h \cdot dF_x$$

$$dF_x = dF \cdot \cos \alpha$$

$$P_x = \int_F \rho g h \cdot dF_x$$

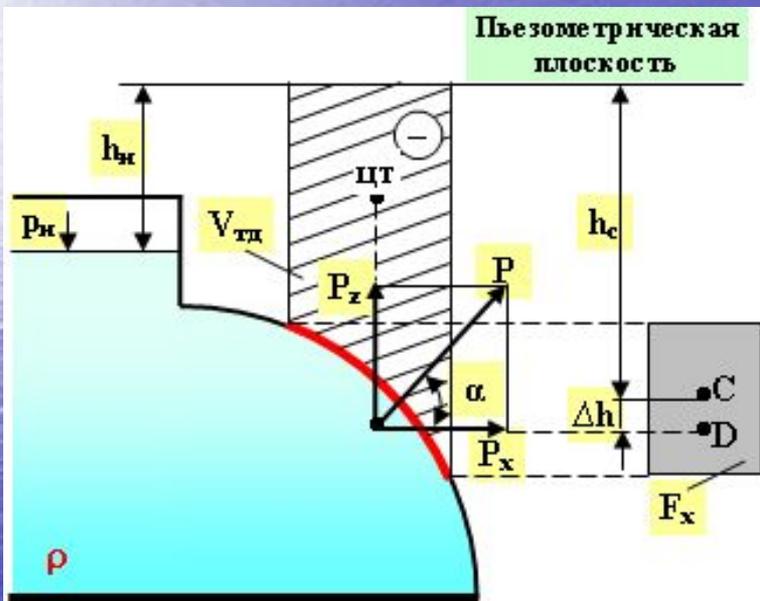
$$P_x = \rho g h_c \cdot F_x$$

$$h_D = h_c + I_0 / h_c F_x$$

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Одностороннее воздействие жидкости

Избыточное давление



$$P_x = p_{\text{сн}} \cdot F_x$$

$$P_x = \rho g h_c \cdot F_x$$

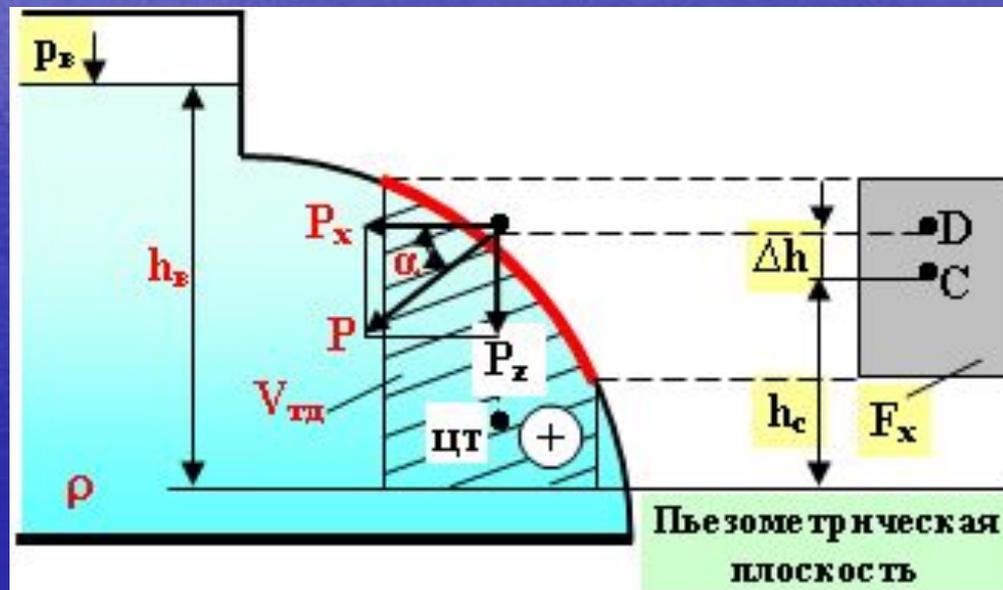
$$P_x = p_{\text{св}} \cdot F_x$$

$$P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

$$P = \rho g \sqrt{(h_c F_x)^2 + V^2}$$

$$\text{tg} \alpha = V / (h_c F_x)$$

Вакуум



$$P_x = p_{\text{сн}} \cdot F_x$$

$$P_x = \rho g h_c \cdot F_x$$

$$P_x = p_{\text{св}} \cdot F_x$$

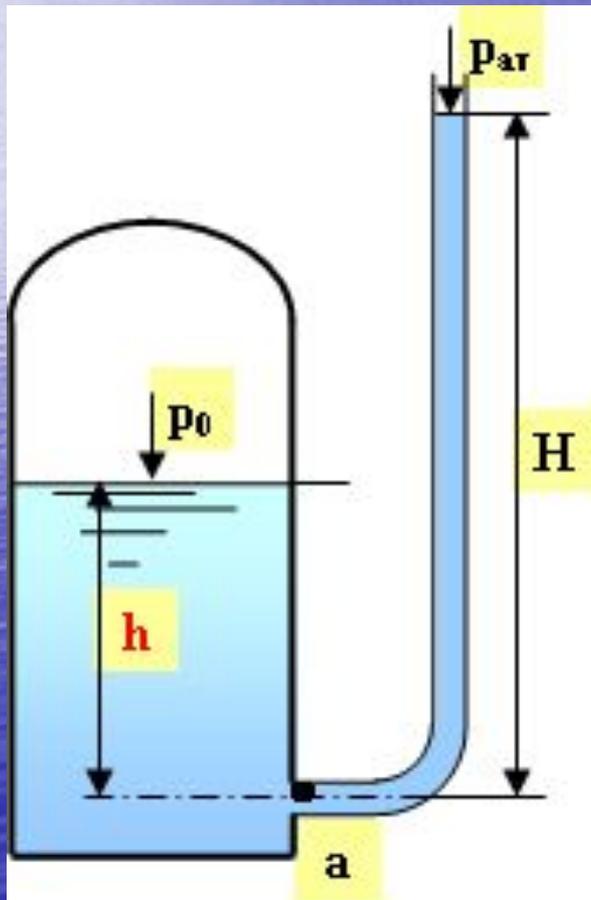
$$P_z = \rho g V_{\text{тд}}$$

$$P = \rho g \sqrt{(h_c F_x)^2 + V^2}$$

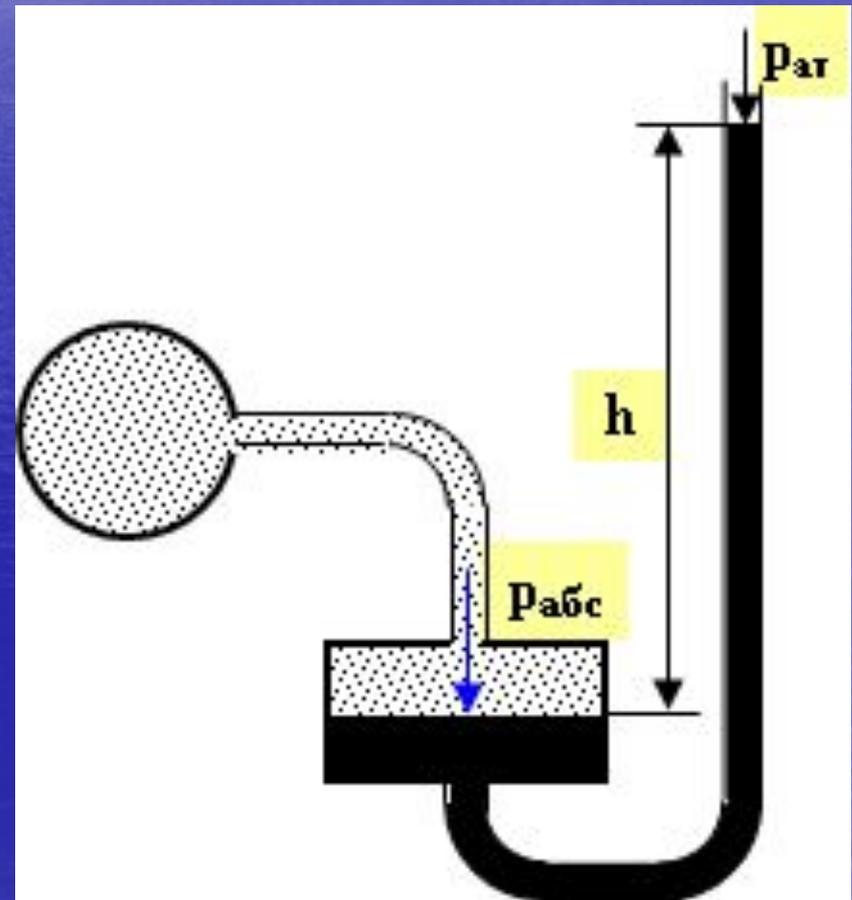
$$\text{tg} \alpha = V / (h_c F_x)$$

ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Пьезометр

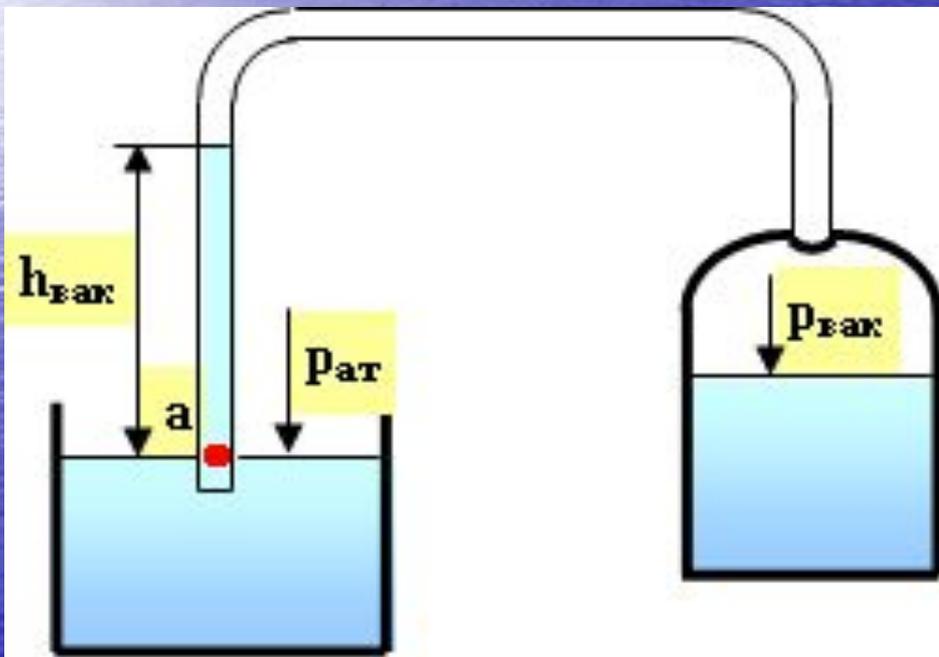


Ртутно-чашечный манометр

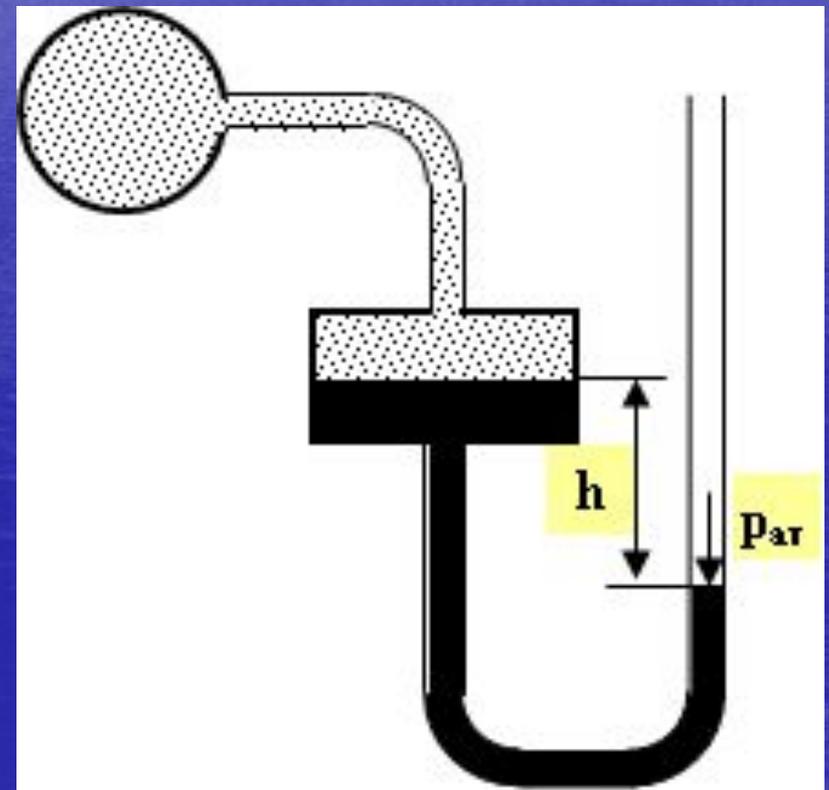


ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Вакуумметр



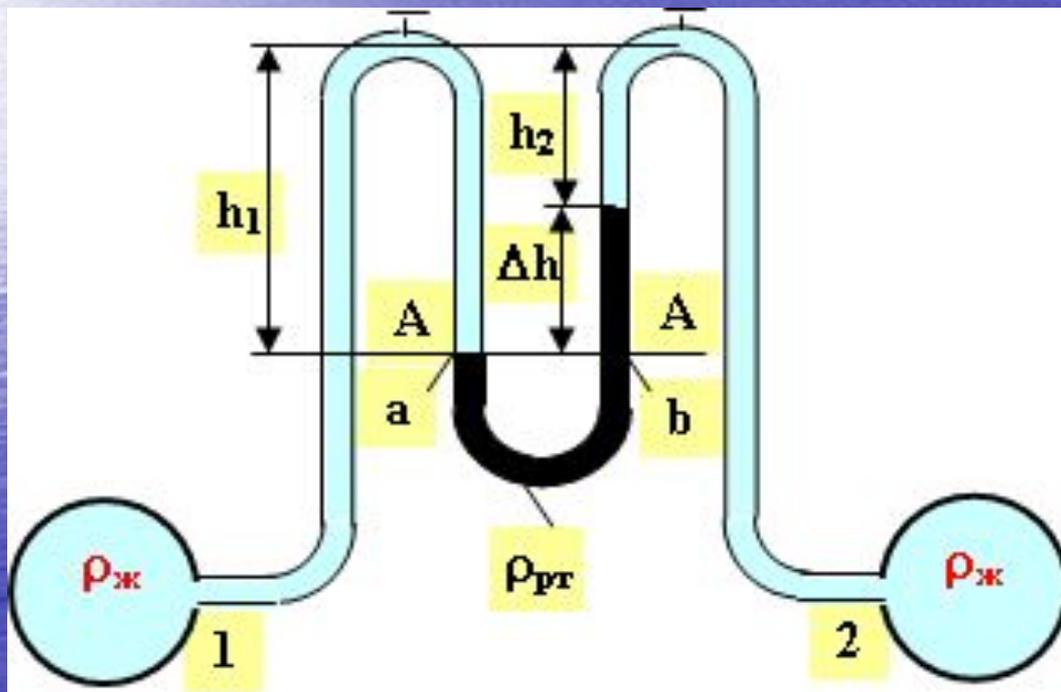
Ртутно-чашечный вакуумметр



ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

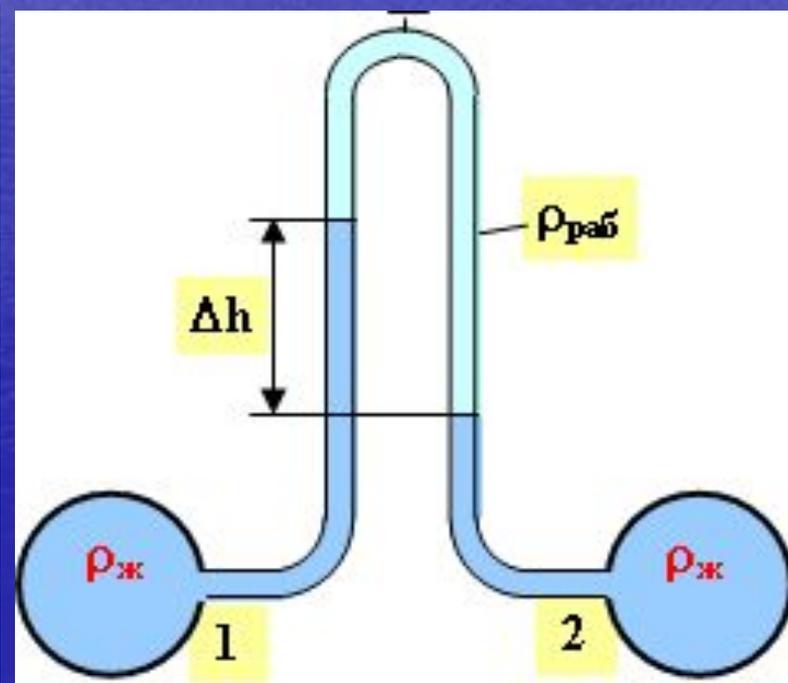
Дифференциальный манометр

$$(\rho_{\text{раб}} > \rho_{\text{ж}})$$



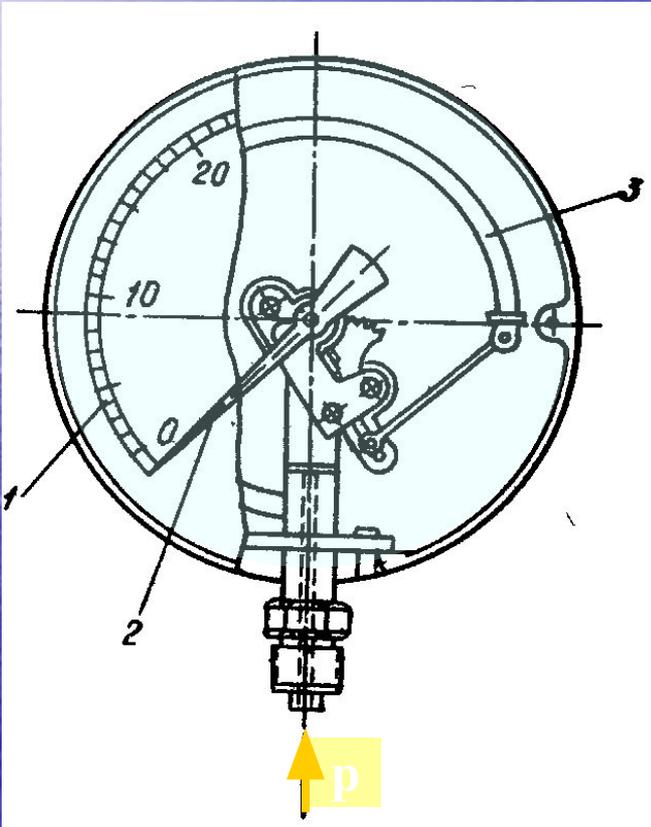
Дифференциальный манометр

$$(\rho_{\text{раб}} < \rho_{\text{ж}})$$



ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Пружинный манометр



Мембранный манометр

