

Тема 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Вероятность случайного события

Степень объективной возможности случайного события можно измерять числом.

Это число называется **вероятностью случайного события.**

Около этого числа группируются относительные частоты данного случайного события

Абсолютная и относительная частота

- Пусть проведено n испытаний, в которых событие A произошло m раз.

Число m называют абсолютной частотой или просто частотой события A .

Отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

называют относительной частотой события A .

Статистическое определение вероятности

- Вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при большом числе испытаний n .

Полной группой событий

называется множество всех событий для данного испытания, если его результатом становится выполнение хотя бы одного из НИХ .

- События образующие полную группу попарно несовместимых равновозможных событий называют **элементарными**.

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ - полная группа событий для бросания игрального кубика, где элементарные события:

U_1 - выпадение 1, U_2 - выпадение 2, U_2 - выпадение 2, U_3 - выпадение 3, U_4 - выпадение 4, U_5 - выпадение 5, U_6 - выпадение 6 очков.

Событие A называется **благоприятствующим** событию B , если наступление события A влечет за собой наступление события B .

Событие B – выпадение четного числа очков.

U_2, U_4, U_6 - благоприятствующие события.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события A называется отношение числа элементарных событий m , которые благоприятствуют этому событию, к общему числу n всех элементарных событий, входящих в данную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n} .$$

Вероятность есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

Противоположные события

С каждым событием A связано **противоположное событие B** , состоящее в том, что событие A *не* осуществляется.

Противоположные события, очевидно, несовместимы.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

Достоверные события

Событие называется **достоверным**, если оно наступает всегда, при любом испытании.

Вероятность достоверного события всегда равна 1.

Невозможные события

Событие называют **невозможным**, если оно не наступает никогда, то есть благоприятных исходов для него 0.

Вероятность невозможного события равна 0 .

Независимые события

- Несколько событий A_1, A_2, \dots, A_k называются независимыми в совокупности, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.
- В противном случае события называют зависимыми.

Сумма событий

Суммой событий A и B называют событие $C=A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B

Произведение событий

- Произведением событий A и B называют событие $C=AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A и событие B .

Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

- Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AВ)=P(A)P(B)$$

Условная вероятность

Пусть события A и B – зависимые.

Условной вероятностью события

$P(A / B)$ называется вероятность события A при условии, что событие B уже наступило.

Условной вероятностью события

$P(B / A)$ называется вероятность события B при условии, что событие A уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

- Вероятность произведения двух событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

$$P(AB) = P(B)P(A/B)$$

Вопрос 1

Вероятность наступления некоторого события НЕ МОЖЕТ быть равна:

1. $3/2$
2. 1
3. 0
4. $2/3$

Вопрос 2

Среди перечисленных событий **достоверным** является:

1. выпадение 6 очков при выбрасывании игральной кости
2. выпадение менее 7 очков при выбрасывании игральной кости
3. выпадение четного числа очков при выбрасывании игральной кости
4. выпадение нечетного числа очков при выбрасывании игральной кости

Вопрос 3

Среди перечисленных событий при однократном бросании игральной кости совместимы

1. Выпадение четного числа очков и выпадение более трех очков
2. Выпадение одного очка и выпадение более трех очков
3. Выпадение шести очков и выпадение менее трех очков
4. Выпадение четного числа очков и выпадение менее двух очков

Вопрос 4

- Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на грани выпадет число очков большее 2, но меньше 5 равна...

1. 1

2. $1/3$

3. $1/2$

4. $1/6$

Вопрос 5

- При испытании партии приборов относительная частота исправных изделий оказалась равной 0,98. Число неисправных приборов в партии из 10 000 штук равно ...
- Ответ _____

Задача

В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

Решение:

Количество всех возможных результатов $n=3+9=12$.

Опытов, в результате которых может быть вынут черный шар $m=9$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Ответ: 0,75

Задача

В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.



Опыт: бросают три игральные кости.

Благоприятное событие A : в сумме выпало 7 очков.

К-во благоприятных событий $m=?$

331 223 511
313 232 151
133 322 115

412 142
421 214
124 241

15

К-во всех событий группы $n=?$

1-я кость - 6 вариантов
2-я кость - 6 вариантов
3-я кость - 6 вариантов

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{216} \approx 0,07$$

Задача

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.



Условие можно трактовать так: какова вероятность того, что все четыре раза выпадет решка?

К-во благоприятных событий $m=?$

$$m=1$$

Четыре раза выпала решка.

К-во всех событий группы $n=?$

1-й раз - 2 варианта

2-й раз - 2 варианта

3-й раз - 2 варианта

4-й раз - 2 варианта

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Задача

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

- **1) сумма выпавших очков равна 7;**
- **2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.**

Задача

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

1) сумма выпавших очков равна 7;

2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение. 1) Представим полную группу событий для суммы выпавших очков. $n=36$

I	II	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12



Выбираем благоприятствующие события (выделены желтым)

$$m=6.$$

Вычисляем вероятность

$$P = \frac{m}{n};$$
$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

I	II	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

1) сумма выпавших очков равна 7;

2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение. 1) $m=6$, $n=36$

$$P = \frac{m}{n}; P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

I	II	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12

Брошены 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

- 1) сумма выпавших очков равна 7;
- 2) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 4.

Решение.2) $m=2$, $n=36$

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0,056$$

Для суммы	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5 4	6	7
2	3	4	5 6	6	7	8
3	4	5 6	6	7	8	9
4	5 4	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А, А, Е, К, Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А,А,Е, К,Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

- Решение.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$m =$$

$$n =$$

Задача

Ребенок играет с карточками разрезной азбуки с буквами А,А,Е, К,Р, Т. Найти вероятность, что он случайно сложит слово «КАРЕТА».

- Решение.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$m = 1, n = \frac{6!}{2!} = 360$$

$$P = \frac{1}{360} \approx 0,003$$

Задача

Стрелок производит один выстрел по мишени.

Событие А – 10 очков $P(A)=0,11$

Событие В – 9 очков $P(B)=0,23$

Событие С – 8 очков $P(C)=0,17$

Найти вероятность, что будет выбито менее 8 очков.

Задача

Стрелок производит один выстрел по мишени.

Событие А – 10 очков $P(A)=0,11$

Событие В – 9 очков $P(B)=0,23$

Событие С – 8 очков $P(C)=0,17$

Найти вероятность, что будет выбито менее 8 очков.

D – менее 8 очков

$P(D)$ -?

Задача

Решение. Рассмотрим противоположное событие

$\bar{D} = A + B + C$ – не менее 8 очков

$$P(\bar{D}) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(\bar{D}) + P(D) = 1$$

$$P(D) = 1 - (0,11 + 0,23 + 0,17) = 0,49$$

Задача

Сигнализация имеет 2 независимых датчика. Вероятность срабатывания 1-го равна 0,95, а второго 0,98. Найти вероятность, что:

- 1) сработают оба датчика;**
- 2) сработает хотя бы один датчик.**

Сигнализация имеет 2 независимых датчика. Вероятность срабатывания 1-го равна 0,95, а второго 0,98. Найти вероятность, что:

- 1) сработают оба датчика;**
- 2) сработает хотя бы один датчик.**

Решение. 1) А – сработал 1-й, В – сработал 2-й. АВ - сработают оба датчика. А и В – независимые события.

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(AB)=0,95 \cdot 0,98=0,931$$

Решение.2) $A+B$ - сработает хотя бы один датчик. A и B –совместимые события.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)= 0,95+0,98-0,95 \cdot 0,98=0,999$$

Задача

10 человек собрались в кино. Билеты купили в один ряд, места с 1 по 10 распределили по жребию. Какова вероятность того, что Ваня и Таня будут сидеть рядом?

$m=$, $n=$



10 человек собрались в кино. Билеты купили в один ряд, места с 1 по 10. Места распределили по жребию. Какова вероятность того, что Ваня и Таня будут сидеть рядом?

$$m=18 \cdot 8!, n=10!$$

$$P = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = 0,2$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----