

ЛЕКЦИЯ 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

Непрерывность функции.

Односторонняя непрерывность.

Разрывы функции.

Классификация разрывов

Основные теоремы о непрерывности
функций

Использование теоремы Больцано-Коши
для приближенного решения нелинейных
уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

✳ Пусть функция $y = f(x)$

1. определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.
2. имеет предел при $x \rightarrow x_0$
3. он равен значению функции в этой точке

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тогда функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 ,

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

- ✦ Если $f(x)$ – непрерывная функция, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, а так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$$

- ✦ Это означает, что *при* нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0

ПРИМЕР 1

✦ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) =$$

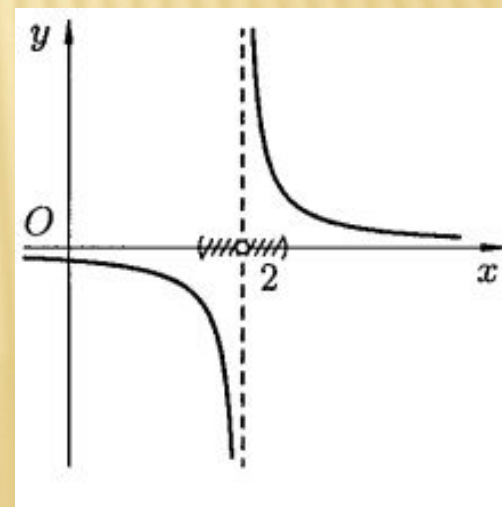
$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

ОДНОСТОРОННЯЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

- ✦ Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a, x_0]$. $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева, если
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$
- ✦ Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[x_0, b)$. $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа, если
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$
- ✦ Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна слева и справа в точке x_0

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

- ✘ Точки , в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий определения непрерывности функции:
 - ✘ 1. Функция определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0
 - ✘ Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0=2$



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

✦ 2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$

✦ Например, функция

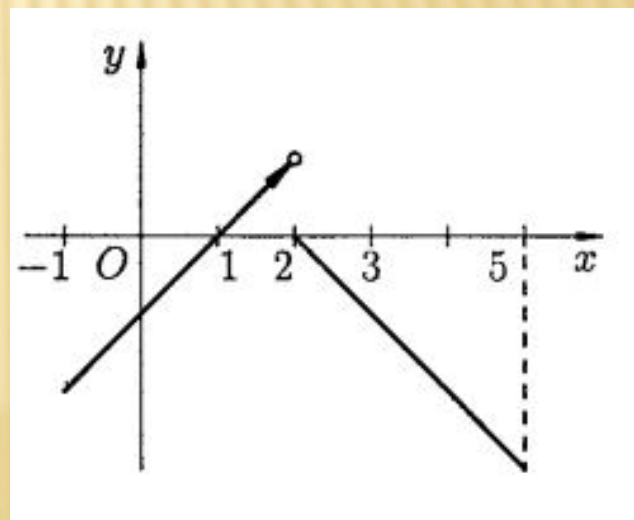
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2 \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Определена в точке $x_0=2$, но не имеет предела при $x \rightarrow x_0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1$,

$$\text{а } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 0$$

Следовательно, $x_0=2$ -

точка разрыва функции $f(x)$



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

✦ 2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$

✦ Например, функция

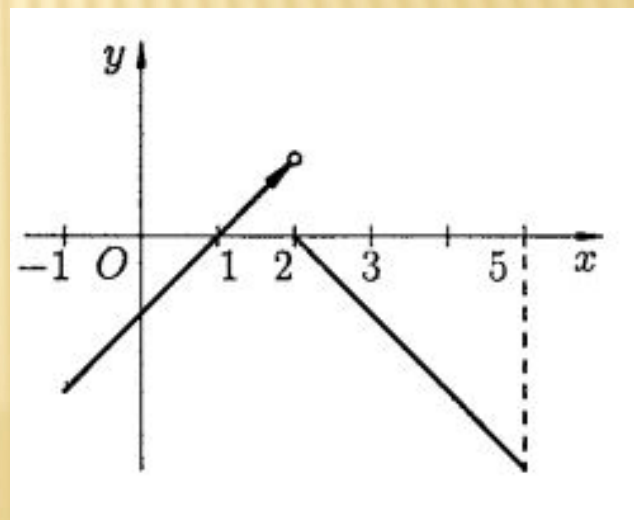
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2 \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Определена в точке $x_0=2$, но не имеет предела при $x \rightarrow x_0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1$,

$$\text{а } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 0$$

Следовательно, $x_0=2$ -

точка разрыва функции $f(x)$



ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

- ✘ 3) Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{если } x \neq x_0 \\ f(x_0) & \text{если } x = x_0 \end{cases}$$

функция

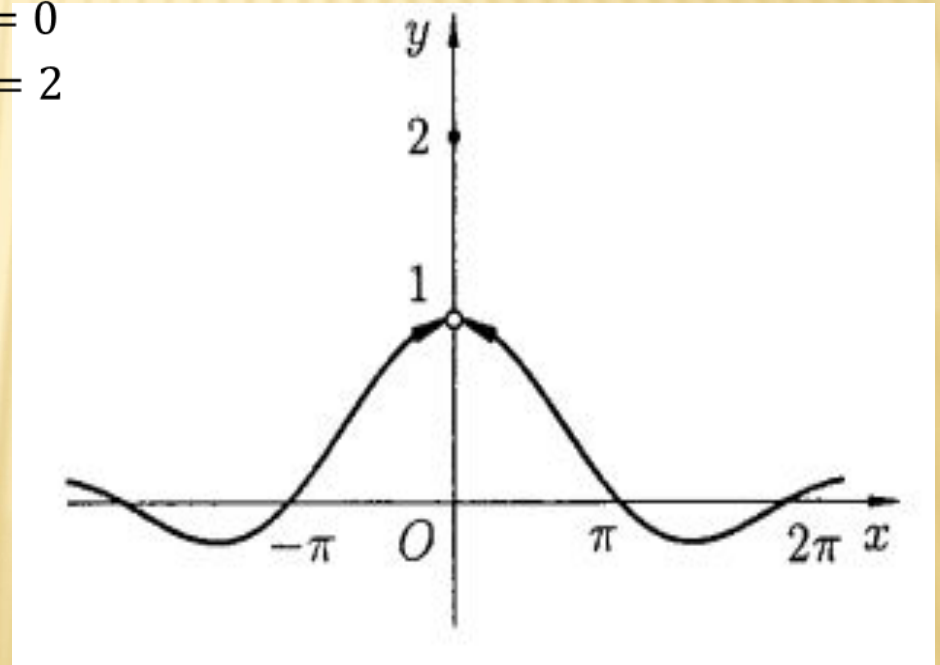
- ✘ Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 2, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $x_0=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ а } f(0) = 2$$

- ✘ Следовательно, $x_0=0$ – точка разрыва функции $f(x)$



КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ

- ✦ Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы)

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2,$$

если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;

если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

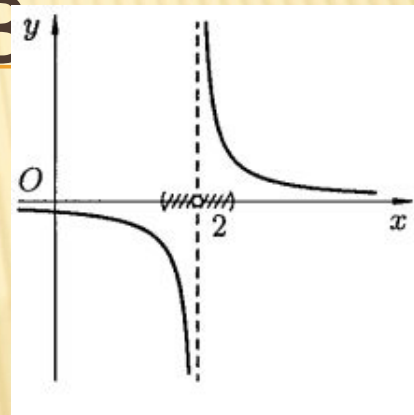
Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

- ✦ Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ

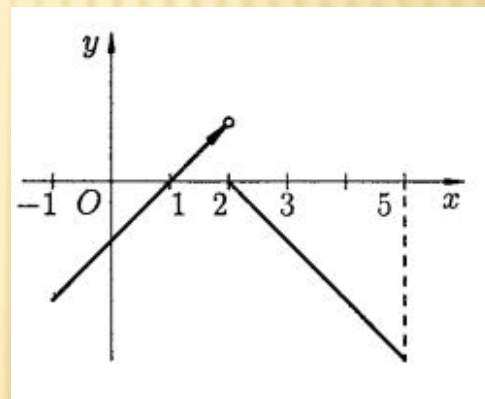
✦ В рассмотренных выше примерах

✦ 1) функция $y = \frac{1}{x-2}$ в точке $x_0=2$
имеет разрыв 2 рода



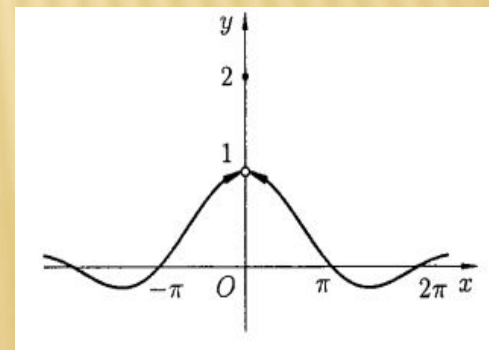
✦ 2) функция
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2 \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

в точке $x_0=2$ имеет разрыв первого
Рода, скачок функции = 1



✦ 3) функция
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 2, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

В точке $x_0=0$ имеет устранимый разрыв
Первого рода



ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

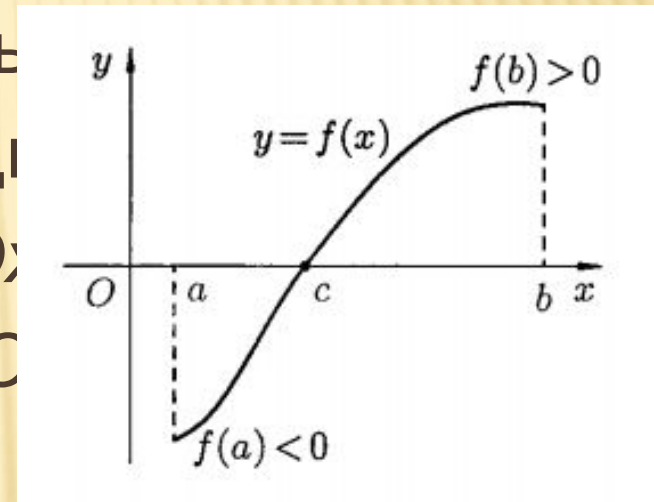
- Т.1 Сумма , произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю)
- Т.2 Пусть функции $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $z=g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0
- Т.3 Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси Ox , то обратная функция также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси Oy

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

- Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.
- Теорема Больцано-Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$ то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B
- Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка c , в которой данная функция $f(x)$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ БОЛЬЦАНО-КОШИ

- Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox .



- Следствие лежит в основе так называемого «метода половинного деления», который используется для нахождения корня уравнения

$$f(x) = 0.$$

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Шаг 1. Выбираем отрезок $[a, b]$ такой что $f(a) f(b) < 0$

Шаг 2. Вычисляем $f(a)$ и $f(b)$.

Шаг 3. Вычисляем $c = (a+b)/2$.

Шаг 4. Вычисляем $f(c)$. Если $f(c) = 0$, то c — корень уравнения.

Шаг 5. При $f(c) \neq 0$ если $f(a) f(c) < 0$, то полагаем $a = a, b = c$, иначе полагаем $a = c, b = b$.

Шаг 6. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина c . Иначе процесс деления отрезка $[a; b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.