ЛЕКЦИЯ 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

Непрерывность функции.

Односторонняя непрерывность.

Разрывы функции.

Классификация разрывов

Основные теоремы о непрерывности функций

Использование теоремы Больцано-Коши для приближенного решения нелинейных уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

- Пусть функция *y = f(x)*

1. определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

2. имеет предел при $x \to x_0$

3. он равен значению функции в этой точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тогда функция *y = f(x)* называется **непрерывной** *в точке* x_0,

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

- Если f(x) – непрерывная функция, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, а так как $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, то
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$$
- Это означает, что *при* нахождении предела непрерывной функции f(x) можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию f(x) вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0

ПРИМЕР 1

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+1)=$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

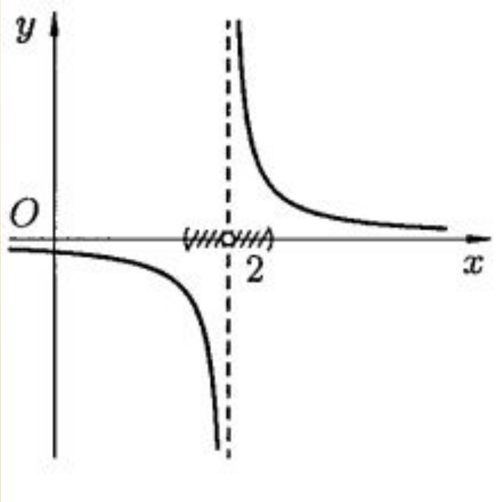
Односторонняя непрерывность

- Пусть функция *y* = *f*(*x*) определена на промежутке $(a, x_0]$. *f*(*x*) **непрерывна в точке** x_0 **слева**, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
- Пусть функция *y* = *f*(*x*) определена на промежутке $[x_0, b)$. *f*(*x*) **непрерывна в точке** x_0 **справа**, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$
- Для непрерывности функции f(x) в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы функция f(x) была непрерывна слева и справа в точке x_0

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

- Точки , в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва** этой функции. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий определения непрерывности функции:
- 1. Функция определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0
- Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$

  не определена в точке $x_0=2$



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

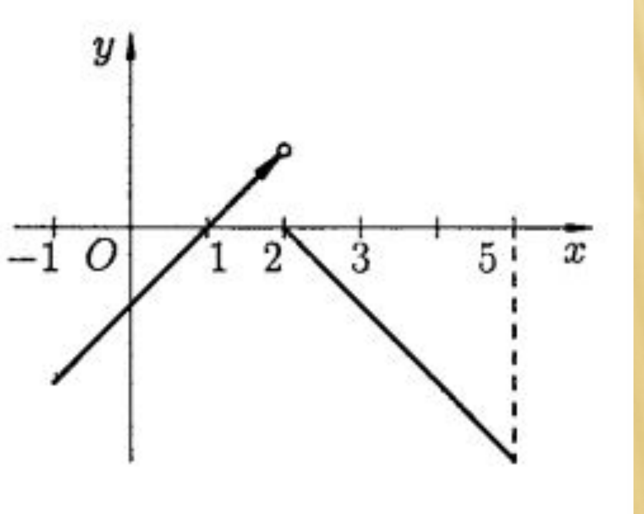
- 2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела f(x) при x —> x_0
- Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1\text{, если } -1 \le x < 2 \\ 2 - x\text{, если } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Определена в точке x_0=2, но не имеет предела при x—> x_0 ,поскольку $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 1$,

а $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 0$

Следовательно, x_0=2 – точка разрыва функции f(x)



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

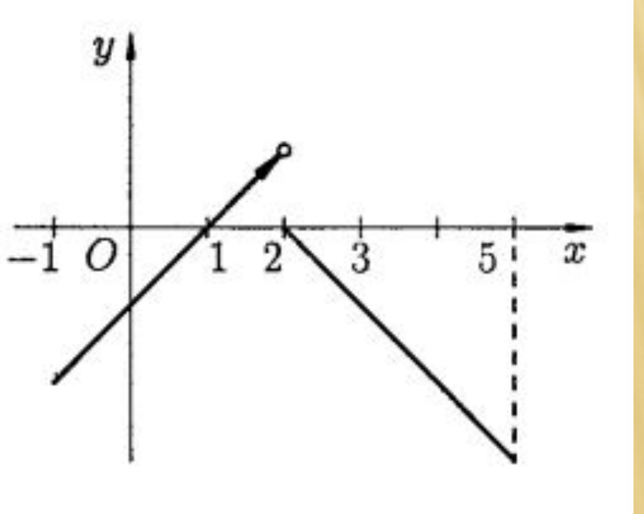
- 2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела f(x) при x —> x_0
- Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x-1\text{, если } -1\le x<2 \\ 2-x\text{, если } 2\le x\le 5 \end{cases}$$

Определена в точке $x_0=2$, но не имеет предела при x—> x_0 ,поскольку $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1$,

а $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$

Следовательно, $x_0=2$ – точка разрыва функции f(x)



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

- 3) Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0

функция

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0 \\ 2, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

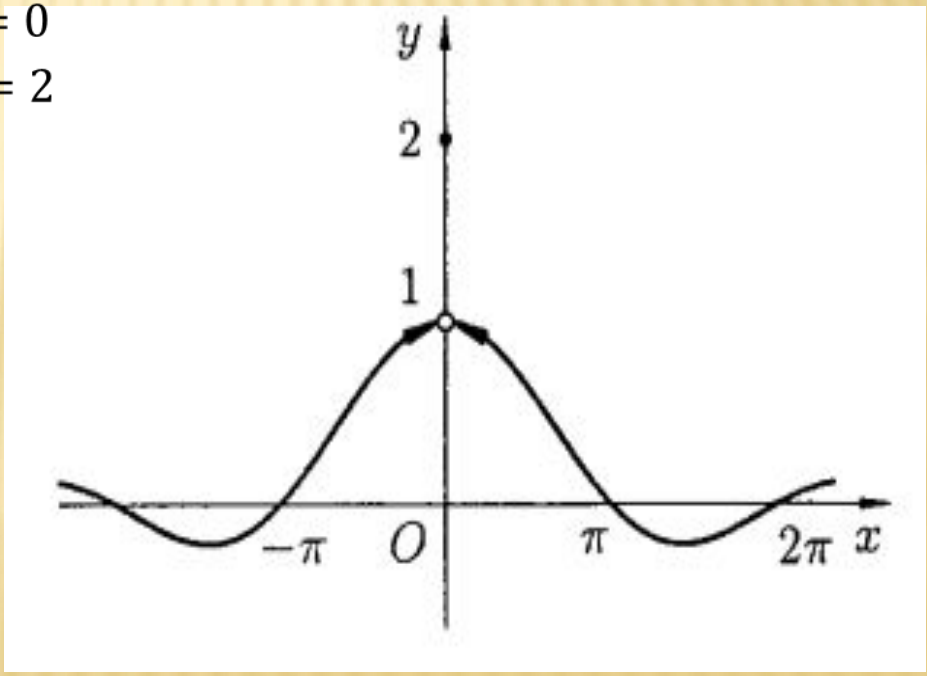
- Например, функция

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, a\ f(0) = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0 \\ 2, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Следовательно, x_0=0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, a\ f(0) = 2$$



- Следовательно, x_0=0 – точка разрыва функции f(x)

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ

- Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции *y = f(x)*, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A1, \ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A2,$$

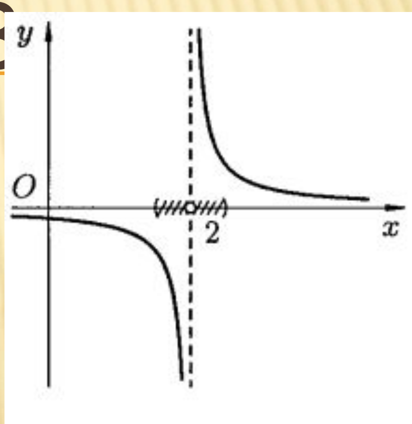
если *A1 = A2*, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**;

если *A1 ≠ A2*, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва**.

Величину $|A1 - A2|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

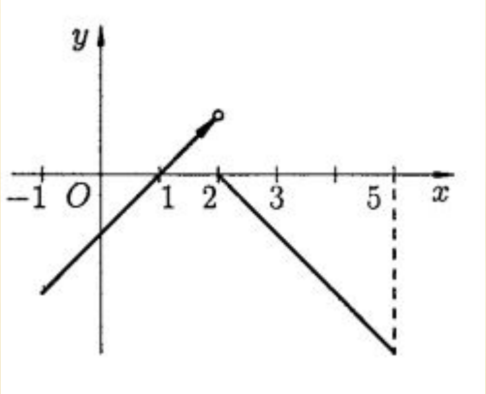
- Точка разрыва x0 называется **точкой разрыва второго рода** функции y = f(x), если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ



- В рассмотренных выше примерах
- 1) функция $y = \frac{1}{x-2}$ в точке x_0=2

  имеет разрыв 2 рода
- 2) функция



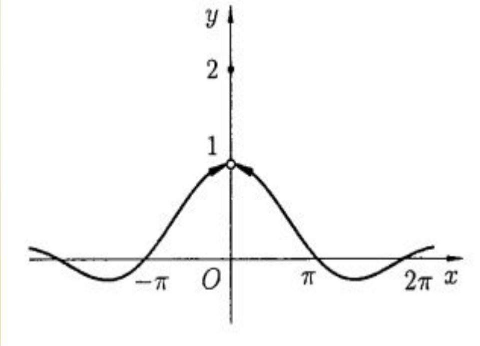
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{если } -1 \le x < 2 \\ 2 - x, \text{если } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

в точке x_0=2 имеет разрыв первого

Рода, скачок функции = 1

- 3) функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0 \\ 2, \text{если } x = 0 \end{cases}$$



В точке x_0=0 имеет устранимый разрыв

Первого рода

Теоремы о непрерывности функций

- Т.1 Сумма , произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю)
- Т.2 Пусть функции y=f(x) непрерывна в точке x_o, а функция $z=g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_o)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_o
- Т.3 Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси ОХ, *то* обратная функция также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси *Oy*

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

- Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.
- Теорема Больцано-Коши. Если функция *у = f{x)* непрерывна на отрезке *[а;Ь]* и принимает на его концах неравные значения *f(a)=A , f(b)=B* то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между *А и В*
- Следствие. Если функция у=f(x) непрерывна на отрезке *[а;Ь]* и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка *[а;Ь]* найдется хотя бы одна точка с, в которой данная функция *f{x)*

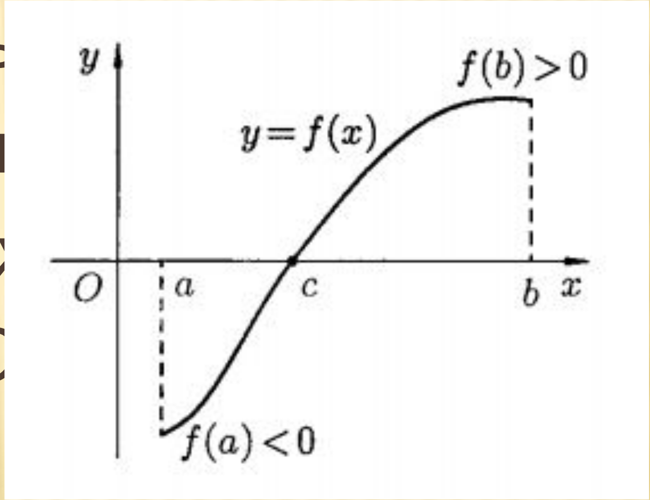
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ БОЛЬЦАНО-КОШИ

- Геометрический смысл теоремы

 если график непрерывной функци

переходит с одной стороны оси Ох

 на другую, то он пересекает ось О



- Следствие лежит в основе так называемого «*метода половинного деления*», который используется для нахождения корня уравнения

$$f(x) = 0.$$

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Ш а г 1. Выбираем отрезок [a,b] такой что

f(a) *f(b)*< О

Ш а г 2. Вычисляем f(a) и *f(b)*.
Ш а г 3. Вычисляем с = (a+b)/2.
Ш а г 4. Вычисляем *f(c)* . Если f(c) = О, то с — корень уравнения.
Ш а г 5. При *f(c)≠ 0* если f(a) *f(c)*< О, то полагаем *a=a, b = c,* иначе полагаем *a = c, b = b.*
Ш а г 6. Если *b — a — ε*< О то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точность *ε*) принимается величина с. Иначе процесс деления отрезка [a; *b]* пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.