Комбинаторика – раздел дискретной математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

.

Элементарная комбинаторика имеет дело с множествами, из которых выбираются подмножества с определенными свойствами.

Как правило основной вопрос заключается в следующем: **сколько** таких подмножеств можно выбрать из данного множества? Т.е. задача состоит в **подсчете** числа этих подмножеств.

Кроме того, в комбинаторике изучаются и разрабатываются **методы** подсчета числа подмножеств с заданными свойствами.

Комбинаторные объекты и комбинаторные числа

Введем следующие понятия.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Комбинаторный объект – это подмножество с определенными свойствами из элементов множества A.

Комбинаторное число (связанное с комбинаторным объектом) – это количество комбинаторных объектов этого вида.

В простейших комбинаторных задачах требуется подсчитать число способов

выбрать *k* элементов из *n*–элементного множества.

То, что получается в результате выбора, называется

выборкой из n по k **или** **(*n*,*k*)–выборкой**.

Понятие выборки отличается от понятия подмножества:

- в выборках может допускаться повторение элементов, т.е. выборки могут быть как с ***повторениями***, так и ***без повторений***;
- выборки могут быть ***упорядоченными*** или ***неупорядоченными.***

Упорядоченность означает, что выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, считаются различными.
Итак, 4 выбора : **выборки** могут быть с

повторениями и **без повторений,**

упорядоченными и **неупорядоченными**

Упорядоченная *(n, k)*– **выборка без повторений** называется *(n, k)*– **размещением** (перестановкой) или **размещением из n элементов по k**.

Упорядоченная (*n, k)*– **выборка с повторениями** называется *(n, k)*– **размещением с повторениями**.

(n, n)– **размещение без повторений** называется **перестановкой** из **n** элементов.

Неупорядоченная *(n, k)*–**выборка без повторений** называется *(n, k)* **-сочетанием** или **сочетанием из n элементов по k**, другими словами, это k–элементное подмножество множества А.

Неупорядоченная *(n, k)*– **выборка с повторениями** называется *(n, k)*– **сочетанием с повторениями.**

Например, рассмотрим множество $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. *Составим выбор из трех элементов по два (3,2):*

Размещения - ***Повторения не разрешены, порядок существенен*** $(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_1)$.

Размещения с повторениями - ***Повторения разрешены, порядок существенен*** $(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_3, a_3)$.

Сочетания - ***Повторения не разрешены, порядок несущественен*** $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3)$.

Сочетания с повторениями - ***Повторения разрешены, порядок несущественен*** из $(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_3)$.

Перестановки из трех элементов − это следующие упорядоченные без повторений (3,3)-выборки: $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1)$.

Очень многие комбинаторные задачи решаются с помощью определения мощности множеств: **равенства, суммы и произведения**.

Правило равенства. Если между конечными множествами A и B есть взаимно однозначное соответствие, то

$$|A| = |B| \ .$$

Правило суммы. Если A и B – конечные множества и

$$A \cap B = \varnothing \text{ , то } |A \cup B| = |A| + |B| \ .$$

Правило произведения. Для любых конечных множеств A и B имеет место равенство :

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Правило суммы и правило произведения

Часто при подсчете числа комбинаторных объектов применяются два основных приема: **правило суммы** и **правило произведения**.

Правило суммы

Правило суммы: если все комбинаторные объекты можно разбить на два непересекающихся множества, причем в первом множестве лежат A комбинаторных объектов, в во втором – B комбинаторных объектов, то всего комбинаторных объектов будет $A + B$.

Пример 1.1. Сколько существует наборов с двумя координатами из множества $\mathbf{B} = \{0, 1\}$?

Решение. Все наборы с двумя координатами из множества $\mathbf{B}$ разобьем на два непересекающихся множества: наборы с первой координатой 0 и наборы с первой координатой 1.
В первом множестве два набора: $(00), (01)$ $(A = 2)$, во втором множестве также два набора: $(10), (11)$ $(B = 2)$.
Следовательно, всего наборов $A + B = 4$.

Правило суммы:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, n-мощность множеств

n(A) - число элементов во множестве

Пример: На одной полке книжного шкафа стоит *45* различных книг, а на другой – *55* различных книг (и не таких, как на первой полке), сколькими способами можно выбрать одну книгу из стоящих на этих полках? Решение:

$n(A)=45$(книги первой полки)

$n(B)=55$(книги второй полки)

$n(A\upsilon B)=n(A)+n(B)=45+55=100$

Правило произведения

Правило произведения: если все комбинаторные объекты обладают двумя признаками, причем первый признак может принимать A различных значений, а для каждого комбинаторного объекта с фиксированным первым признаком второй признак может принимать B различных значений, то всего комбинаторных объектов будет $A \cdot B$.

Пример 1.2. Сколько существует наборов с двумя координатами из множества $\mathbf{B} = \{0, 1\}$?

Решение. Все наборы с двумя координатами из множества **B** обладают двумя признаками: значением первой координаты и значением второй координаты.
Первая координата может принимать два различных значения: 0 и 1 ($A = 2$), у каждого набора с фиксированной первой координатой вторая координата также может принимать два значения: 0 и 1 ($B = 2$).
Следовательно, всего наборов $A \cdot B = 4$.

<u>Правило суммы</u>

Если элемент x может быть выбран k способами, а элемент y может быть выбран n другими способами, тогда выбор элемента x ***либо*** y может быть осуществлен $(k+n)$ способами.

<u>Правило произведения</u>

Пусть набор (x, y) образуется в результате последовательного выбора элементов x ***и*** y , причем элемент x может быть выбран k способами, ***и*** при каждом выборе элемента x элемент y может быть выбран n способами,

тогда выбор всех упорядоченных пар (x, y) может быть осуществлен $n \cdot k$ способами.

Правило суммы – частный случай формулы включений и исключений. Если рассматривать A и B как множества исходов, то $|A| = n_1$, $|B|=n_2$; а поскольку события A и B не связаны с друг другом, то можно считать, что соответствующие множества не пересекаются .
Тогда, по формуле включений и исключений $|A \cup B| = |A| + |B|$
т.е. множество $A \cup B$ содержит $\mathbf{n_1+n_2}$ элементов.
Это означает, что имеется возможность n_1+n_2 исходов события **A или B**.
Правило произведения. Пусть A_1 множество n_1 исходов первого события, A_2 – множество n_2 исходов второго события и т.д. Тогда **любую** последовательность **k** событий можно рассматривать как элемент декартова произведения $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k|$, чья мощность равна

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_k| = \mathbf{n_1 * n_2 * \ldots * n_k}$$

Задача 1. В небольшой кондитерской к концу рабочего дня осталось несколько пирожных: четыре ванильных, два шоколадных и три фруктовых. Один покупатель собирается купить пирожные перед закрытием кондитерской. Сколько пирожных может выбрать покупатель?

Первая задача решается простым подсчетом. Поскольку все пирожные различны, мы просто можем сложить их количества. Это дает $4+2+3=9$ пирожных, из которых покупатель может сделать выбор.

Задача 2. Необходимо выбрать смешанную команду, которая будет представлять местный теннисный клуб на соревнованиях. В спортивном клубе состоят 6 женщин и 9 мужчин. Сколько различных пар можно выбрать для участия в соревнованиях?

Во второй задаче у нас есть 6 женщин, из которых мы можем выбрать представительницу клуба, и для каждой из них мы можем подобрать партнера среди девяти мужчин. Таким образом, общее число различных пар, которые мы можем составить, равно $6\cdot 9=54$.

Задача 3. Сколько трехзначных чисел начинаются с 3 или 4?

Теперь мы готовы решить третью из сформулированных задач. При этом мы будем использовать как правило суммы, так и произведения. Трехзначные числа, о которых идет речь в задаче, естественным образом разбиваются на два непересекающихся класса. К одному из них относятся числа, начинающиеся с 3, а ко второму — с 4. Для подсчета чисел в первом классе заметим, что существует один возможный исход для первой цифры (она должна быть равна 3), 10 исходов для второй и 10 исходов для последней цифры. По правилу произведения получаем, что всего чисел в первом классе насчитывается ровно $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$. Аналогично можно подсчитать количество чисел во втором классе. Оно тоже равно 100. Наконец, по правилу суммы получаем, что существует $100 + 100 = 200$ трехзначных чисел, начинающихся с 3 или 4.

Задача 4. Сколько существует двузначных четных чисел с разными цифрами?

Задача 4. Сколько существует двузначных четных чисел с разными цифрами?

Решение. Пусть $\alpha = \alpha^1\alpha^2$ − двузначное четное число, у которого все цифры различны. Тогда $\alpha^2 \in \{0,2,4,6,8\}$,*а* $\alpha^1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{\alpha^2\}$.

Если α^1 − нечетная цифра, т.е. $\alpha^1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, получаем, что первая цифра α^1 может быть выбрана 5 способами.

При каждом выборе первой цифры α^1, вторая цифра α^2 может быть выбрана 5 способами.

По правилу произведения получим, что существуют $5 \cdot 5 = 25$ двузначных четных чисел, у которых первая цифра нечетная.

Если α^1 − четная цифра, тогда $\alpha^1 \in \{2, 4, 6, 8\}$,

а $\alpha^2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{\alpha^1\}$, т.е. элемент α^2 может быть выбран 4 способами.

По правилу произведения, число α может быть выбрано $4 \cdot 4 = 16$ способами.

Задача 5. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся на 5, у которых все цифры различны?

Комбинаторные объкты и комбинаторные числа

Некоторые комбинаторные объекты так часто встречаются и настолько важны, что имеют собственные названия.

Они исследуются, для них комбинаторные числа подсчитаны и изучены.

Некоторые комбинаторные числа имеют собственные названия и устоявшиеся обозначения.

Размещения

Размещением из n элементов по k называется упорядоченный набор k элементов из этих n элементов.

Пример 1.3. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

Перечислим все размещения из элементов множества A по 2:
$1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2.$

Пример 1.4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Это задача на подсчет числа размещений.

Число размещений

Число размещений из n по k обозначается как A_n^k.

Теорема 1.1. *Число размещений из n из k,* $1 \leq k \leq n$, *равно* $A_n^k = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений из n по k, $1 \leq k \leq n$.

Понятно, что если $k = 1$, то $A_n^1 = n$ (Почему?).

Число размещений

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать n различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как a_i, остальные координаты принимают значения всех размещений по $k-1$ из множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$, которых в точности A_{n-1}^{k-1}.

Получаем рекуррентную формулу $A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1}$ при $2 \leq k \leq n$.

Откуда, $A_n^k = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. $\square$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

A –первая буква французского слова arrangement, что означает *размещение, приведение в порядок*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\frac{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Решение задачи о туристе

Напомним условие задачи.

Пример 1.4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.1:
$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Т.е. можно составить 60 таких маршрутов.

Задача 5. Сколько различных четырехбуквенных «слов» можно составить, используя буквы a,f,c,o,n,e, если под «словом» понимать любую последовательность неповторяющихся букв.

Решение. Имеем дело с подсчетом числа размещений без повторений. Следовательно,

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$$

Перестановки

Перестановкой n элементов называется упорядоченный набор этих n элементов.

Пример 1.5. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все перестановки элементов множества A:
$1, 2, 3;\ \ 1, 3, 2;\ \ 2, 1, 3;\ \ 2, 3, 1;\ \ 3, 1, 2;\ \ 3, 2, 1.$

Пример 1.6. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Это задача на подсчет числа перестановок.

Число перестановок

Число перестановок n элементов обозначается как P_n.

Теорема 1.2. *Число перестановок n элементов равно* $P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

Доказательство. Перестановка – это частный случай размещения n элементов по k при $k = n$.

Поэтому (по теореме 1.1) $P_n = A_n^n = (n)_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

$\square$

P – первая буква французского слова

permutation что означает *перестановка*

$$P(n) = n!$$

Решение задачи о студентах

Напомним условие задачи.

Пример 1.6. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.2:
$P_8 = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 5760$.
Т.е. практически реализуется один из 5760 возможных вариантов последовательных ответов студентов.

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями из n элементов по k называется упорядоченный набор k элементов с возможными повторениями из этих n элементов.

Пример 1.7. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества A:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2;\ \ 3, 3.$

Пример 1.8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт.
Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Это задача на подсчет числа размещений с повторениями.

Число размещений с повторениями

Число размещений с повторениями из n по k обозначается как $\bar{A}_n^k$.

Теорема 1.3. *Число размещений с повторениями из n из k, $n \geq 1$, $k \geq 1$, равно $\bar{A}_n^k = n^k$.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений с повторениями из n по k, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

Понятно, что если $k = 1$, то $\bar{A}_n^1 = n$ (Почему?).

Число размещений с повторениями

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения с повторениями: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать n различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как a_i, остальные координаты принимают значения всех размещений с повторениями по $k-1$ из того же множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, которых в точности $\bar{A}_n^{k-1}$.

Получаем рекуррентную формулу $\bar{A}_n^k = n \cdot \bar{A}_n^{k-1}$ при $n \geq 1$, $k \geq 2$.

Откуда, $\bar{A}_n^k = n^k$. $\square$

Решение задачи о билетах

Напомним условие задачи.

Пример 1.8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт.
Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.3:
$\bar{A}_4^3 = 4^3 = 64$.
Т.е. существует 64 способа распределения билетов между студентами.

Размещение с повторениями из n элементов множества М по k - это <u>всякая</u> конечная последовательность, состоящая из k членов данного множества М, все k элементов которой не обязательно различны.

Два размещения с повторениями считаются различными, если хотя бы на одном месте они имеют различные элементы множества М.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить?
Сколько таких наборов получиться, если буквы могут повторяться?

Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.**

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется *неупорядоченный* набор k элементов из этих n элементов.

Пример 1.10. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания из элементов множества A по 2:
$1, 2$; $1, 3$; $2, 3$.

Пример 1.11. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Это задача на подсчет числа сочетаний.

Число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число сочетаний из n по k обозначается как C_n^k.

Теорема 1.4. *Число сочетаний из n из k, $1 \le k \le n$, равно* $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний из n по k, $1 \le k \le n$.

Рассмотрим все размещения из n элементов множества A по k. Их ровно $(n)_k$.

В каждом размещении выбраны какие-то k элементов из множества A. Если игнорировать порядок этих выбранных k элементов, мы получим некоторое сочетание из множества A по k.

Число сочетаний

Доказательство (продолжение). Другими словами, размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов задают одно и то же сочетание по k элементов.

Чем различаются размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов? Только порядком элементов. Число различных перестановок выбранных k элементов равно $k!$ (по теореме 1.2).

Следовательно, $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \square$$

Решение задачи о команде на олимпиаду

Напомним условие задачи.

Пример 1.11. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.

Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.4:

$C_{20}^{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140.$

Т.е. существует 1140 возможных команд на олимпиаду по программированию из трех студентов этой группы.

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно вытащить 5 карт так, чтобы среди них были три карты червовой масти и две крестовой масти?

<u>Решение.</u> Всего в колоде имеем по 9 карт каждой из 4 мастей. Три карты червовой масти можем вытащить C_9^3 способами, а две карты крестовой масти можно вытащить C_9^2 способами.

По правилу произведения получаем, что существует $C_9^3 * C_9^2$ способов вытащить из колоды 5 карт определенным образом.

Сочетания с повторениями

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется *неупорядоченный* набор k элементов с возможными повторениями из этих n элементов.

Пример 1.12. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания с повторениями из элементов множества A по 2:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 3.$

Пример 1.13. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Это задача на подсчет числа сочетаний с повторениями.

Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается как $\bar{C}_n^k$.

Теорема 1.7. *При* $n \geq 1$, $k \geq 1$ *число сочетаний с повторениями из* n *из* k *равно* $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Решение задачи об открытках

Напомним условие задачи.
Пример 1.13. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1.7:
$\bar{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!} = 330.$

Т.е. существует 330 возможностей составить набор поздравительных открыток в Новому году.

Сочетание с повторением

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^n$$

В магазине есть 5 белых роз, 6 чайных, 4 жёлтых, 2 бордовых. Сколькими способами можно составить букет из этих роз?

$$\overline{C}_{17}^9 = C_{17+9-1}^{17} = \frac{25!}{17!*8!}$$

$$\frac{25*24*23*22*21*20*19*18}{8*7*6*5*4*3*2} = 360525$$

Теорема. Число различных сочетаний из n элементов по k с повторениями равно $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$

Доказательство. Каждое сочетание полностью определяется, если указать, сколько элементов каждого из n типов в него входит. Поставим в соответствие каждому сочетанию последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание, далее поставим 0 и после него напишем столько 1, сколько элементов второго типа в входит в это сочетание и т.д. Например, написанным выше сочетаниям из трех букв по две будут соответствовать такие последовательности: 1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011.

Таким образом, каждому сочетанию из n по k соответствует последовательность из k единиц и n-1 нулей, и, наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается такое сочетание. Поэтому число сочетаний с повторениями из n по k равно числу перестановок с повторениями $\overline{C}_n^k = P(n-1,k) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.■

Основные свойства сочетаний

$$1.\ C_n^m = C_n^{n-m}$$

ФОРМУЛА СИММЕТРИИ

$$2.\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ

$$3.\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

ЧИСЛО ВСЕХ ПОДМНОЖЕСТВ N-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА

	Порядок существенен	Порядок не существенен
Элементы повторяются	размещения с повторениями $\overline{A}_n^k = n^k$	сочетания с повторениями $\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$
Элементы не повторяются	размещения без повторении $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	сочетания без повторении $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Перестановки с повторениями

Число различных перестановок, которые можно построить из n элементов, среди которых находятся
n_1 - элементов первого типа,
n_2 - элементов второго типа,…,
n_k - элементов k-го типа равно

$$P(n_1, n_2, .., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$$\left(n_1 + n_2 + \dots n_k = n\right)$$

Число элементов в каждой перестановке равно

$$n_1 + n_2 + \dots\ n_k = n$$

Поэтому если бы все элементы были различны,

то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что

некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. Возьмем перестановку

$$\underbrace{aa\ \ldots\ a}_{n_1}\ \ \underbrace{bb\ \ldots\ b}_{n_2}\ \ldots\ \underbrace{xx\ \ldots\ x}_{n_k},$$

В котор ы первого типа, потом все элементы второго типа,…,наконец, все элементы *k*-го типа. Элементы первого типа можно переставлять с друг другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно также ничего не меняют $n_2!$ перестановок второго типа и т.д.

Например, в перестановке «ммаа» ничего не изменится, если переставит первый элемент со вторым, или третий с четвертым.

Перестановки элементов первого типа, второго типа и т. д. можно делать независимо друг от друга. Поэтому по правилу произведения элементы нашей перестановки можно переставлять друг с другом $n_1 \cdot n_{21} \cdot \ldots \cdot n_k!$ способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов.

Поэтому множество всех $n!$ перестановок распадается на части, состоящие из одинаковых перестановок каждая. Значит число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов равно

$$P(n_1, n_2, .., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»? Здесь у нас одна буква «м», четыре буквы «и», три буквы «с» и одна буква «п», а всего 9 букв. Значит, по формуле (5) число перестановок равно

$$P(4,\ 3,\ 1,\ 1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 2520.$$

ПРИМЕР:

Сколько различных слов можно построить перестановкой букв в слове «лаваш»?

Слово «лаваш» включает по одному экземпляру букв «л», «в», «ш» и два экземпляра буквы «а», а общее количество букв – 5.

По формуле находим:

$$\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

Задача. У врача 3 таблетки одного лекарства, 2 таблетки – другого и 4 таблетки – третьего.

Сколькими способами он может распределить прием имеющихся таблеток по одной в день?

Решение. Порядок приёма таблеток важен.

Есть повторяющиеся таблетки.

Общее число таблеток 3 + 2 + 4 = 9 равно числу дней приема лекарств.

Решение задачи сводится к нахождению числа всех перестановок с повторениями из 9 элементов:

$$P(2,3,4) == \frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 6\cdot 4!} = \frac{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2} = 1260.$$

Задача. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова ОГОРОД так, чтобы три буквы "о" не стояли бы рядом?

Решение. Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв слова огород, равно

$$P(3,1,1,1) == \frac{6!}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1} = 120.$$

Если в каком-то слове все три буквы "о" стоят рядом, то тройную "о" можно считать единым символом, и количество слов, в которых три буквы "о" стоят рядом, равно P(4) = 4! =24.

В итоге получаем: 120 - 24 = 96.

Найти количество перестановок букв в слове КОЛОБОК .

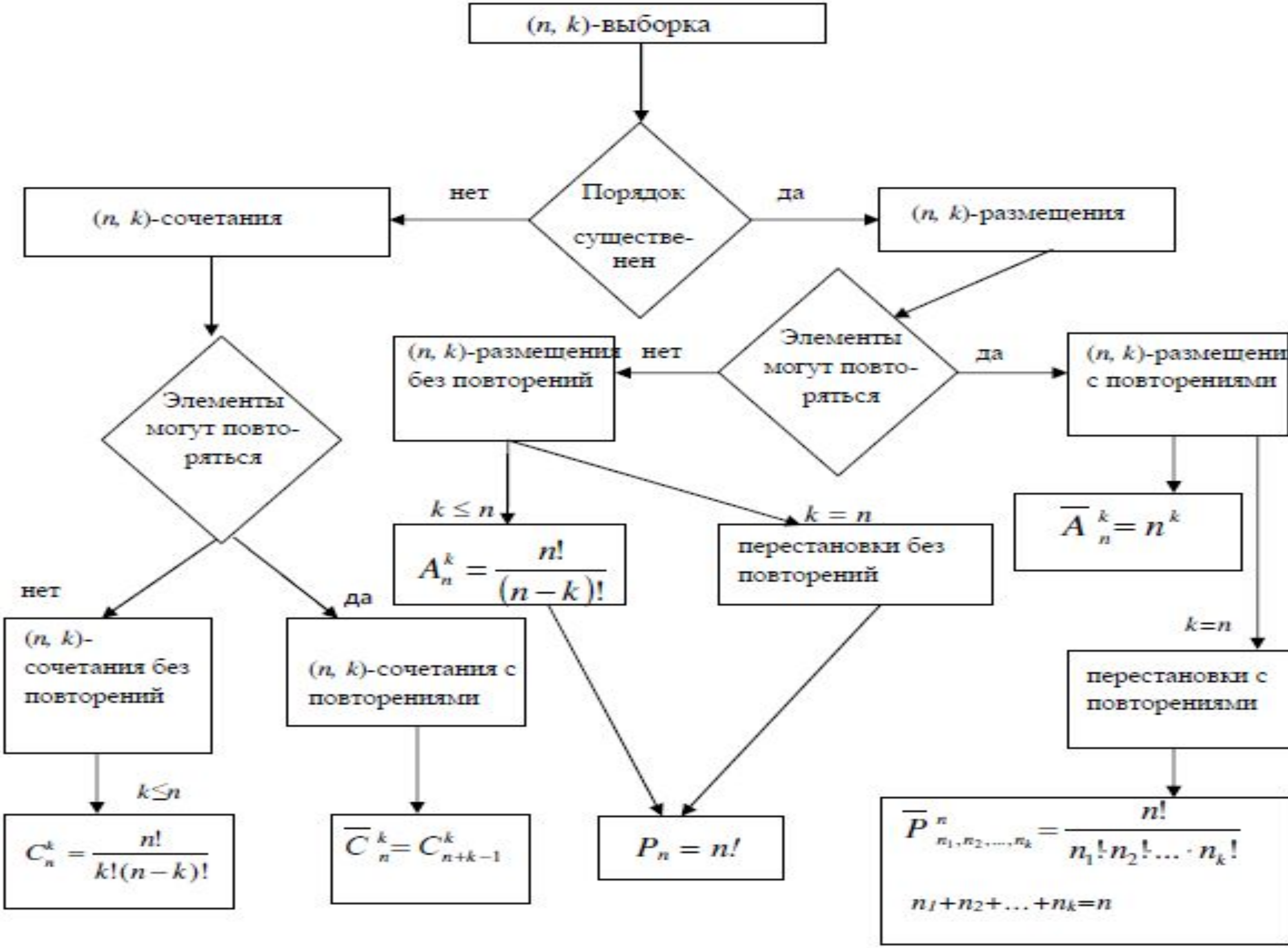
$$P(7) = 7!$$

В слове есть 3 буквы   О и 2 буквы К, меняя их , не получим новых слов. Так как $P(3) = 3!$, $P(2) = 2!$,

То можем получить всего

$$\frac{7!}{3!2!} = 420$$

разных слов из слова КОЛОБОК



(n, k)-выборка
Порядок существе-нен
нет
да
(n, k)-сочетания
(n, k)-размещения
Элементы могут повто-ряться
нет
да
(n, k)-размещения без повторений
(n, k)-размещение с повторениями
Элементы могут повто-ряться
нет
да
$k \le n$
$k = n$
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
перестановки без повторений
$\overline{A}_n^k = n^k$
$k=n$
перестановки с повторениями
(n, k)-сочетания без повторений
(n, k)-сочетания с повторениями
$k \le n$
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
$P_n = n!$
$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots \cdot n_k!}$
$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$