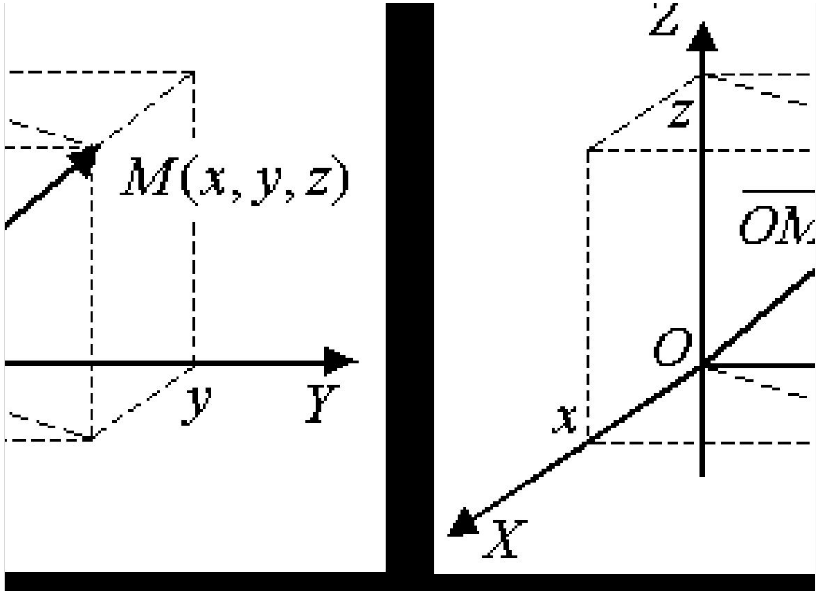
Аналитическая геометрия

Тема 1

Плоскость и прямая в пространстве

АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



$$F(x,y,z) = 0$$

- Расстояние между двумя точками.

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Деление отрезка в данном отношении

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

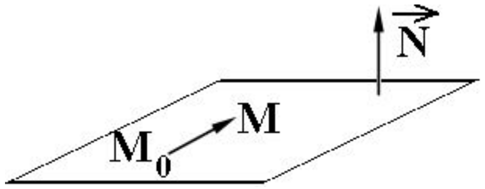
Координаты середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

1. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве и ее уравнения

1) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



M(*x, y, z*) – произвольная точка на плоскости *P;*

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка на плоскости *P.*

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ – вектор, перпендикулярный плоскости.

Вектор N принято называть **нормальным вектором плоскости**.

Точка *M*(*x, y, z*) будет лежать на плоскости, если $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$. Уравнение плоскости определяется условием $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

2) Общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

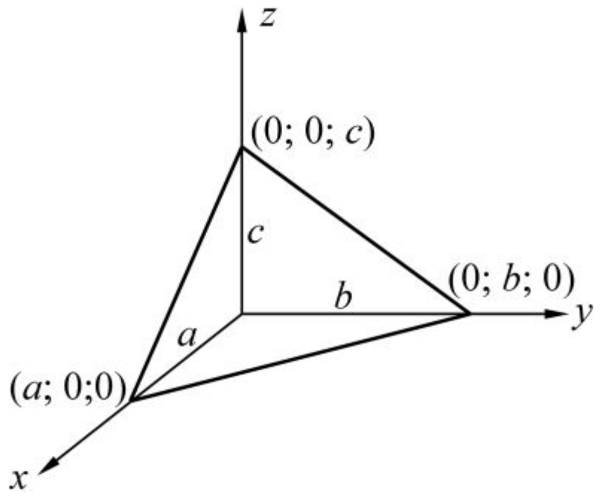
Пример.

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М(1;1;1) перпендикулярно к вектору **N**={2;2;3}.

Решение:

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$
$$2x+2y+3z-7=0$$

3) Уравнение плоскости в отрезках на осях



$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

здесь числа $a=\frac{-D}{A}, b=\frac{-D}{B}, c=\frac{-D}{C}$ представляют собой отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Приведение общего уравнения плоскости к уравнению в отрезках:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$Ax+By+Cz=-D,$$

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1.$$

Задача.
Какие отрезки отсекает на осях координат плоскость

$$2x - 4y + 6z - 12 = 0 \ ?$$

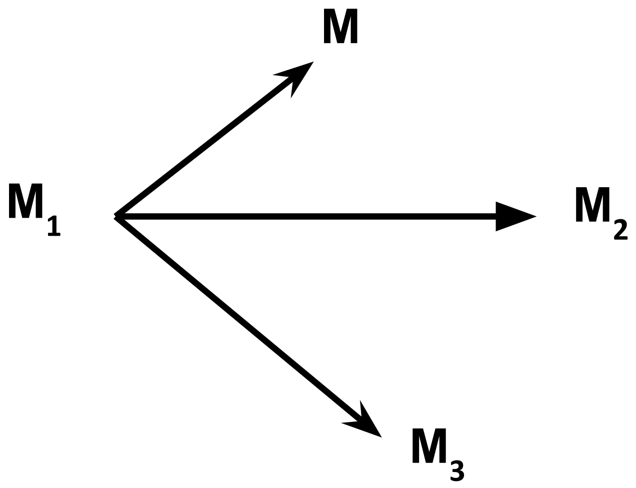
Решение: Приведем общее уравнение плоскости к виду уравнения «в отрезках»:

$$\frac{2x}{12} - \frac{4y}{12} + \frac{6z}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$$

Ответ: отрезки, отсекаемые на осях: $a = 6$, $b = -3$, $c = 2$.

4) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$



Даны три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

$M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости.

Точка M принадлежит плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только в том случае, если компланарны векторы:

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1).$$

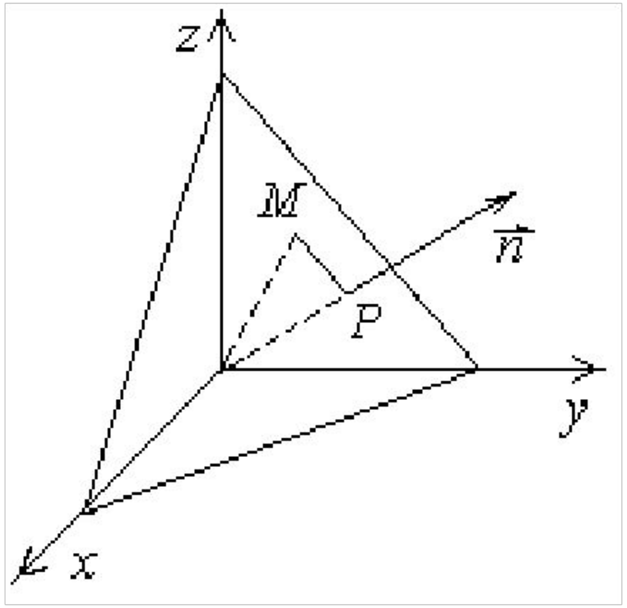
Условие компланарности $\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}\right)=0$ в координатной форме и дает искомое уравнение.

5) Нормальное уравнение плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

$\vec{n}_o = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор нормали к плоскости через начало координат в положительном направлении.

$M(x, y, z)$ – произвольная точка. $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$.



Проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на нормаль

$$np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

Если известна длина отрезка $OP = p$,

то уравнение $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$

задает **нормальное уравнение** плоскости.

Приведение общего уравнения плоскости к нормальному уравнению

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ – нормирующий множитель,

знак которого должен быть противоположен знаку D.

Общее уравнение плоскости приводится к ***нормальному*** виду домножением на нормирующий множитель:

$$\boxed{\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0.}$$

Неполные уравнения плоскости

A=0: $By + Cz + D = 0$ (отсутствует переменная x) – плоскость параллельна оси Ox;

B=0: $Ax + Cz + D = 0$ (отсутствует переменная y) – плоскость параллельна оси Oy;

C=0: $Ax + By + D = 0$ (отсутствует переменная z) – плоскость параллельна оси Oz;

D=0: $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат;

A=B=0: $Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy;

A=C=0: $By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz;

B=C=0: $Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz;

A=D=0 – плоскость проходит через ось Ox;

B=D=0 – плоскость проходит через ось Oy;

C=D=0 – плоскость проходит через ось Oz;

A=B=D=0: $Cz = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy;

A=C=D=0: $By = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz;

B=C=D=0: $Ax = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz.

Условие перпендикулярности и параллельности плоскостей

$\pi_1 \perp \pi_2$, если $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$ (Критерий ортогональности: скалярное произведение = 0)

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

$\pi_1 \parallel \pi_2$, если $\mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{N}_2$ (Критерий коллинеарности: их координаты пропорциональны или их векторное произведение равно нулю)

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

Пример.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(7,-2, 3)$ параллельно плоскости $y - 3z + 5 = 0$.

Решение. Из уравнения известной плоскости $\vec{\mathbf{N}}=\{0,1,-3\}$. По условию плоскости параллельны. Значит,

$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -3.$

Уравнение искомой плоскости

$$0\cdot(x-7)+1\cdot(y+2)-3\cdot(z-3)=0 \to y-3z+11=0$$

Пример.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям:

$$x - y + 2z - 5 = 0,$$

$$2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Решение. Из уравнений заданных плоскостей имеем

$$\overrightarrow{N_1} = (1,-1,2), \quad \overrightarrow{N_2} = (2,1,-3),$$

требуется найти координаты нормали искомой плоскости:

$$\overrightarrow{N} = (A, B, C) - ?$$

1
способ:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N} = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{N} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B + 2C = 0 \\ 2A + B - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 7, C = 3.$$

2
способ:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1,7,3).$$

Подставляя координаты точки (по условию – начало координат (0,0,0)) и координаты нормального вектора в уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, получаем искомое уравнение:

$$x + 7y + 3z = 0.$$

Условие совпадения (слияния) плоскостей

Если два уравнения

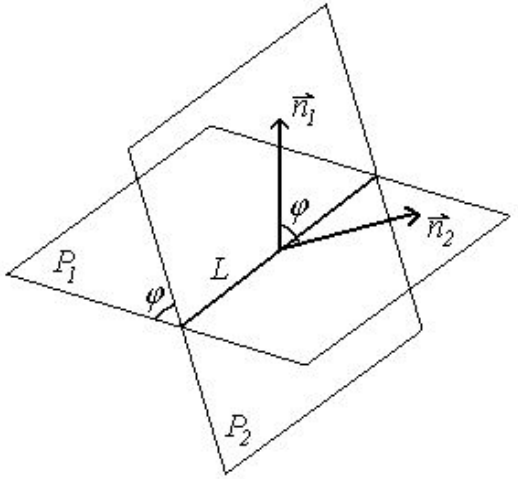
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты их пропорциональны

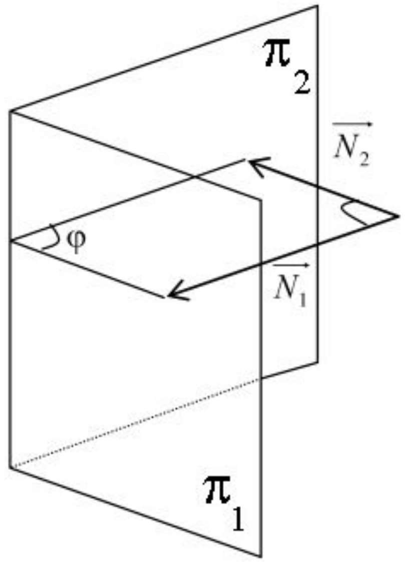
$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$$

Угол между плоскостями



$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Один из двугранных углов между плоскостями равен острому углу между их нормальными векторами



$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

Пример. Найти угол между плоскостями

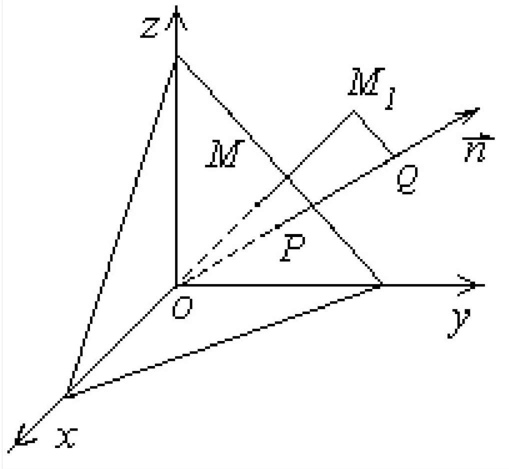
$$x - y - \sqrt{2}z - 6 = 0, \quad y = 0.$$

$$\vec{n}_1 = \{1, -1, -\sqrt{2}\} \qquad \vec{n}_2 = \{0, 1, 0\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|1\cdot 0 - 1\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2}\cdot\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| \to \varphi = 60^\circ$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

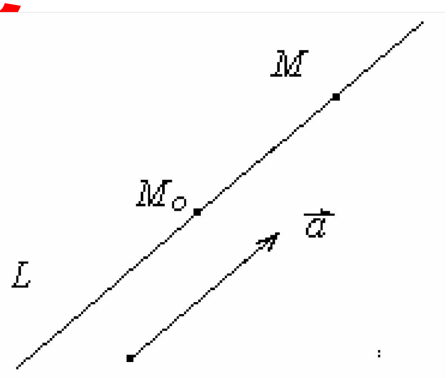
Пример

Найдите расстояние точки $M(4, 3, 1)$ от плоскости $3x - 4y + 12z + 14 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 2.$$

Прямая в пространстве

Прямая в пространстве



1) Общие уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2) Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

a = {*m*;*n*;*p*} – **направляющий вектор** прямой;

(x_0, y_0, z_0) – координаты известной точки прямой

3) Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Пример.

Составьте канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Находим координаты точки, лежащей на прямой. Для этого положим $x_0 = 1$, а две другие координаты найдем из системы:

$$\begin{cases} 3 + 2y_0 + 4z_0 - 11 = 0 \\ 2 + y_0 - 3z_0 - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_0 = 2 \\ z_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(1, 2, 1).$$

2) Находим направляющий вектор прямой:

$$\overrightarrow{N_1}=(3,2,4),\ \overrightarrow{N_2}=(2,1,-3),$$

$$\vec{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+17\vec{j}-\vec{k},$$

$$\vec{a}=(-10,17,-1).$$

3) Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{-1}$

Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases}x=1-10t,\\ y=2+17t,\\ z=1-\mathrm{t}.\end{cases}$

4) Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

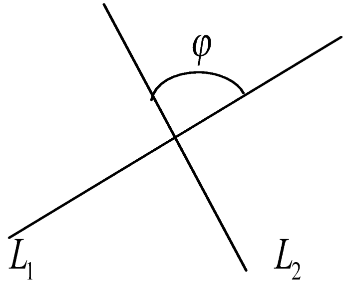
$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - известные точки на прямой;

$M(x,y,z)$ - произвольная точка прямой.

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(m;n;p)$ – направляющий вектор.

Угол ϕ между двумя прямыми в пространстве определяется углом между их направляющими векторами



$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\left|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}\right|}{\left|\vec{l_1}\right|\cdot\left|\vec{l_2}\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

Пример.

Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1,-2,1)$ и $M_2(3,1,-1)$.

Решение

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1}\rightarrow\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Пример.

Определите угол между двумя прямыми:

$$L_1: \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Прямые задаются пересечением плоскостей:

$$L_1 : \vec{N}_1 = (3,-4,-2), \vec{N}_2 = (2,1,-2),$$
$$L_2 : \vec{N}_3 = (4,1,-6), \vec{N}_4 = (0,1,-3).$$

Направляющие векторы прямых:

$$\vec{a}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k},$$

$$\vec{a}_2 = \vec{N}_3 \times \vec{N}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$cos\,\varphi = \frac{\left|10 \cdot 3 + 2 \cdot 12 + 11 \cdot 4\right|}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2} \cdot \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{98}{195};$$

$$\varphi = arccos\frac{98}{195}.$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

условие параллельности прямых: $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}}$

условие перпендикулярности прямых $\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0}$

условие того, что **прямые лежат в одной плоскости**

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0}$$

расстояние от точки M_1 до прямой, проходящей через точку M_0

$$\boxed{d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{l}\right|}{|\vec{l}|}}$$

расстояние между двумя прямыми в пространстве

$$\boxed{d=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2}}}$$

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Точка пересечения прямой и плоскости

Пример.

Найдите точку пересечения прямой $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$

и плоскости $\pi: 2x + 3y + z - 1 = 0.$

Решение. 1) Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = t, \\ y + 1 = -2t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

2) Подставим выражения для переменных *x, y, z* в уравнение плоскости и найдем значение параметра *t*

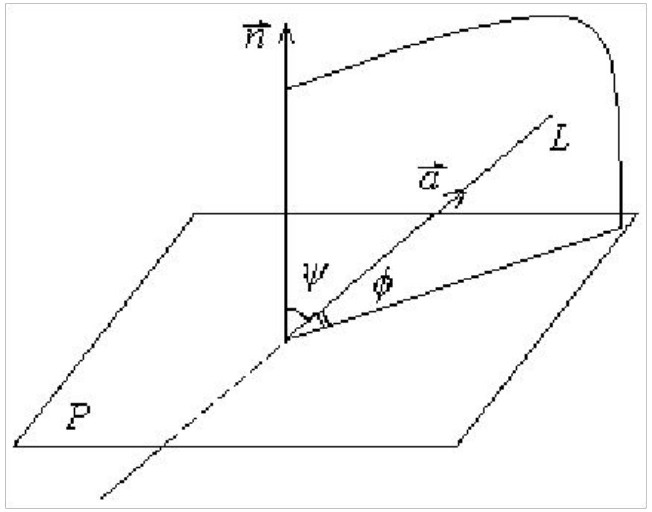
$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

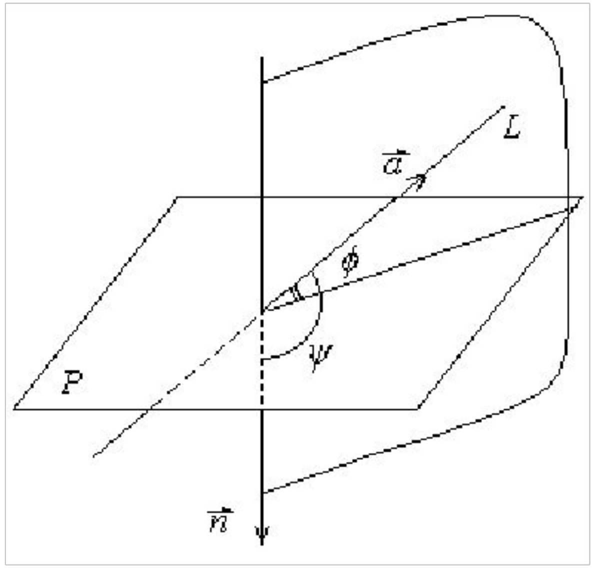
$$2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1,$$

3) Найденное значение параметра *t* подставим в параметрические уравнения прямой и получим искомые координаты точки пересечения:

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$$

Угол между прямой и плоскостью





Угол ϕ между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть ψ – угол между вектором нормали $\boldsymbol{N}$ плоскости и направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ прямой.

Если угол Ψ острый, то $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$; если угол Ψ тупой, то $\phi = \psi - \frac{\pi}{2}$,

то есть $\phi = \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right|$.

$$\boxed{\sin\phi = \sin\left|\frac{\pi}{2} - \psi\right| = \left|\cos\psi\right| = \frac{\left|\left(\vec{n}\cdot\vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

условие параллельности $l \parallel \pi$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.}$$

условие того, что **прямая принадлежит плоскости** $l \subset \pi$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.}$$

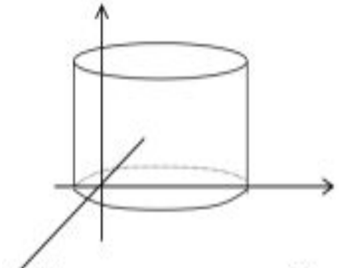
условие параллельности $l \perp \pi$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

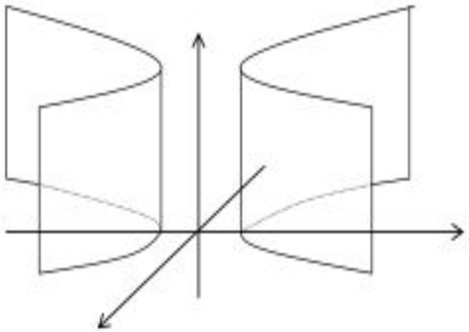
Цилиндрические поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



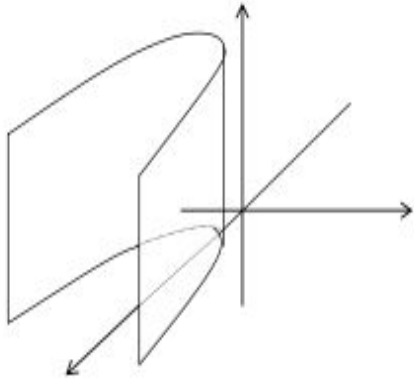
Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Гиперболический цилиндр

$$x^2 = 2py$$



Параболический цилиндр