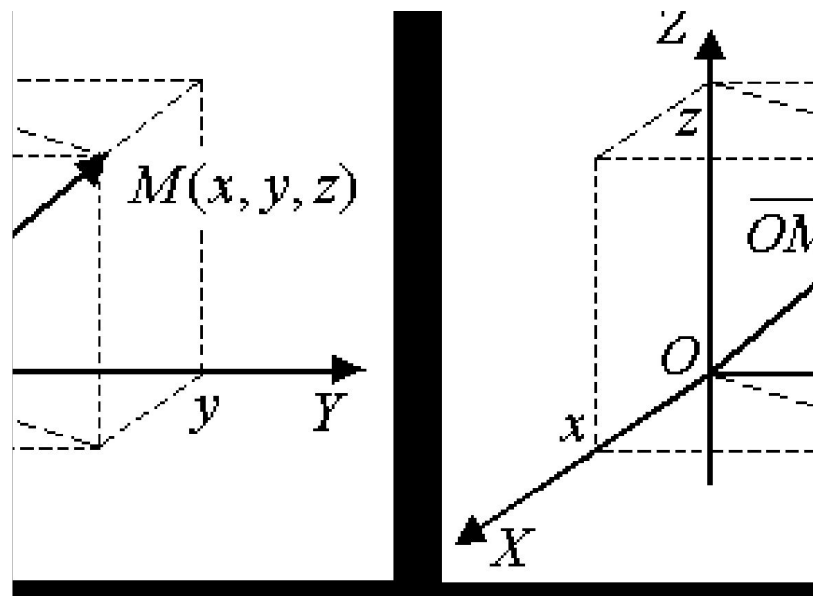


Аналитическая геометрия

Тема 1

Плоскость и прямая в пространстве

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



$$F(x, y, z) = 0$$

- Расстояние между двумя точками.

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Деление отрезка в данном отношении

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Координаты середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

1. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве и ее уравнения

1) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

$M(x, y, z)$ – произвольная точка на плоскости P ;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка на плоскости P .

$$\vec{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ – вектор, перпендикулярный плоскости.

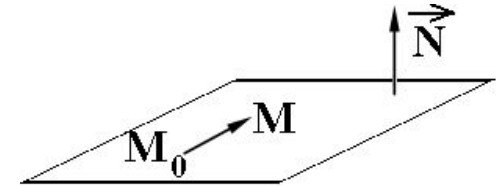
Вектор N принято называть **нормальным вектором** плоскости.

Точка $M(x, y, z)$ будет лежать на плоскости, если $\vec{M_0M} \perp \vec{n}$. Уравнение плоскости определяется условием

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2) Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



Пример.

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{N}=\{2;2;3\}$.

Решение:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0$$

3) Уравнение плоскости в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

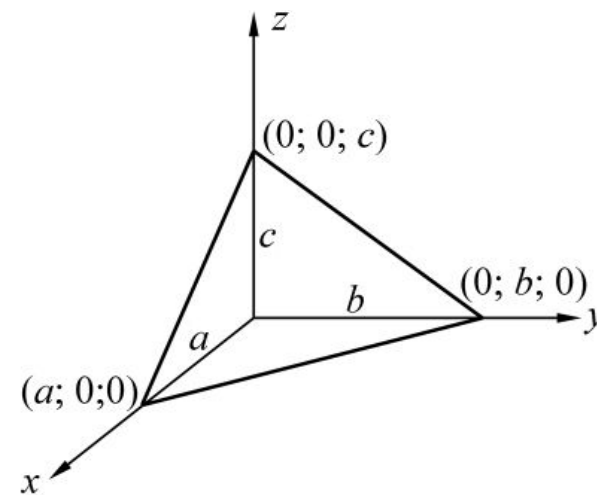
здесь числа $a = \frac{-D}{A}$, $b = \frac{-D}{B}$, $c = \frac{-D}{C}$ представляют собой отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Приведение общего уравнения плоскости к уравнению в отрезках:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1.$$



Задача.

Какие отрезки отсекает на осях координат плоскость

$$2x - 4y + 6z - 12 = 0 ?$$

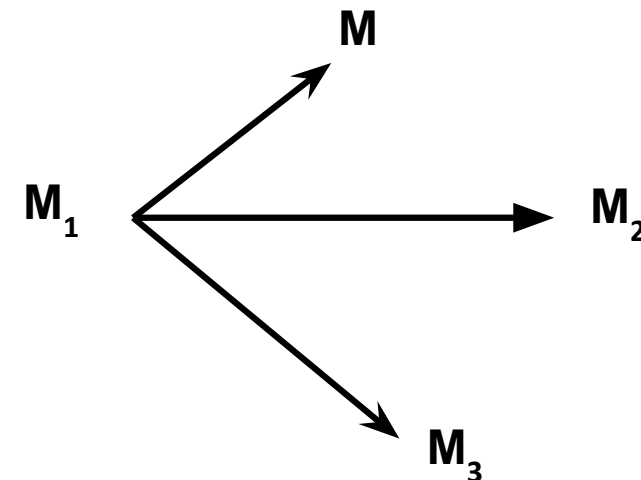
Решение: Приведем общее уравнение плоскости к виду уравнения «в отрезках»:

$$\frac{2x}{12} - \frac{4y}{12} + \frac{6z}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$$

Ответ: отрезки, отсекаемые на осях: $a = 6$, $b = -3$, $c = 2$.

4) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Даны три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

$M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.

Точка M принадлежит плоскости $M_1M_2M_3$

в том и только в том случае, если компланарны векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Условие компланарности $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$ в координатной форме и дает искомое уравнение.

5) Нормальное уравнение плоскости

$$x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \beta \sin \alpha + z \sin \beta = p$$

или

$$n_0 = \{ \cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \}$$

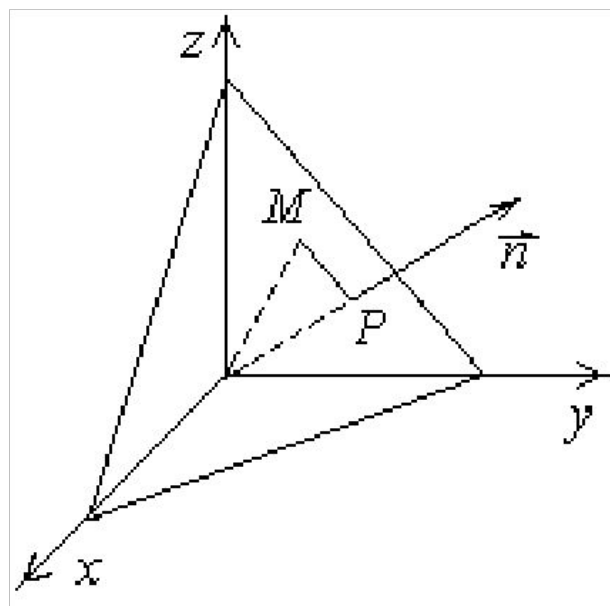
единичный вектор нормали к плоскости
через начало координат в
положительном направлении.

$M(x, y, z)$ — произвольная точка.

$$\vec{OM} = \{x, y, z\}.$$

Проекция вектора \vec{OM} на нормаль

$$pr_n \vec{OM} = \vec{OM} \cdot n_0 = x \cos \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \beta + z \sin \beta$$



Если известна длина отрезка $OP = p$,

то уравнение $x \cos \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \beta + z \sin \beta = p$

задает нормальное уравнение плоскости.

Приведение общего уравнения плоскости к нормальному уравнению

$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – нормирующий множитель,
знак которого должен быть противоположен знаку D .

Общее уравнение плоскости приводится к *нормальному* виду домножением на нормирующий множитель:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0.$$

Неполные уравнения плоскости

A=0: $By + Cz + D = 0$ (отсутствует переменная x) – плоскость параллельна оси Ox ;

B=0: $Ax + Cz + D = 0$ (отсутствует переменная y) – плоскость параллельна оси Oy ;

C=0: $Ax + By + D = 0$ (отсутствует переменная z) – плоскость параллельна оси Oz ;

D=0: $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат;

A=B=0: $Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy ;

A=C=0: $By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz ;

B=C=0: $Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz ;

A=D=0 – плоскость проходит через ось Ox ;

B=D=0 – плоскость проходит через ось Oy ;

C=D=0 – плоскость проходит через ось Oz ;

A=B=D=0: $Cz = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy ;

A=C=D=0: $By = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz ;

B=C=D=0: $Ax = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz .

Условие перпендикулярности и параллельности плоскостей

$\pi_1 \perp \pi_2$, если $N_1 \perp N_2$ (Критерий ортогональности: скалярное произведение = 0)

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$\pi_1 \parallel \pi_2$, если $N_1 \parallel N_2$ (Критерий коллинеарности: их координаты пропорциональны или их векторное произведение равно нулю)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(7, -2, 3)$ параллельно плоскости $y - 3z + 5 = 0$.

Решение. Из уравнения известной плоскости $\vec{N} = \{0, 1, -3\}$. По условию плоскости параллельны. Значит,

$$A = 0, B = 1, C = -3.$$

Уравнение искомой плоскости

$$0 \cdot (x - 7) + 1 \cdot (y + 2) - 3 \cdot (z - 3) = 0 \rightarrow y - 3z + 11 = 0$$

Пример.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям:

$$x - y + 2z - 5 = 0,$$

$$2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Решение. Из уравнений заданных плоскостей имеем

$$\vec{N}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{N}_2 = (2, 1, -3),$$

требуется найти координаты нормали искомой плоскости:

$$\vec{N} = (A, B, C) - ?$$

1

способ:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \cdot \vec{N} = 0 \\ \vec{N}_2 \cdot \vec{N} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B + 2C = 0 \\ 2A + B - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 7, C = 3.$$

2

способ:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1, 7, 3).$$

Подставляя координаты точки (по условию – начало координат (0,0,0)) и координаты нормального вектора в уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, получаем искомое уравнение:

$$x + 7y + 3z = 0.$$

Условие совпадения (слияния) плоскостей

Если два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты их пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Угол между плоскостями

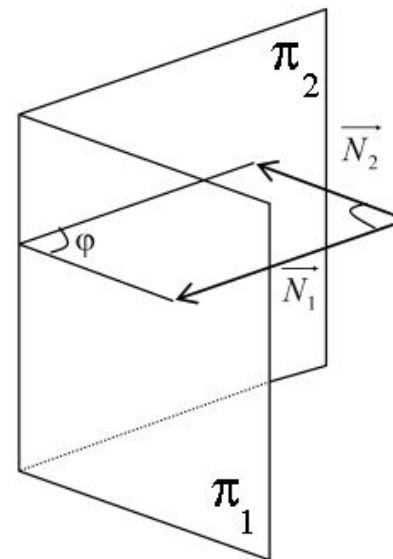
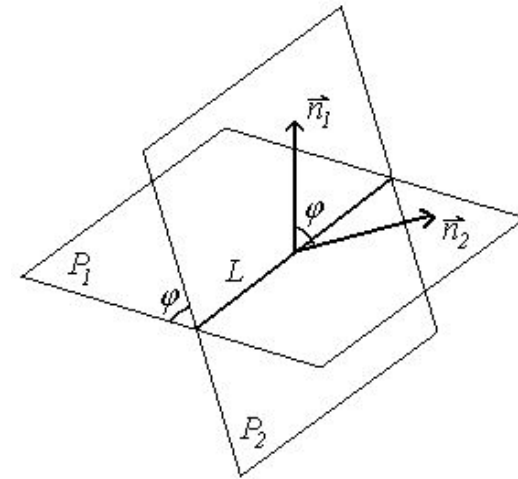
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Один из двугранных углов между плоскостями равен острому углу между их нормальными векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$$

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Пример. Найти угол между плоскостями

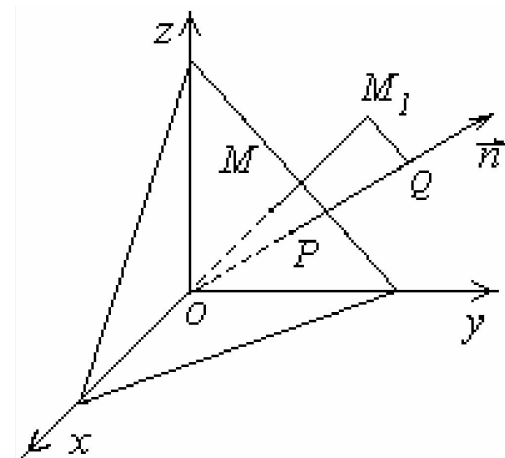
$$x - y - \sqrt{2}z - 6 = 0, \quad y = 0.$$

$$\vec{n}_1 = \{1, -1, -\sqrt{2}\} \quad \vec{n}_2 = \{0, 1, 0\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left| -\frac{1}{2} \right| \rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Расстояние от точки до ПЛОСКОСТИ

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример

Найдите расстояние точки $M(4, 3, 1)$ от плоскости $3x - 4y + 12z + 14 = 0$.

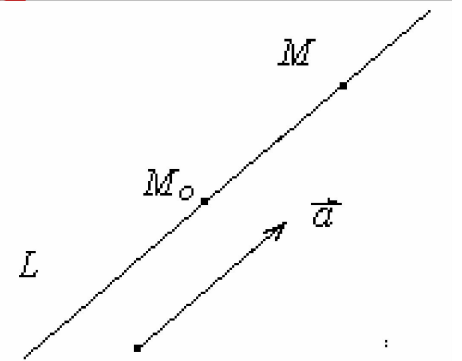
$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 2.$$

Прямая в пространстве

Прямая в пространстве

1) Общие уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



2) Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\mathbf{a} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой;

(x_0, y_0, z_0) – координаты известной точки прямой

3) Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Пример.

Составьте канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Находим координаты точки, лежащей на прямой. Для этого положим $x_0 = 1$, а две другие координаты найдем из системы:

$$\begin{cases} 3 + 2y_0 + 4z_0 - 11 = 0 \\ 2 + y_0 - 3z_0 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ z_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(1, 2, 1).$$

2) Находим направляющий вектор прямой:

$$\vec{N}_1 = (3, 2, 4), \quad \vec{N}_2 = (2, 1, -3),$$

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 17\vec{j} - \vec{k},$$

$$\vec{a} = (-10, 17, -1).$$

3) Канонические уравнения прямой: $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}$

Параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x = 1 - 10t, \\ y = 2 + 17t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

4) Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

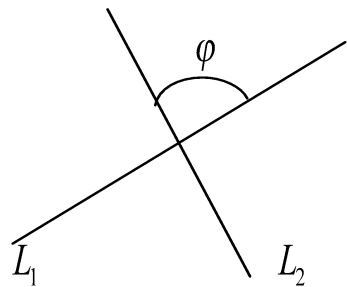
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - известные точки на прямой;

$M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (m; n; p)$ - направляющий вектор.

Угол φ между двумя прямыми в пространстве определяется углом между их направляющими векторами



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Пример.

Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1, -2, 1)$ и $M_2(3, 1, -1)$.

Решение

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-1}{-1-1} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Пример.

Определите угол между двумя прямыми:

$$L_1 : \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Прямые задаются пересечением плоскостей:

$$L_1 : \overset{\boxtimes}{N}_1 = (3, -4, -2), \overset{\boxtimes}{N}_2 = (2, 1, -2),$$
$$L_2 : \overset{\boxtimes}{N}_3 = (4, 1, -6), \overset{\boxtimes}{N}_4 = (0, 1, -3).$$

Направляющие векторы прямых:

$$\vec{a}_1 = \overset{\boxtimes}{N}_1 \times \overset{\boxtimes}{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k},$$

$$\vec{a}_2 = \overset{\boxtimes}{N}_3 \times \overset{\boxtimes}{N}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\cos \varphi = \frac{|10 \cdot 3 + 2 \cdot 12 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2} \cdot \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{98}{195};$$

$$\varphi = \arccos \frac{98}{195}.$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

условие перпендикулярности прямых: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

условие того, что прямые лежат в одной плоскости

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

расстояние от точки M_1 до прямой, проходящей через точку M_0

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$$

расстояние между двумя прямыми в пространстве

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Точка пересечения прямой и плоскости

Пример.

Найдите точку пересечения прямой $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$
и плоскости $\pi: 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. 1) Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t \Rightarrow \begin{cases} x-1 = t, \\ y+1 = -2t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

2) Подставим выражения для переменных x , y , z в уравнение плоскости и найдем значение параметра t

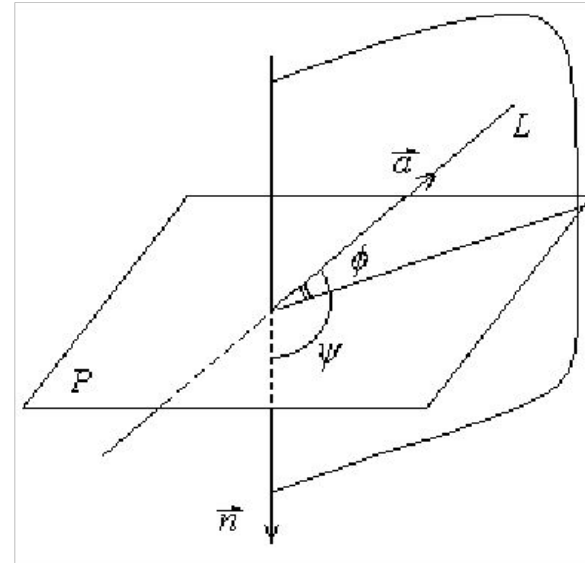
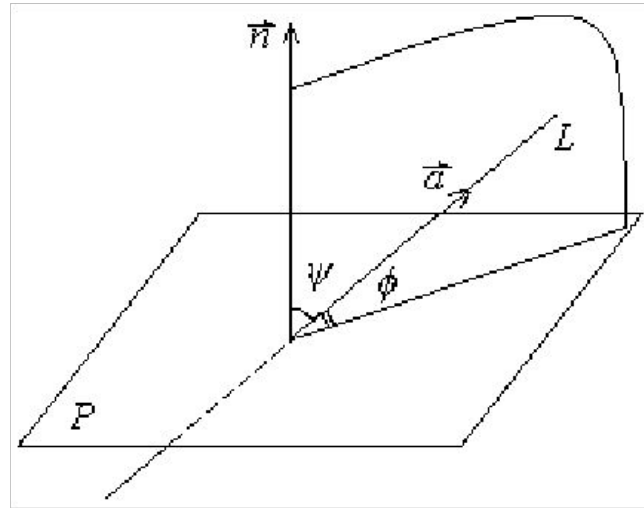
$$\pi: 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

$$2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1,$$

3) Найденное значение параметра t подставим в параметрические уравнения прямой и получим искомые координаты точки пересечения:

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$$

Угол между прямой и плоскостью



Угол ϕ между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть ψ – угол между вектором нормали N плоскости и направляющим вектором a прямой.

Если угол Ψ острый, то $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$; если угол Ψ тупой, то $\phi = \psi - \frac{\pi}{2}$,
то есть $\phi = \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right|$.

$$\sin \phi = \sin \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right| = |\cos \psi| = \frac{|(n \cdot a)|}{|n| \cdot |a|}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

условие параллельности $l \parallel \pi$

$$\Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

условие того, что прямая принадлежит плоскости $l \subset \pi$

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

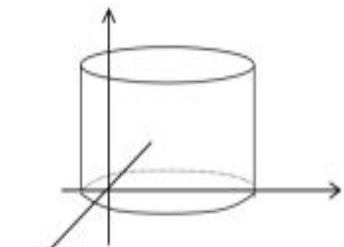
условие параллельности $l \perp \pi$

\Leftrightarrow

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

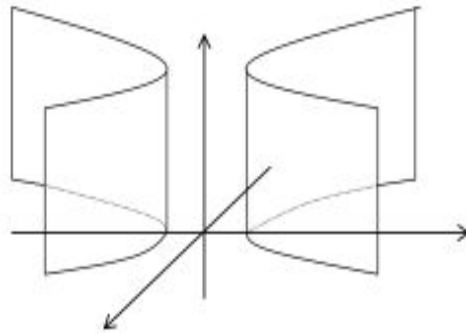
Цилиндрические поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



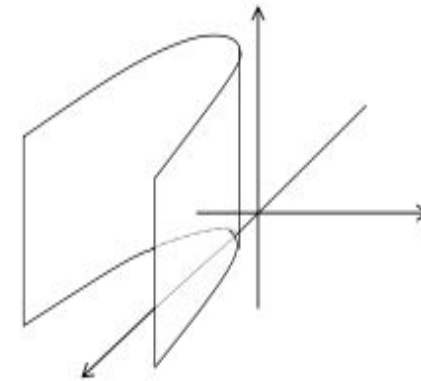
Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Гиперболический цилиндр

$$x^2 = 2py$$



Параболический цилиндр