Тема 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Вероятность случайного события

Степень объективной возможности случайного события можно измерять числом.

Это число называется **вероятностью случайного события.**

Около этого числа группируются относительные частоты данного случайного события

Абсолютная и относительная частота

- Пусть проведено n испытаний, в которых событие А произошло m раз.

Число m называют абсолютной частотой или просто частотой события А.

Отношение

$$P^*(А)=\frac{m}{n}$$

называют относительной частотой события А.

Статистическое определение вероятности

- Вероятностью события А в данном испытании называют число ***Р(А)***, около которого группируются значения относительной частоты при большом числе испытаний n.

Полной группой событий называется множество всех событий для данного испытания, если его результатом становится выполнение хотя бы одного из них .

- События образующие полную группу попарно несовместимых равновозможных событий называют элементарными.

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ - полная группа событий для бросания игрального кубика, где элементарные события:

U_1- выпадение 1, U_2- выпадение 2, U_2- выпадение 2, U_3- выпадение 3, U_4- выпадение 4, U_5- выпадение 5, U_6- выпадение 6 очков.

Событие А называется благоприятствующим событию В, если наступление события А влечет за собой наступление события В.

Событие В – выпадение четного числа очков.

U_2, , U_4, U_6 - благоприятствующие события.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных событий m, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу n всех элементарных событий, входящих в данную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

Противоположные события

С каждым событием *А* связано **противоположное событие В**, состоящее в том, что событие *А* ***не*** осуществляется.

Противоположные события, очевидно, несовместимы.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

Достоверные события

Событие называется **достоверным,** если оно наступает всегда, при любом испытании.

Вероятность достоверного события всегда равна 1.

Невозможные события

Событие называют **невозможным**, если оно не наступает никогда, то есть благоприятных исходов для него 0.

Вероятность невозможного события равна 0 .

Независимые события

- Несколько событий A_1, A_2,…A_k называются независимыми в совокупности, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.
- В противном случае события называют зависимыми.

Сумма событий

Суммой событий A и B называют событие C=A+B, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B

Произведение событий

- Произведением событий A и B называют событие C=AB, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A и событие B.

Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

- Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Условная вероятность

Пусть события А и В – зависимые. Условной вероятностью события

Р(А /В) называется вероятность события А при условии, что событие В уже наступило.

Условной вероятностью события

Р(В /А) называется вероятность события В при условии, что событие А уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

- Вероятность произведения двух событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

$$P(AB)= P(B)P(A/B)$$

<u>Вопрос 1</u>

Вероятность наступления некоторого события НЕ МОЖЕТ быть равна:

1. 3/2
2. 1
3. 0
4. 2/3

Вопрос 2

Среди перечисленных событий **достоверным** является:

1. выпадение 6 очков при выбрасывании игральной кости
2. выпадение менее 7 очков при выбрасывании игральной кости
3. выпадение четного числа очков при выбрасывании игральной кости
4. выпадение нечетного числа очков при выбрасывании игральной кости

Вопрос 3

Среди перечисленных событий при однократном бросании игральной кости совместимы

1. Выпадение четного числа очков и выпадение более трех очков
2. Выпадение одного очка и выпадение более трех очков
3. Выпадение шести очков и выпадение менее трех очков
4. Выпадение четного числа очков и выпадение менее двух очков

Вопрос 4

- Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на грани выпадет число очков большее 2, но меньше 5 равна…

1. 1
2. 1/3
3. 1/2
4. 1/6

Вопрос 5

- **При испытании партии приборов относительная частота исправных изделий оказалась равной 0,98. Число неисправных приборов в партии из 10 000 штук равно …**

- **Ответ__________________**

Задача

В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

Решение:

Количество всех возможных результатов $n=3+9=12$.

Опытов, в результате которых может быть вынут черный шар $m=9$.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Ответ: 0, 75

Задача

В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Опыт: бросают три игральные кости.

Благоприятное событие А: в сумме выпало 7 очков.

К-во благоприятных событий m=?

331	223	511
313	232	151
133	322	115
412	142	
421	214	
124	241	

15

К-во всех событий группы n=?

1-я кость - 6 вариантов
2-я кость - 6 вариантов
3-я кость - 6 вариантов

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{216} \approx \boxed{0{,}07}$$

Задача

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

Условие можно трактовать так: какова вероятность того, что все четыре раза выпадет решка?

К-во всех событий группы n=?

1-й раз - 2 варианта
2-й раз - 2 варианта
3-й раз - 2 варианта
4-й раз - 2 варианта

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

К-во благоприятных событий m=?

m=1

Четыре раза выпала решка.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{16} = \boxed{0{,}0625}$$

Задача

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

- **1) сумма выпавших очков равна 7;**
- **2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.**

Задача

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

1) сумма выпавших очков равна 7;

2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение.1) Представим полную группу событий для суммы выпавших очков. n=36

I II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Выбираем благоприятствующие события (выделены желтым

m=6.

Вычисляем вероятность

$$P = \frac{m}{n};$$

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

I II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

1) сумма выпавших очков равна 7;

2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение.1) m=6, n=36

$$P = \frac{m}{n}; P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

I II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

- 1) сумма выпавших очков равна 7;
- 2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение.2) m=2, n=36

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$$

Для суммы	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5 4	6	7
2	3	4	5 6	6	7	8
3	4	5 6	6	7	8	9
4	5 4	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А,А,Е, К,Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А,А,Е, К,Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

- Решение.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$m =$$

$$n =$$

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А,А,Е, К,Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

- Решение.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$m = 1, n = \frac{6!}{2!} = 360$$

$$P = \frac{1}{360} \approx 0{,}003$$

Задача

Стрелок производит один выстрел по мишени.

Событие A – 10 очков   P(A)=0,11

Событие B – 9 очков   P(B)=0,23

Событие C – 8 очков   P(C)=0,17

Найти вероятность, что будет выбито менее 8 очков.

Задача

Стрелок производит один выстрел по мишени.

Событие A – 10 очков   P(A)=0,11

Событие B – 9 очков   P(B)=0,23

Событие C – 8 очков   P(C)=0,17

Найти вероятность, что будет выбито менее 8 очков.

D – менее 8 очков

P(D)-?

Задача

- Решение. Рассмотрим противоположное событие

$$\overline{D} = A + B + C - \text{не менее 8 очков}$$

$$P(\overline{D}) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(\overline{D} + P(D) = 1$$

P(D)=1-(0,11+0,23 +0,17)=0,49

Задача

Сигнализация имеет 2 независимых датчика. Вероятность срабатывания 1-го равна 0,95, а второго 0,98. Найти вероятность, что:

- **1) сработают оба датчика;**
- **2) сработает хотя бы один датчик.**

- **Сигнализация имеет 2 независимых датчика. Вероятность срабатывания 1-го равна 0,95, а второго 0,98. Найти вероятность, что:**
- **1) сработают оба датчика;**
- **2) сработает хотя бы один датчик.**

Решение.1) А – сработал 1-й, В –сработал 2-й. АВ - сработают оба датчика. А и В – независимые события.

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(AB)=0{,}95\cdot 0{,}98=0{,}931$$

- Решение.2) A+B - сработает хотя бы один датчик. A и B –совместимые события.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)= 0,95+0,98-0,95\cdot 0,98=0,999$$

Задача

10 человек собрались в кино. Билеты купили в один ряд, места с 1 по 10 распределили по жребию. Какова вероятность того, что Ваня и Таня будут сидеть рядом?

m= , n=

- **10 человек собрались в кино. Билеты купили в один ряд, места с 1 по 10. Места распределили по жребию. Какова вероятность того, что Ваня и Таня будут сидеть рядом?**

$m=18\cdot 8!,\ n=10!$

$$P=\frac{18\cdot 8!}{10!}=0{,}2$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10