ПОЯВЛЕНИЕ ХАОСА В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

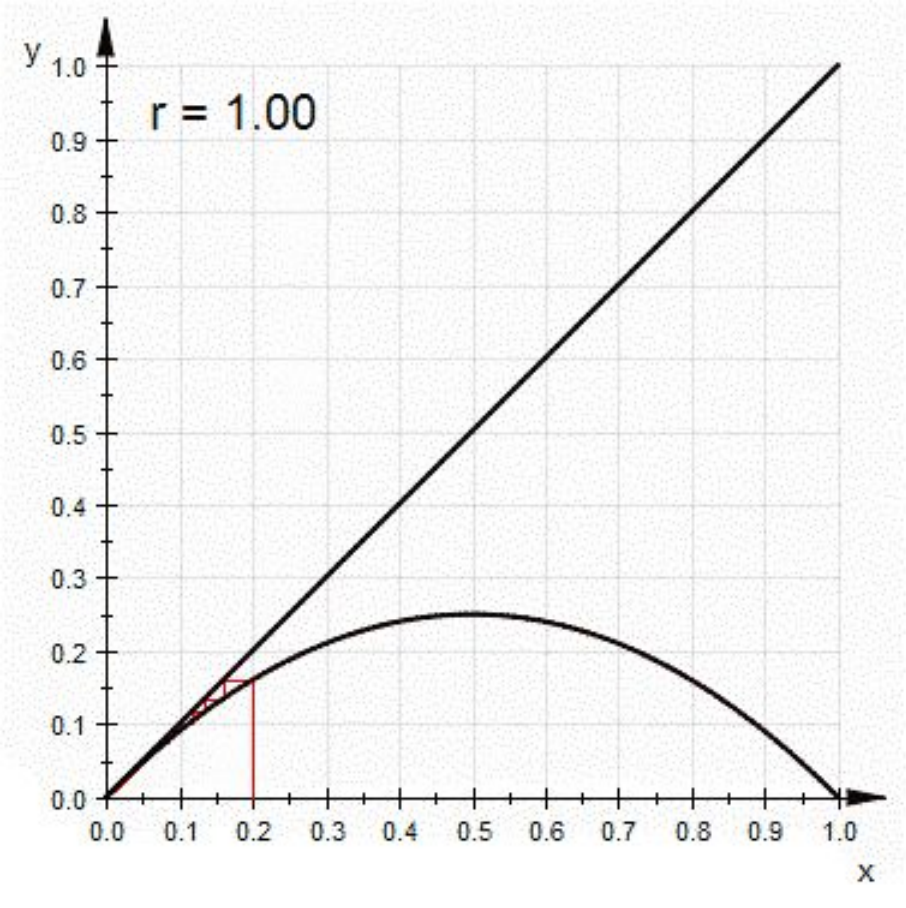
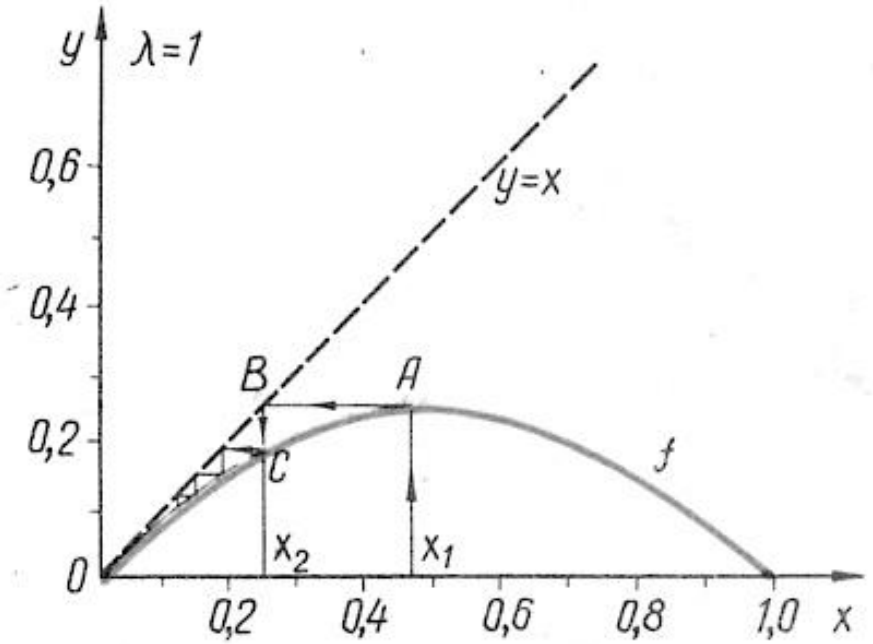
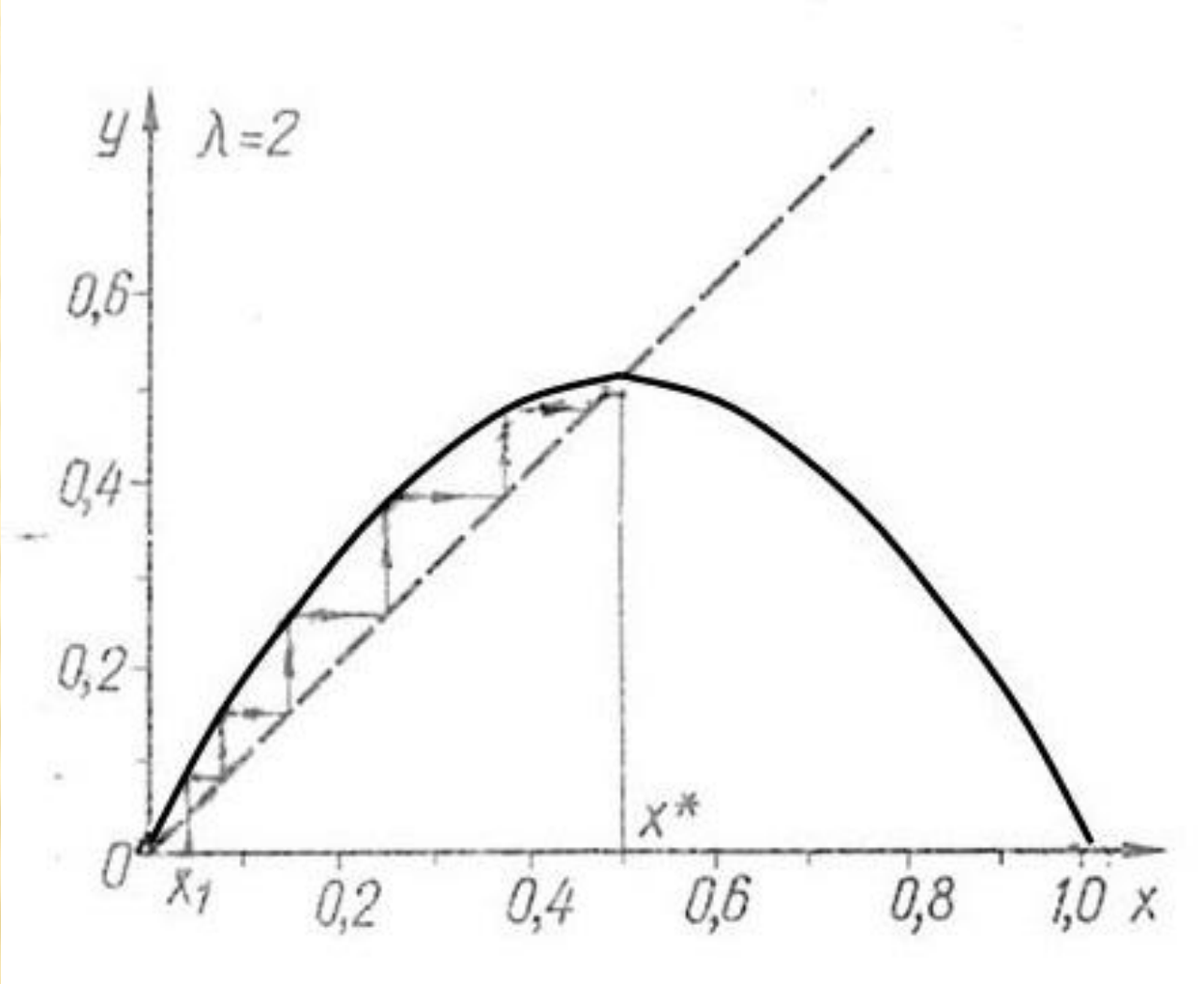
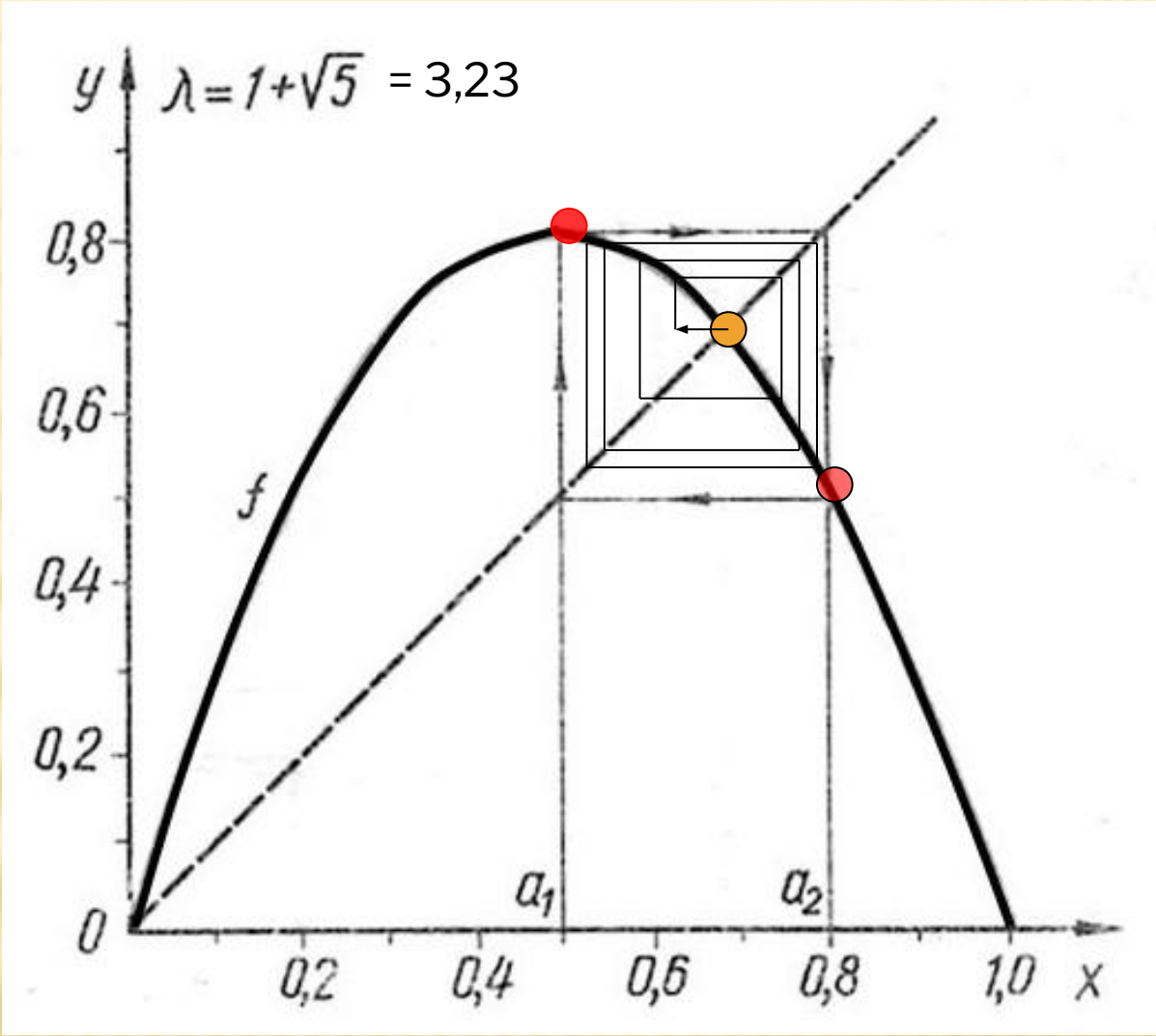
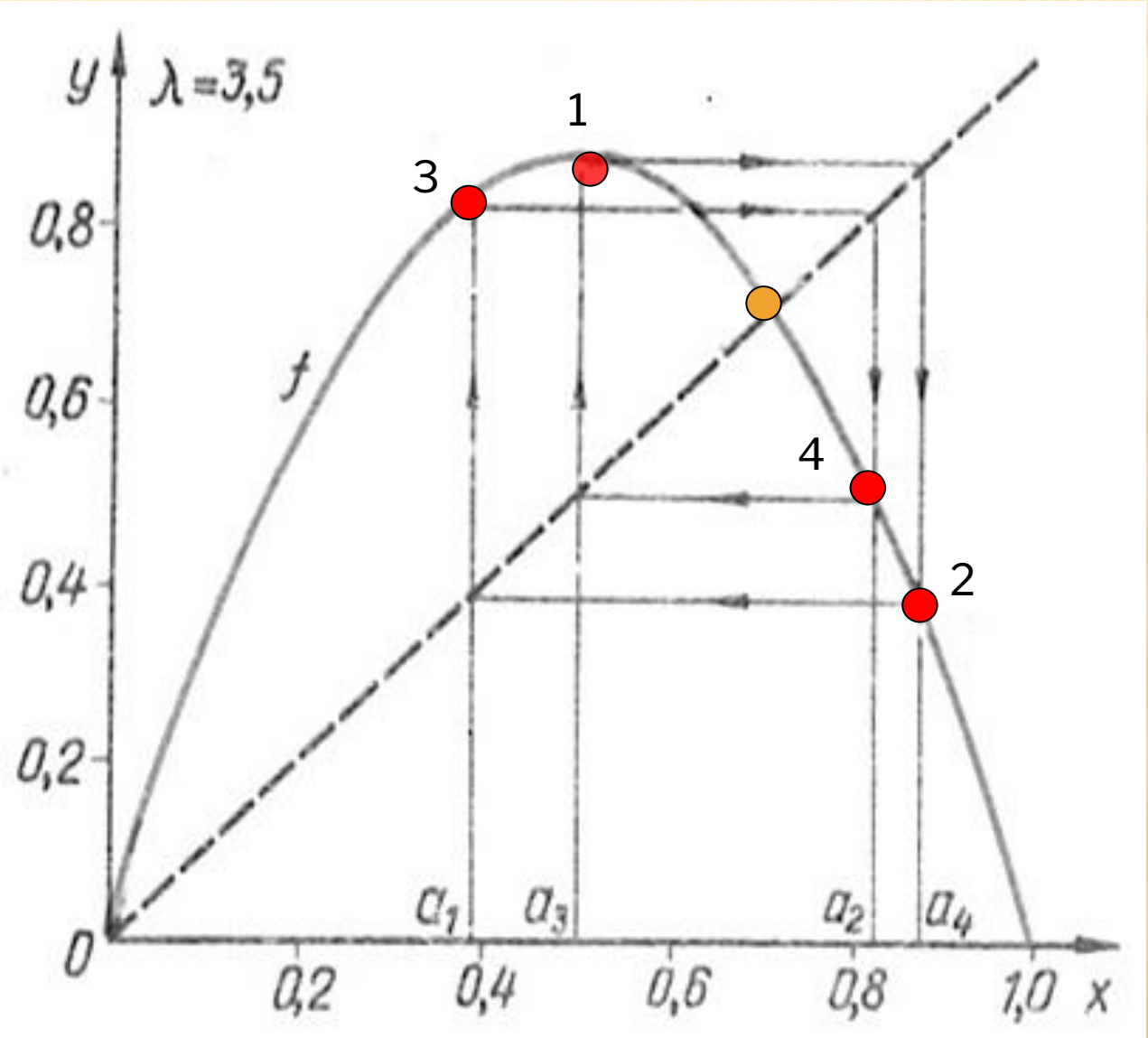


Рис. 3.1. Графическое представление последовательности $\{x_n\}$ в том случае, когда $x_n \to 0$ при $n \to \infty$




y
λ=2
0,6
0,4
0,2
0
x*
x1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
x


y
λ = 1+√5 = 3,23
0,8
0,6
0,4
0,2
0
f
a1
a2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
x


y
λ=3,5
1
3
0,8
f
0,6
4
2
0,4
0,2
a1
a3
a2
a4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
x

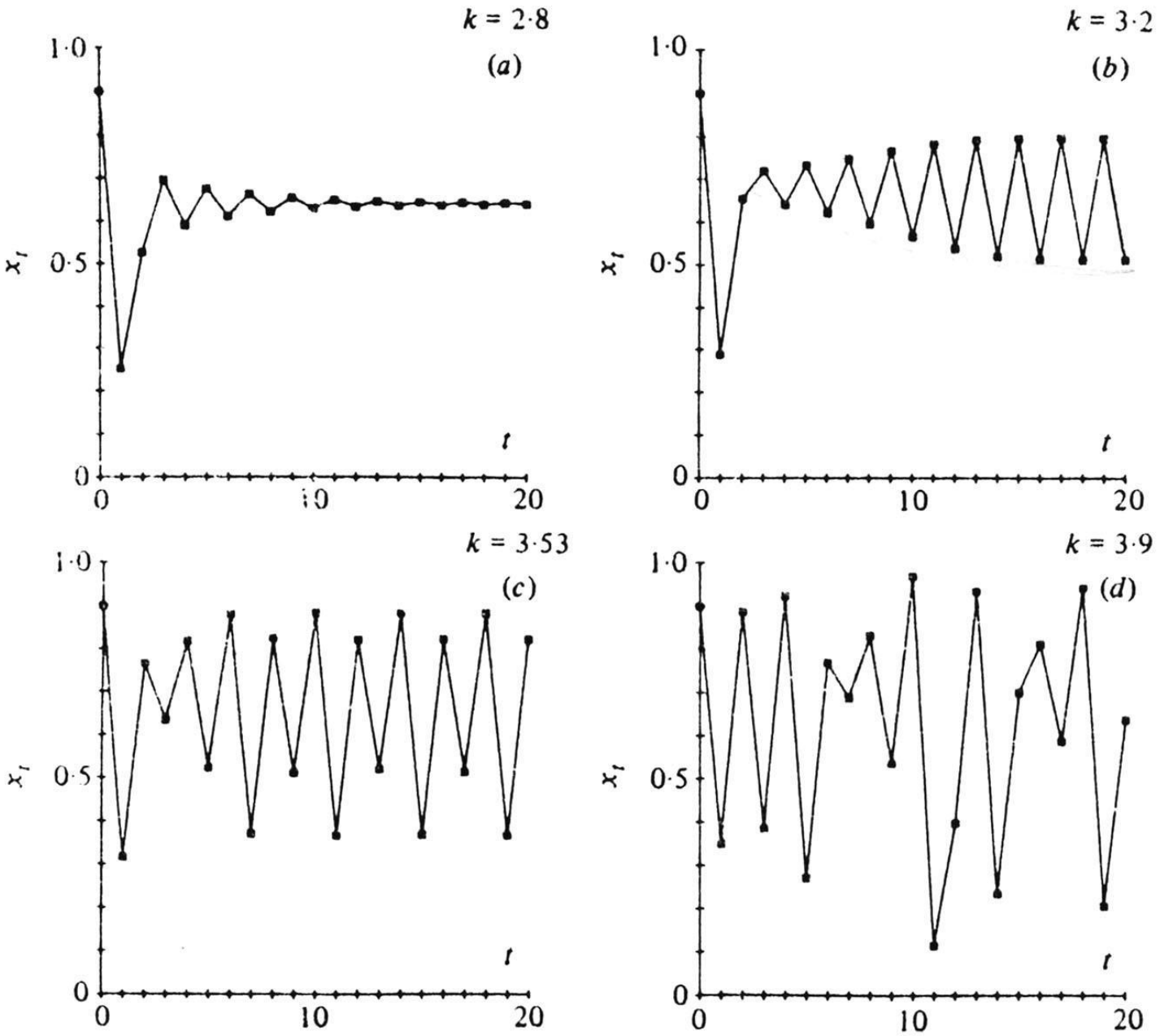
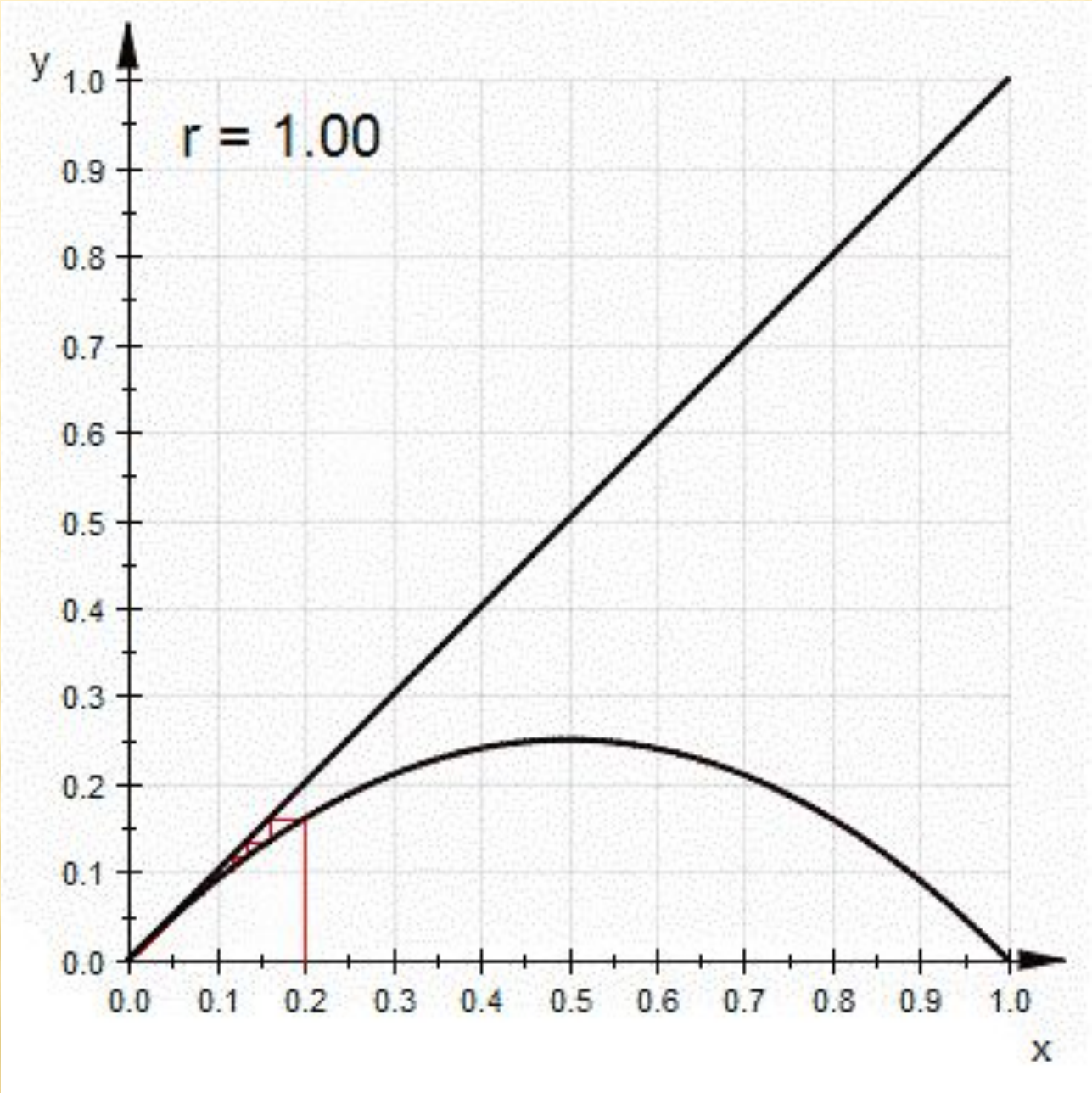
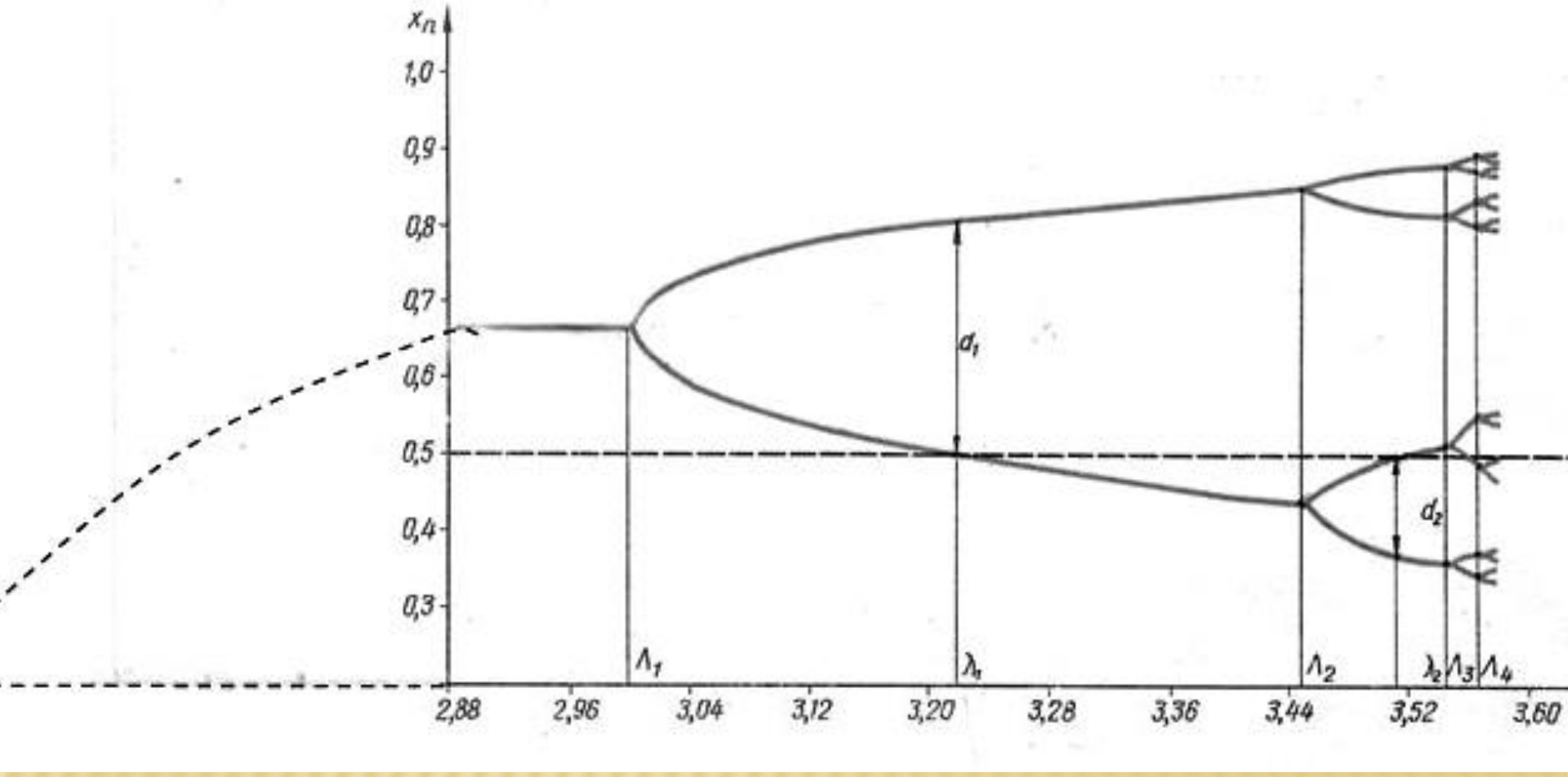
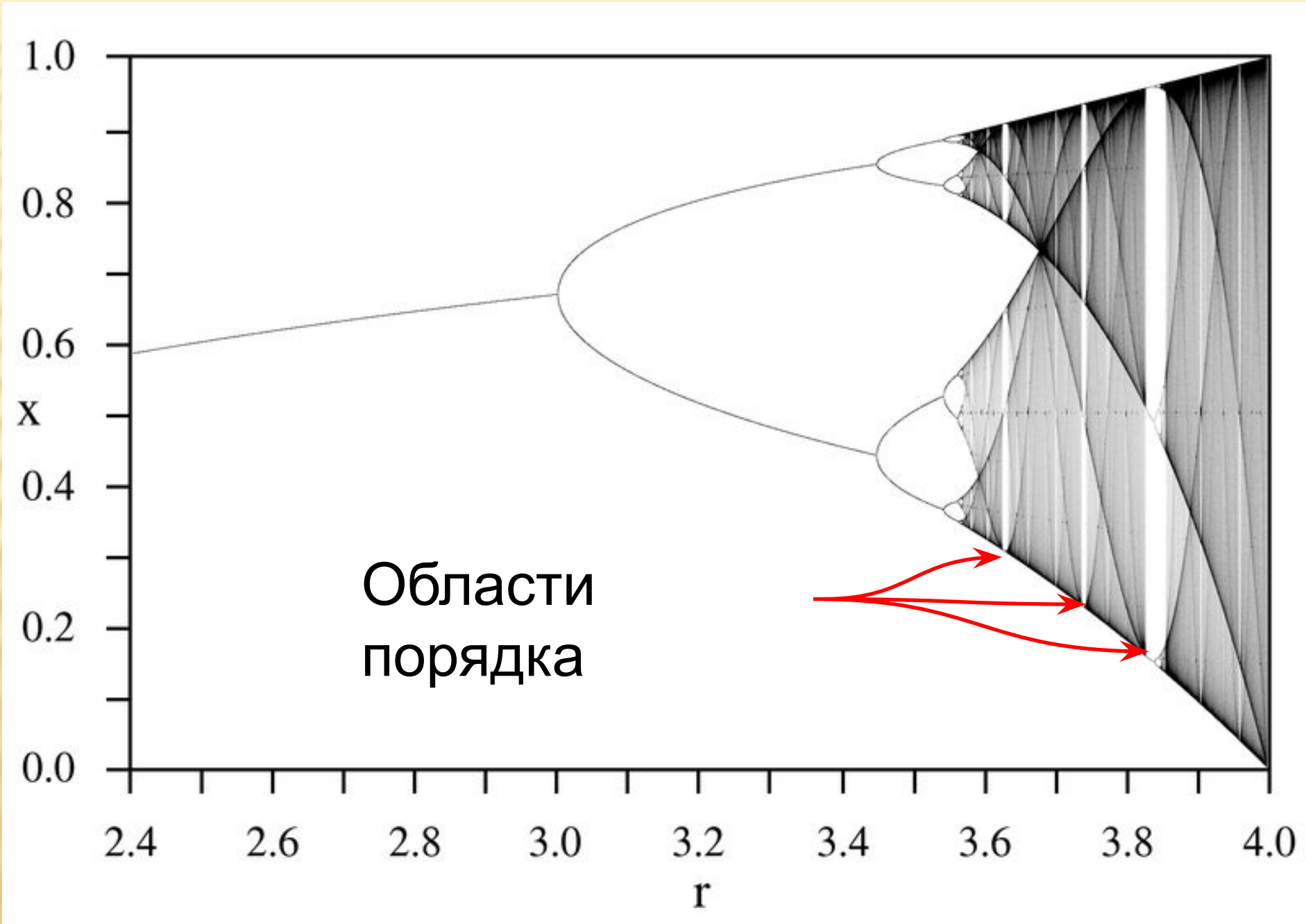


Fig. 1. Samples of the iterate of (2.2) at four different values of k indicated in the graphs.


r = 1.00
y
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНРОСТЬ БИФУРКАЦИЙ. СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА




1.0
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0.0
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0
r
Области
порядка

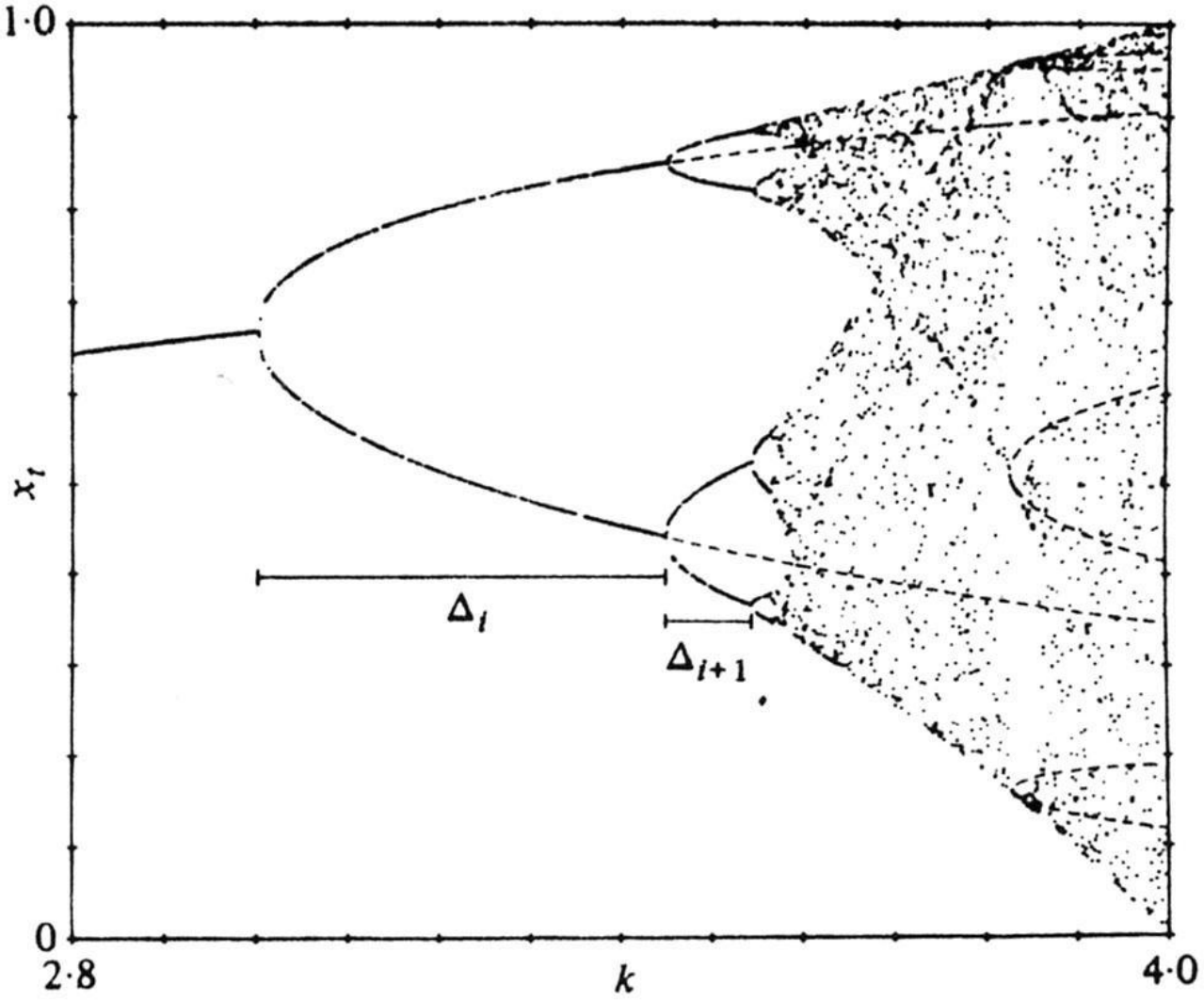


Fig. 2. Bifurcation diagram for (2.2). The diagram is drawn by increasing k in very small steps and for each k iterating the equation on the average 50 times and plotting the resulting x_t against k. Δ indicates the distance between consecutive period doublings. The dashed curves indicate unstable cycles of period 2 and 3. The unstable cycles were calculated by reverse iteration as explained in Section 4.

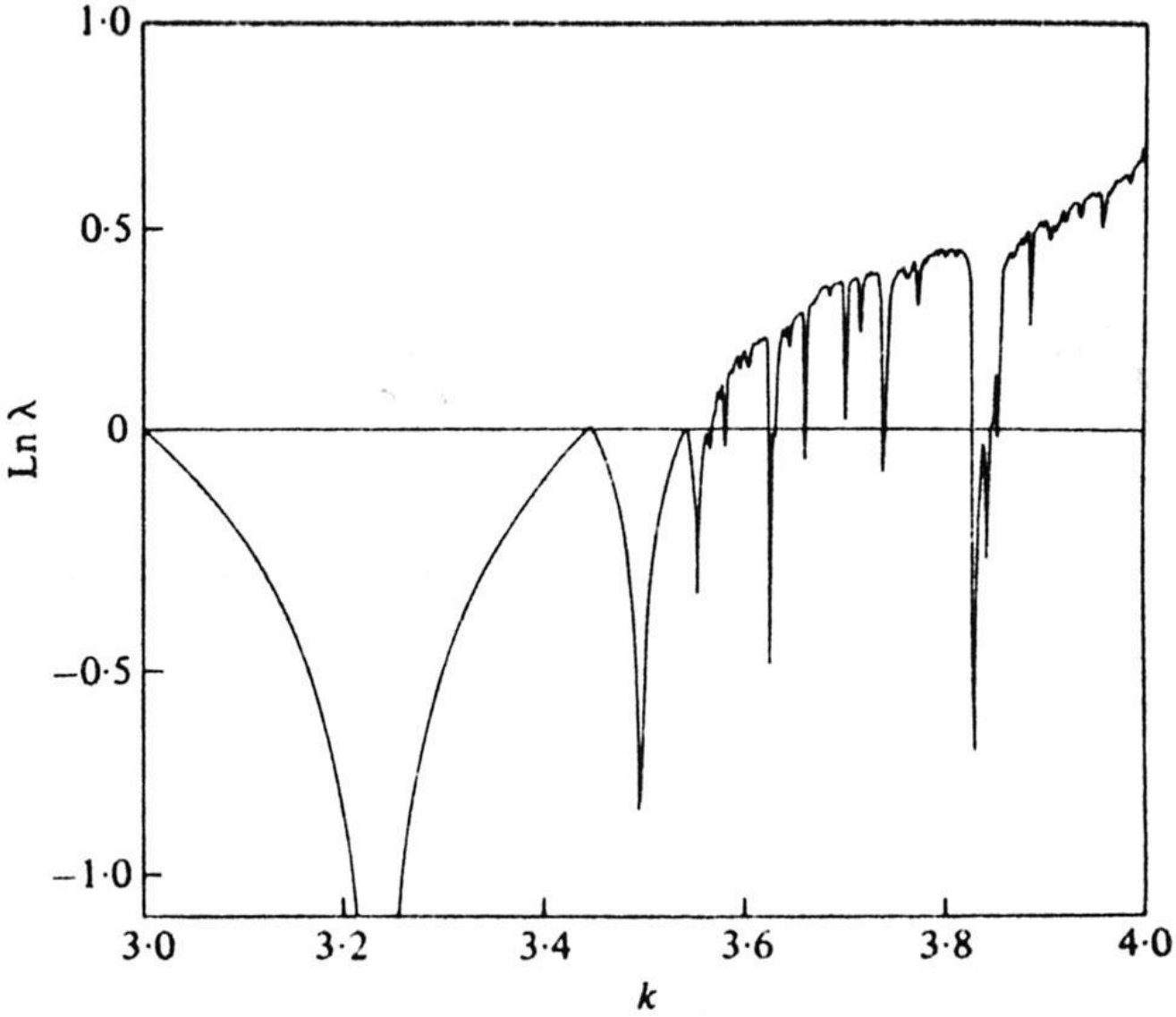


Fig. 6. Plot of the Lyapunov exponent against k for (2.2). The plot was obtained by iterating the equation 10000 times at each k value at a slowly increasing k. At each x_t the numerical value of the slope is calculated and the logarithm of the slope is added to the sum of logarithms of the previous slopes. The Lyapunov exponent is then obtained by dividing the sum by 10000.

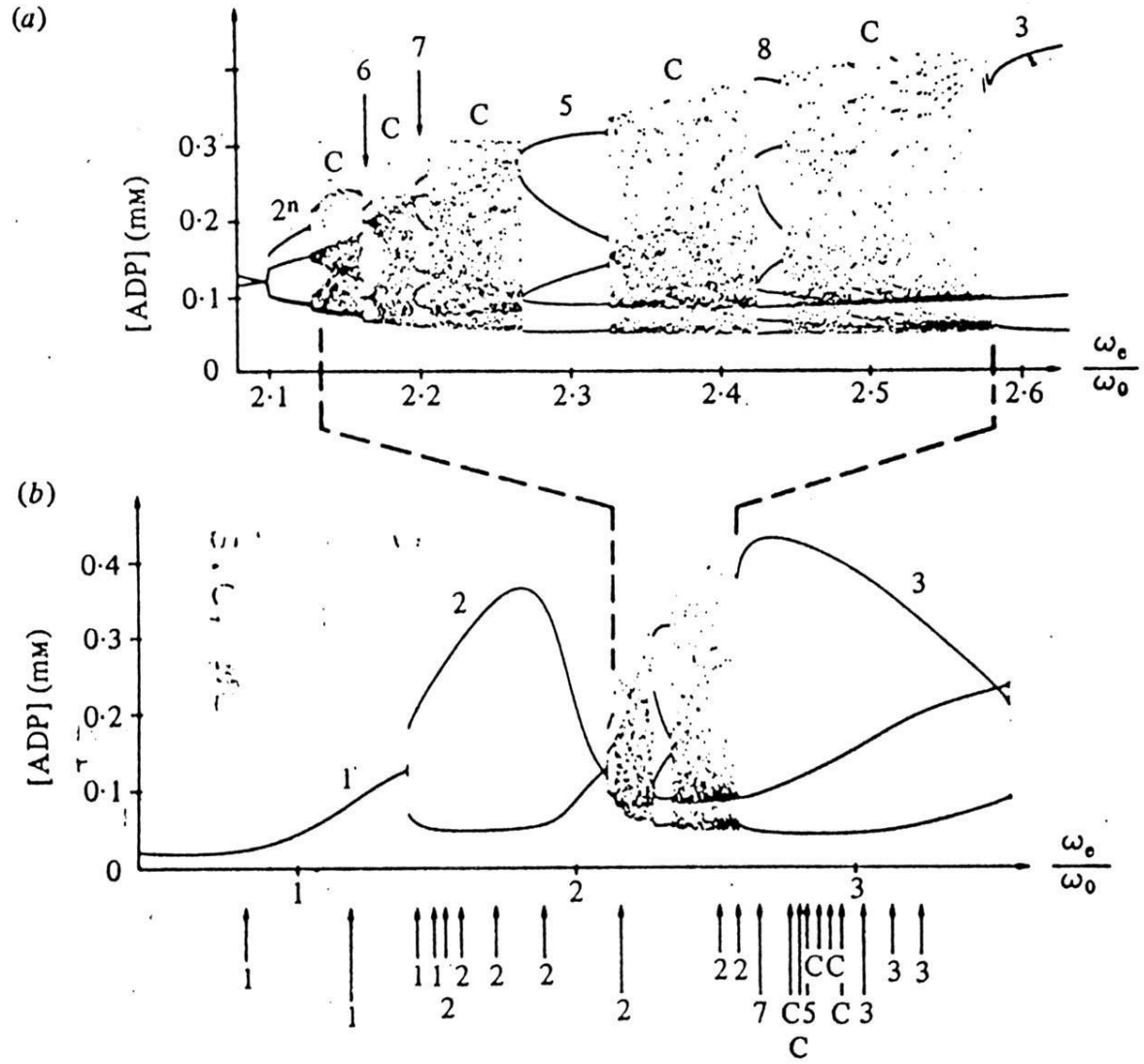
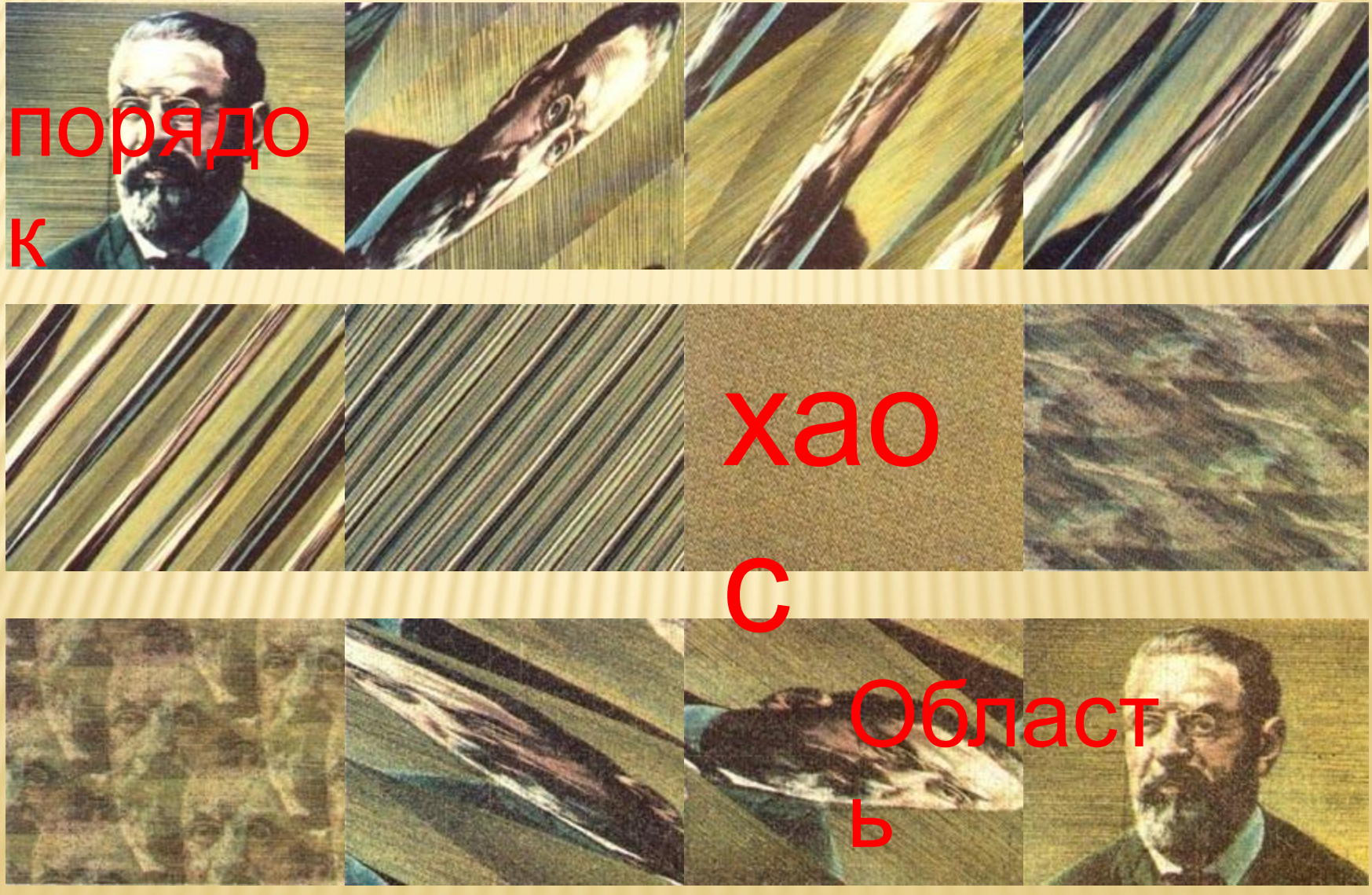


Fig. 24. Bifurcation diagram of the sinusoidally perturbed glycolytic system. Comparison of experimental results and computer results. The ADP concentration was monitored stroboscopically as the frequency ω_e of the oscillating substrate input flux was changed slowly. ω_0 is the frequency of the autonomous oscillation of the system at constant substrate input flux. The graphs are the theoretical results obtained from the model in Fig. 23. The arrows indicate experimental results. Numbers indicate period multiplicity and *C* means chaos. Reproduced with permission from Markus, Kuschmitz & Hess (1985).

ВОЗВРАЩЕНИЕ ПУАНКАРЕ

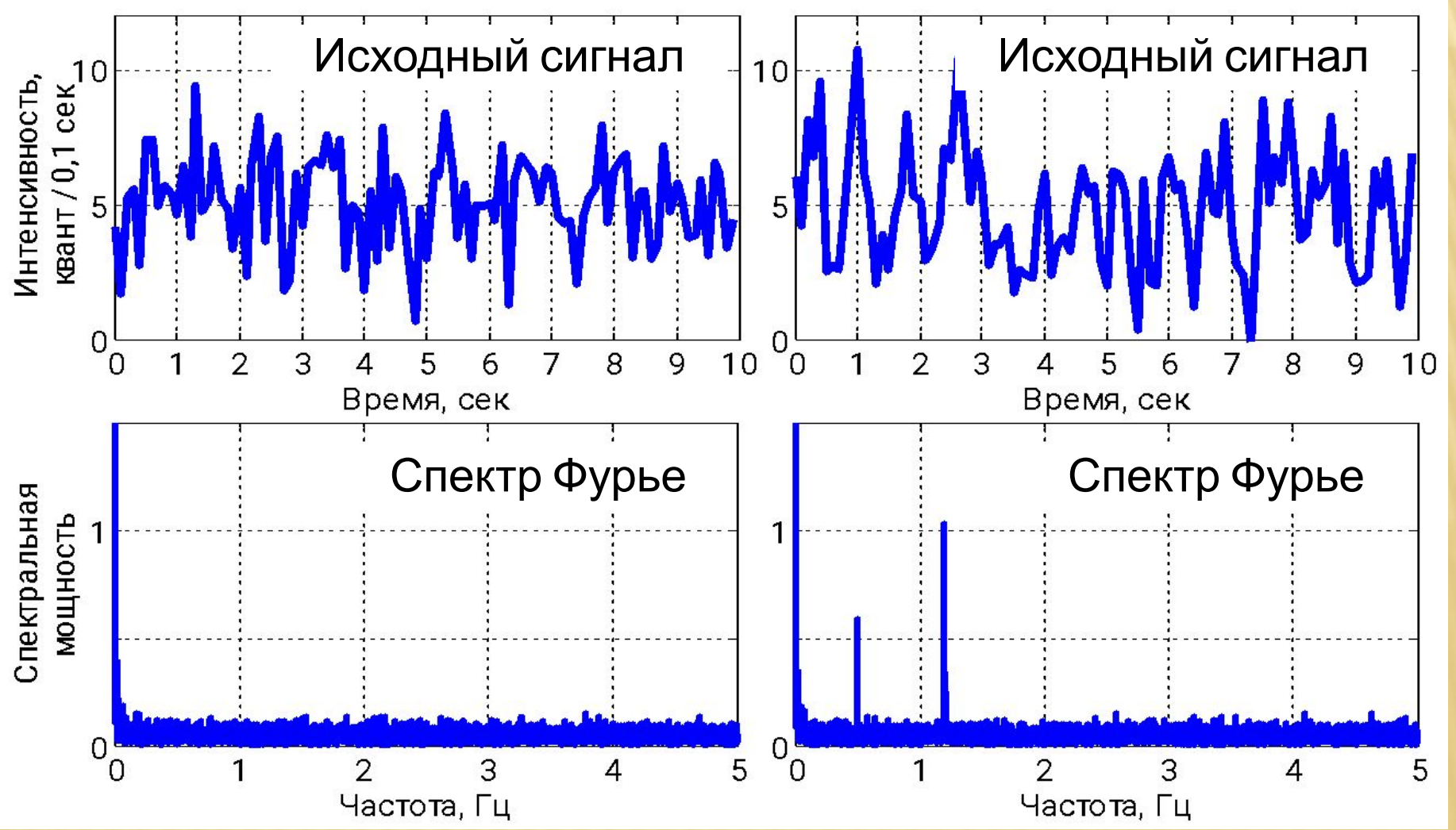


СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ШУМЫ

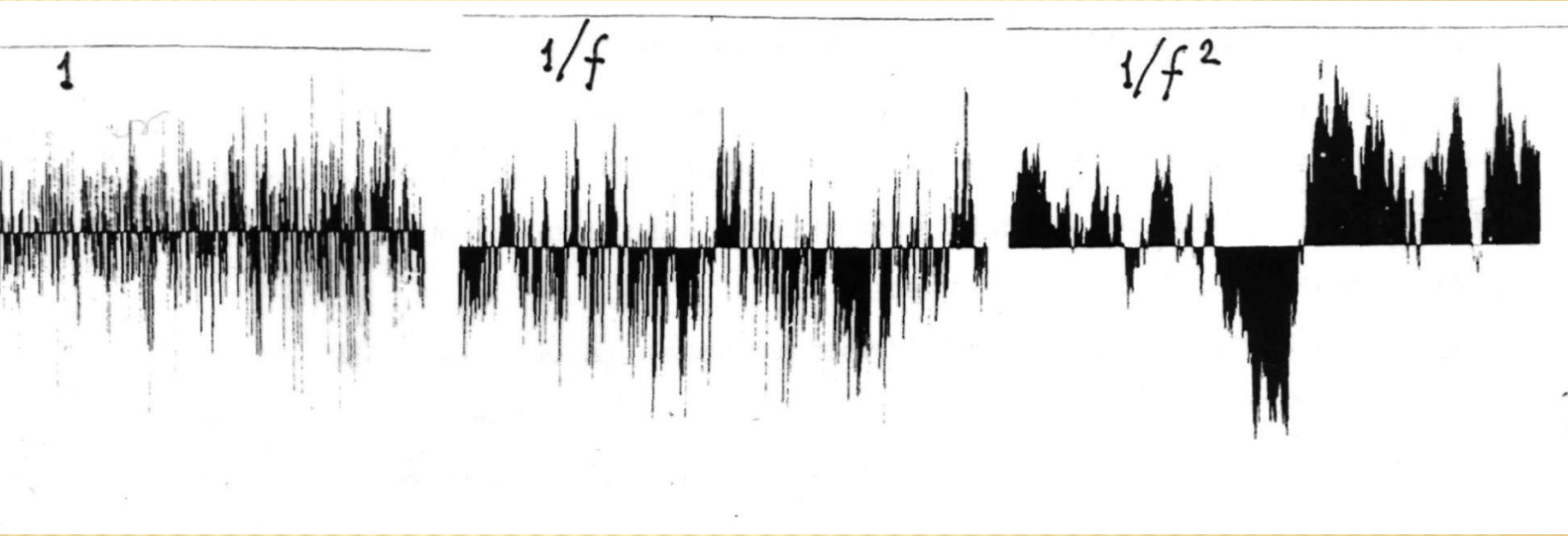
СПЕКТРЫ ФУРЬЕ

Случайный сигнал

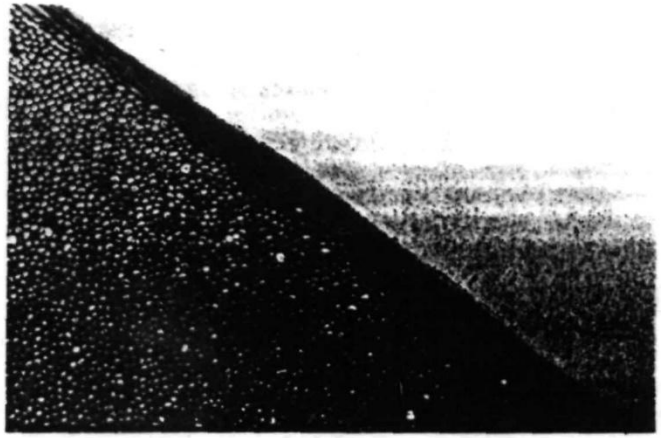
Случайный сигнал с периодическими компонентами



ШУМЫ



a



b

Fig. 8.16 The slope of a granular heap varies locally from place to place (*a*). In this pile of mustard seeds, small variations in slope can be seen superimposed on a constant average gradient. When the slope approaches the angle of maximum stability, the addition of a single seed can trigger an avalanche (*b*). This avalanche can involve any number of grains, from just a few to the entire slope. Notice that only grains within the first few layers move (here the grains in motion are blurred). (Photos: Sidney Nagel, University of Chicago).

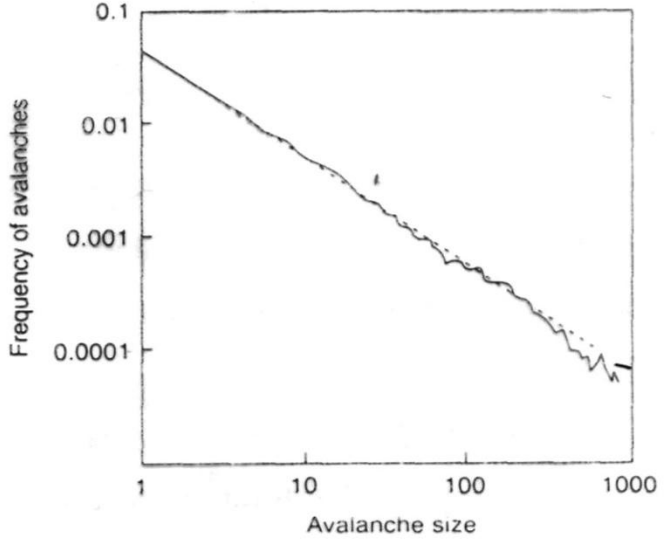
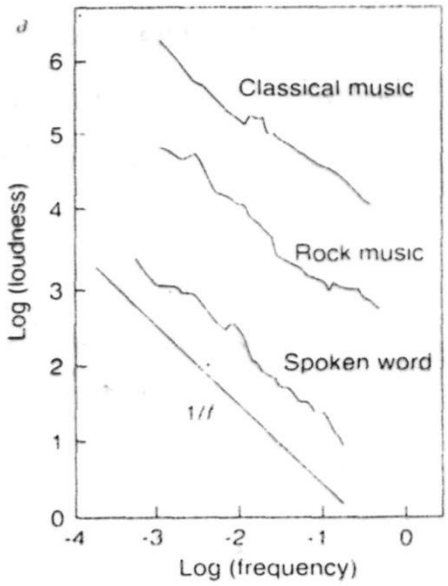
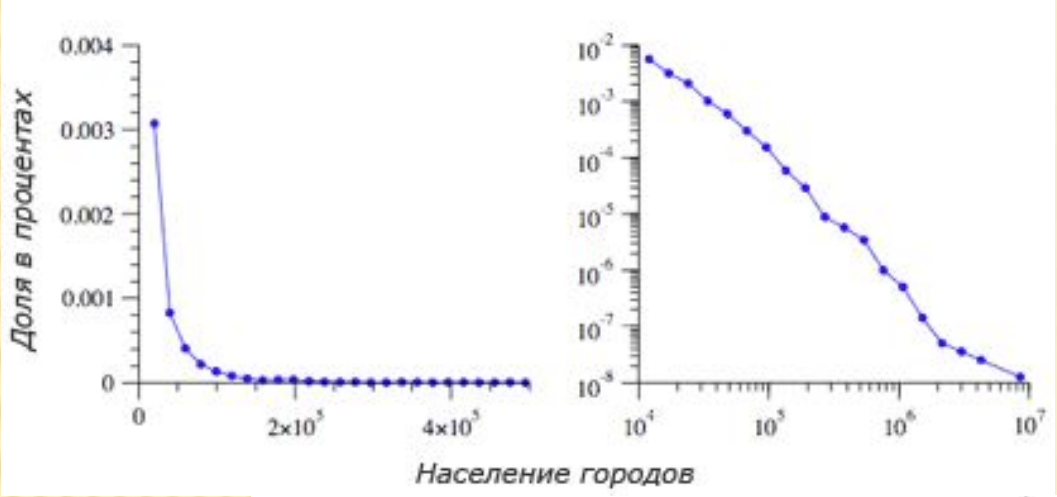


Fig. 8.17 The frequency of an avalanche of a certain size (that is, involving a certain number of grains) decreases in inverse proportion to its size, in a simple model of sand-pile avalanches. On a plot of the logarithm of frequency against the logarithm of size, this relationship defines an approximately straight line with a slope of around minus one (depicted by the dashed line). (After: Bak 1997.)



СТЕПЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В



$$P \sim x^{\alpha}$$

$$lnP \sim \ln(x^{\alpha}) \equiv \alpha \cdot lnx$$

величина	минимум $x_{\min}$	показатель α
(a) Частота слов	1	2.20(1)
(b) Число цитирований научных статей	100	3.04(2)
(c) Число веб-хитов	1	2.40(1)
(d) Число проданных экземпляров книг	2 000 000	3.51(16)
(e) Число принятых телефонных звонков	10	2.22(1)
(f) Магнитуда землетрясений	3.8	3.04(4)
(g) Диаметр кратеров на Луне	0.01	3.14(5)
(h) Интенсивность вспышек на Солнце	200	1.83(2)
(i) Интенсивность военных конфликтов	3	1.80(9)
(j) Совокупный доход в долларах	$600m	2.09(4)
(k) Частота фамилий	10 000	1.94(1)
(l) Население городов	40 000	2.30(5)

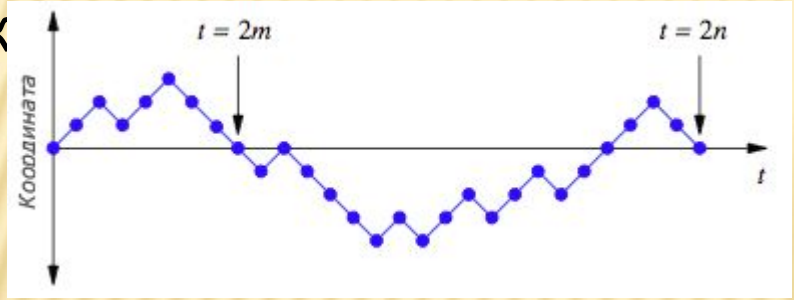
МЕХАНИЗМЫ ПОЯВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ

1. Связь двух экспоненциальных процессов

$$x = e^{\alpha t}, y = e^{\beta t}$$

$$y = e^{\beta t} = (e^{\alpha t})^{\frac{\beta}{\alpha}} = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

2. Случайные блуж



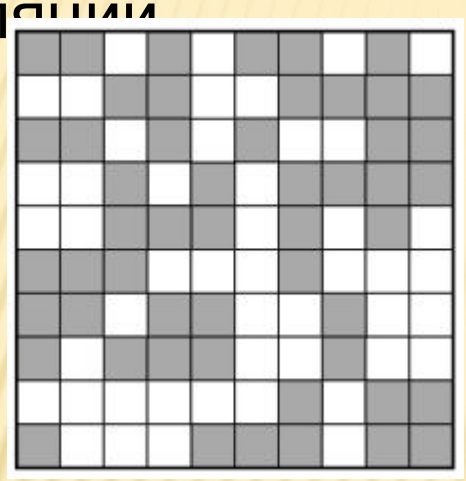
3. Процесс Юла

Богатый – еще богаче, большой – еще больше.

Положительные обратные связи ⇒

МЕХАНИЗМЫ ПОЯВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ

4. Пороговые явления в перколяции



Решетка размера $N \times N$.
Вероятность окрашивания клетки – p.
Средний размер кластера – $\langle s \rangle$.

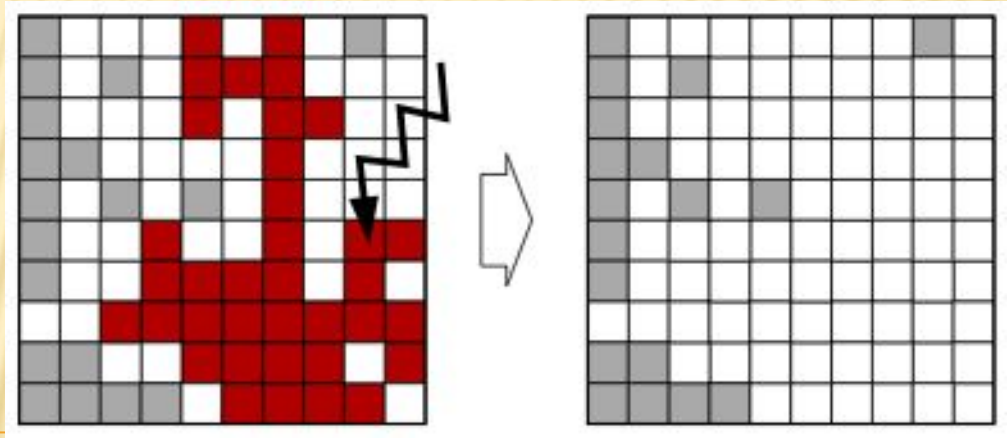
Малые p – $\langle s \rangle = f(p)$
Большие p – $\langle s \rangle = f(N)$
Критическое значение – $p = 0{,}5927\ldots$

В критической точке – непрерывный фазовый переход.
Масштабная инвариантность.
Степенная зависимость.

МЕХАНИЗМЫ ПОЯВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ

5. Самоорганизующаяся критичность.
   - Рост деревьев VS. пожары.

     Самоподдержание вблизи критической точки.



ПРИМЕРЫ БАЛАНСИРОВАНИЯ НА ГРАНИЦЕ «ХАОС – ПОРЯДОК»

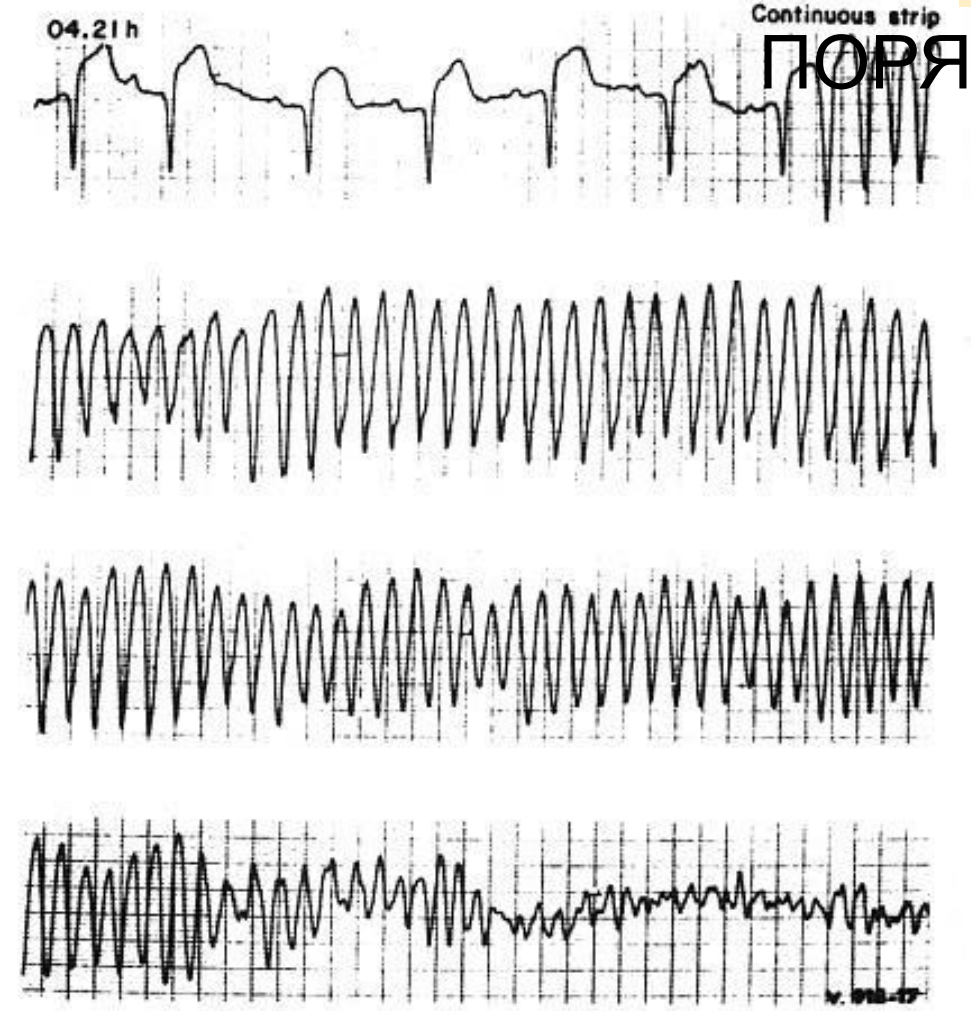


Figure 3.11 An electrocardiogram showing the onset of fibrillation leading to heart failure.

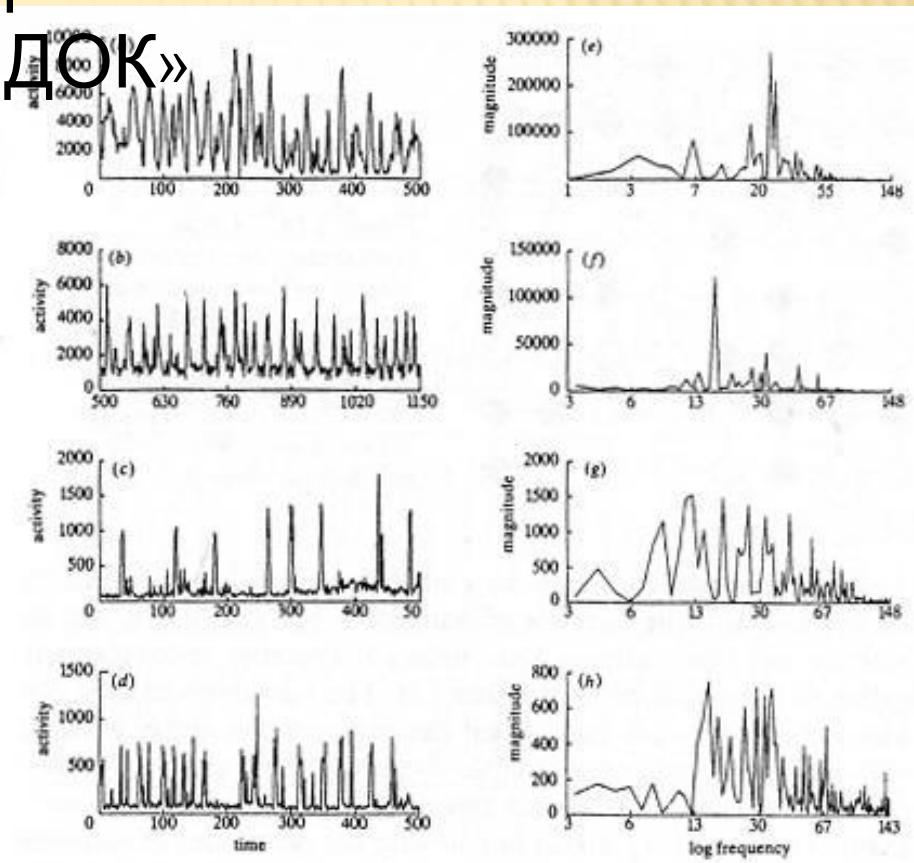
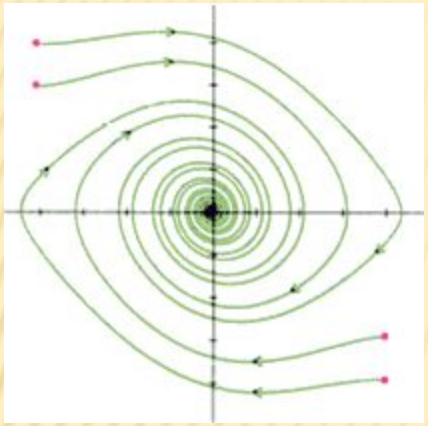
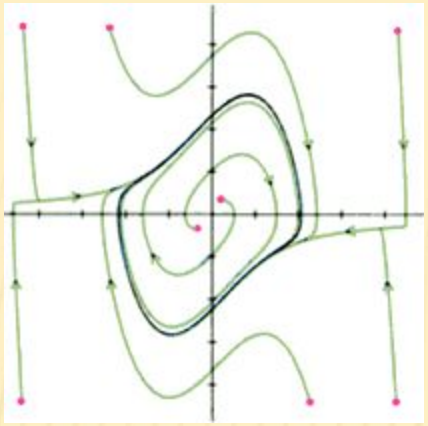
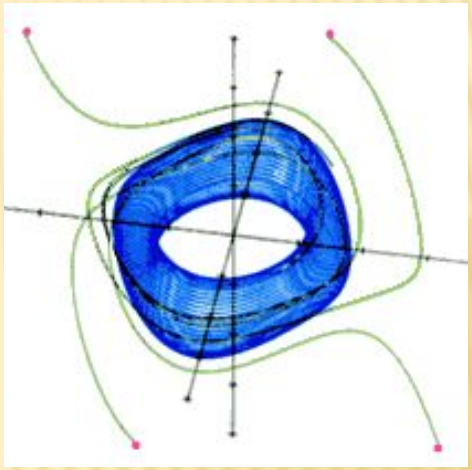


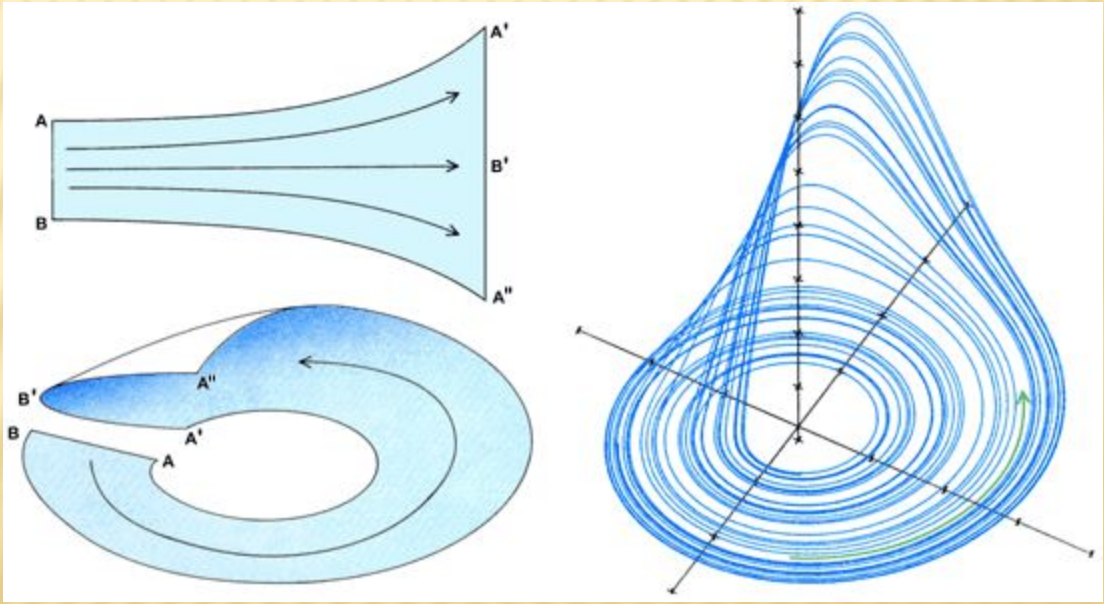
Figure 3.13 Rhythmic activity patterns observed in ant colonies (a), (b) with the associated power spectra or Fourier analysis shown in (e) and (f), with clearly-defined maxima at about 25 mins. By contrast, individuals either isolated or in a low-density colony (c), (d) have no well-defined frequency (g), (h), and are in a state of deterministic chaos.

ПЕРЕХОД К ДЕТЕРМИНИРОВАННОМУ ХАОСУ

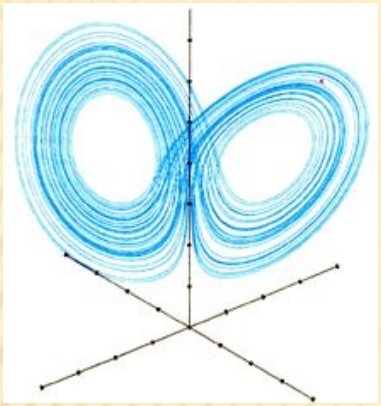
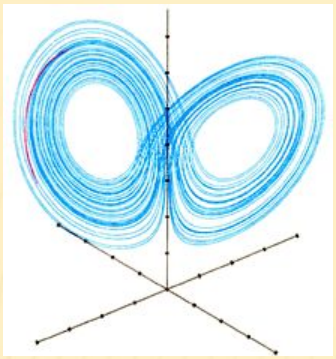
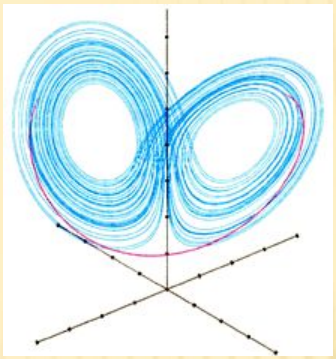
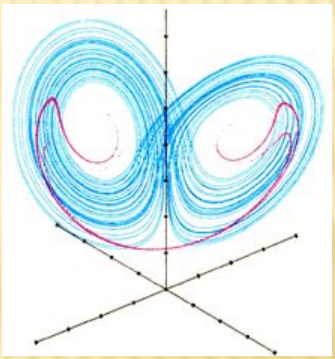
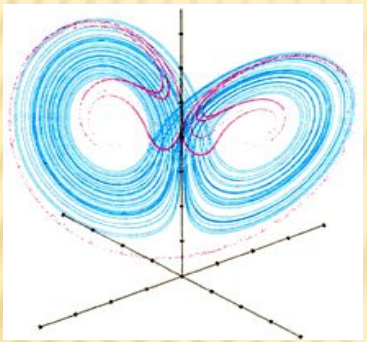
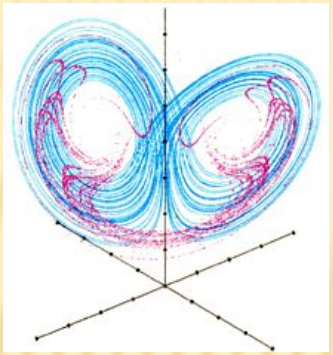
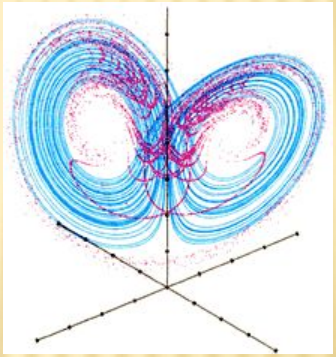
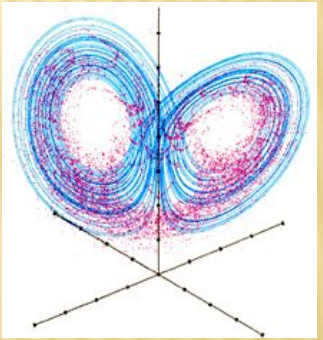
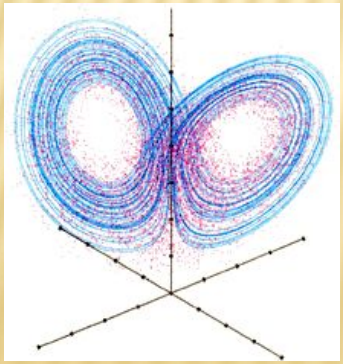








РАСХОЖДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ В ПРЕДЕЛАХ СТРАННОГО АТТРАКТОРА

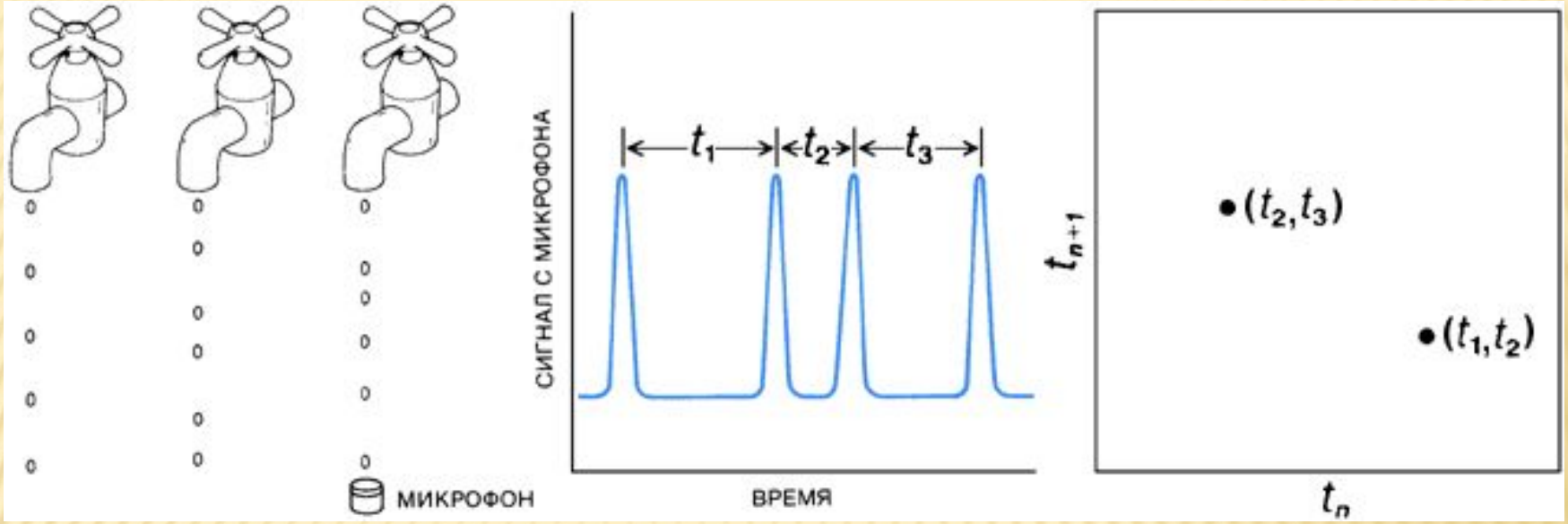










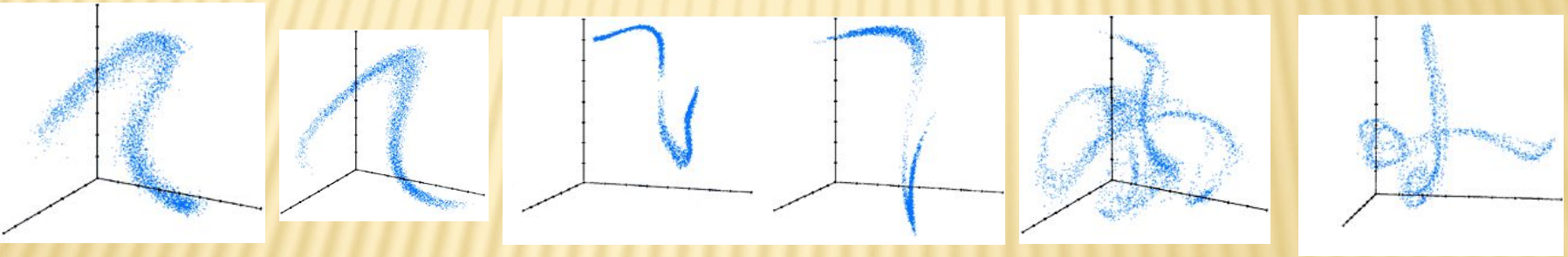
$dx/dt = \sigma y - \sigma x$
$dy/dt = rx - y$
$-xz$
$dz/dt = xy - bz$

При $r < 1$ одна устойч. точка в 0
$28 < \approx r < \approx 148{,}4$ стр.аттр.
$r > 148{,}4$ предельный цикл

Lorenz Attractor

three near-identical initial points diverge into chaos


МИКРОФОН
СИГНАЛ С МИКРОФОНА
t_1
t_2
t_3
ВРЕМЯ
t_{n+1}
(t_2, t_3)
(t_1, t_2)
t_n



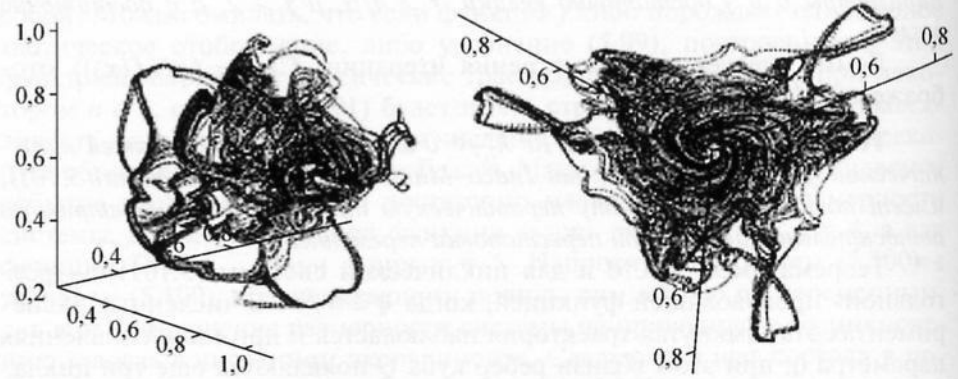


Рис. 5.22. Аттрактор трехмерной циклической системы (5.101)−(5.102), построенной на суперпозиции порядка 4 (m = 4) производящей функции Гласса−Маки.

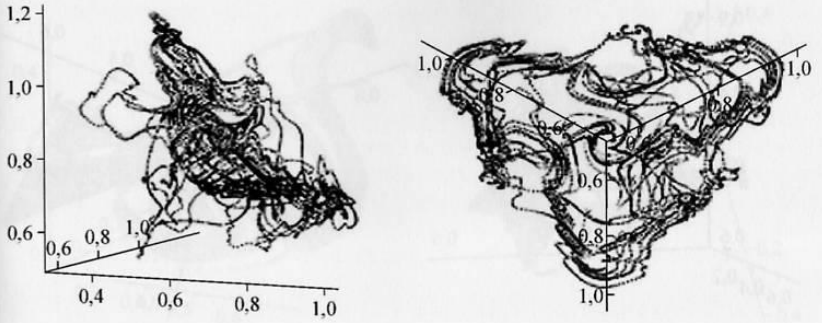


Рис. 5.23. Аттрактор трехмерной циклической системы (5.101)−(5.102), построенной на суперпозиции порядка 5 (m = 5) производящей функции Гласса−Маки.

соответственно. Видно, что геометрия аттрактора существенно изменяется с ростом порядка суперпозиции. Но их объединяет общее свойство. Все они являются симметричными относительно поворота на 120°.

Рассмотрим теперь трехмерную симметричную систему (5.101)–(5.103). В этом случае также при увеличении порядка суперпозиции производящей функции наблюдается явление «хаотизации» траекторий. На рис. 5.25 приводится фазовый портрет эволюции трехмерной симметричной итерированной системы (5.101)–(5.103) с производящей функцией Гласса–Маки при m = 8 (a = 2, g = 10).

Необычность численно наблюдаемого на рис 5.25 аттрактора состоит в том, что он порожден симметричной системой и, тем не менее, является асимметричным. Из наличия полной симметрии системы (5.101)–(5.103) относительно перестановки переменных можно заключить, что у нее имеется шесть аналогичных аттракторов.

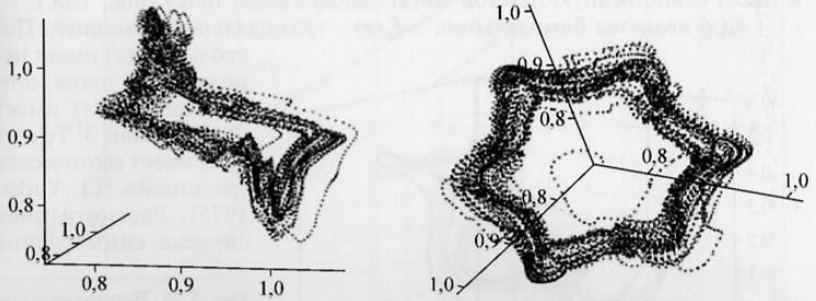


Рис. 5.24. Аттрактор трехмерной циклической системы (5.101)−(5.102), построенной на суперпозиции порядка 6 (m = 6) производящей функции Гласса−Маки.

АВТОКОРРЕЛЯЦИИ ПРИ МЕХАНОЭМИССИИ КРОВИ

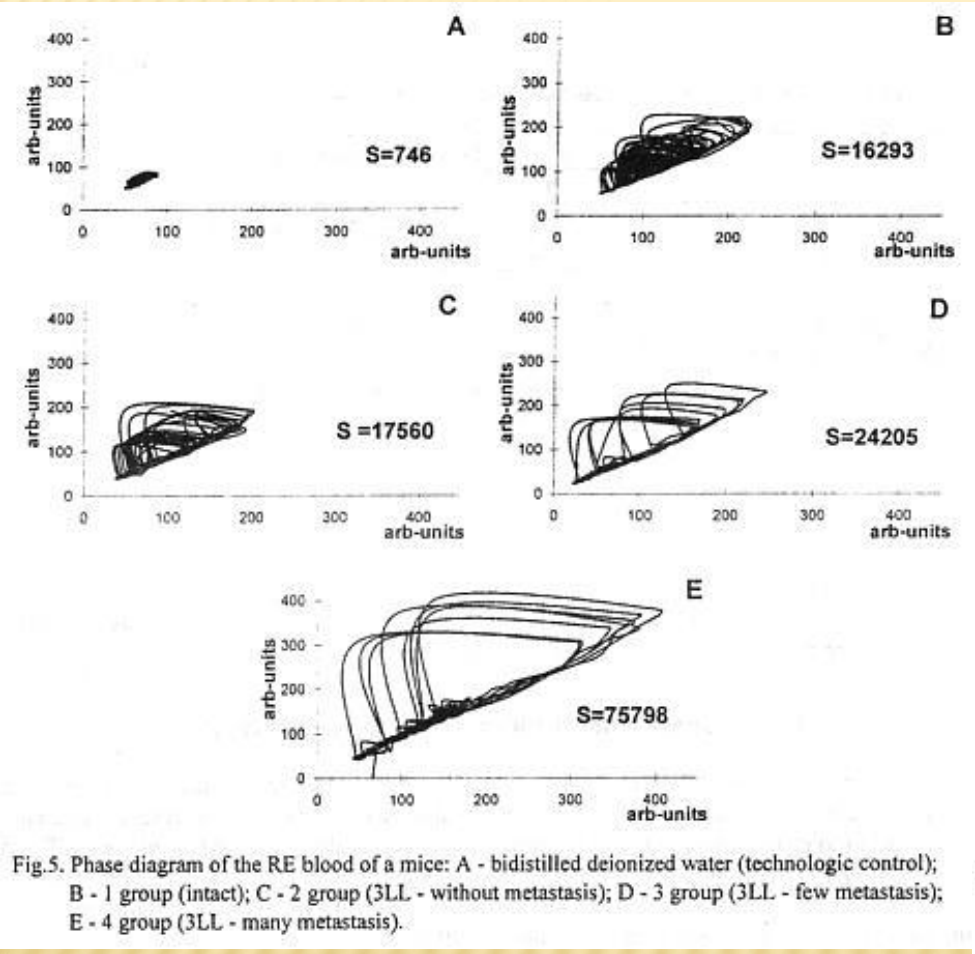


Fig.5. Phase diagram of the RE blood of a mice: A - bidistilled deionized water (technologic control); B - 1 group (intact); C - 2 group (3LL - without metastasis); D - 3 group (3LL - few metastasis); E - 4 group (3LL - many metastasis).

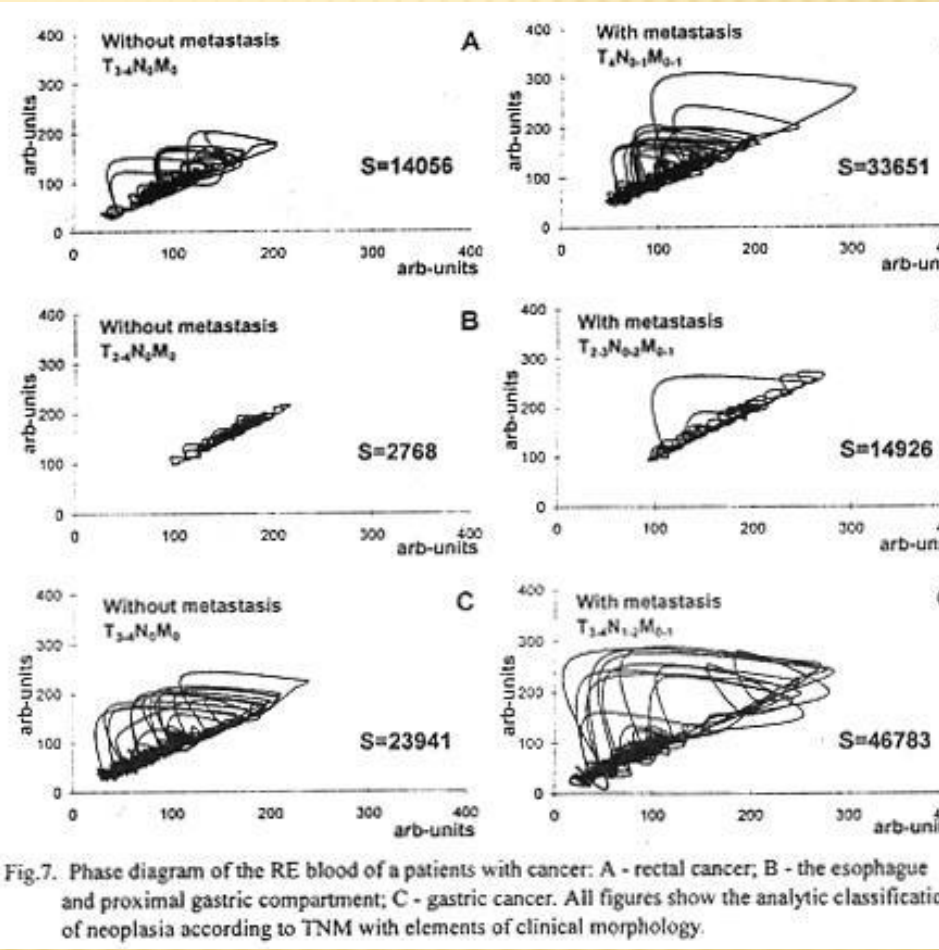
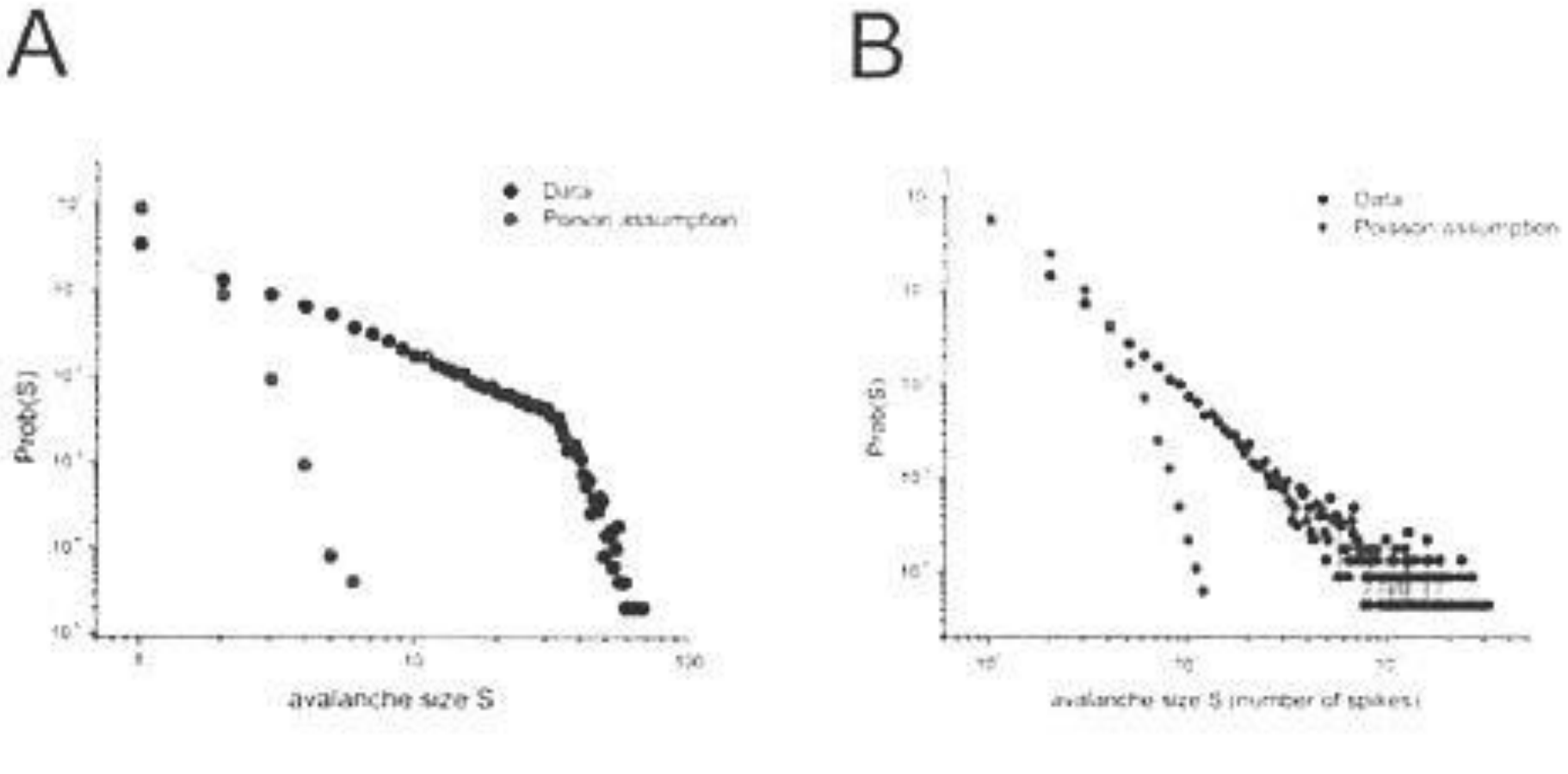
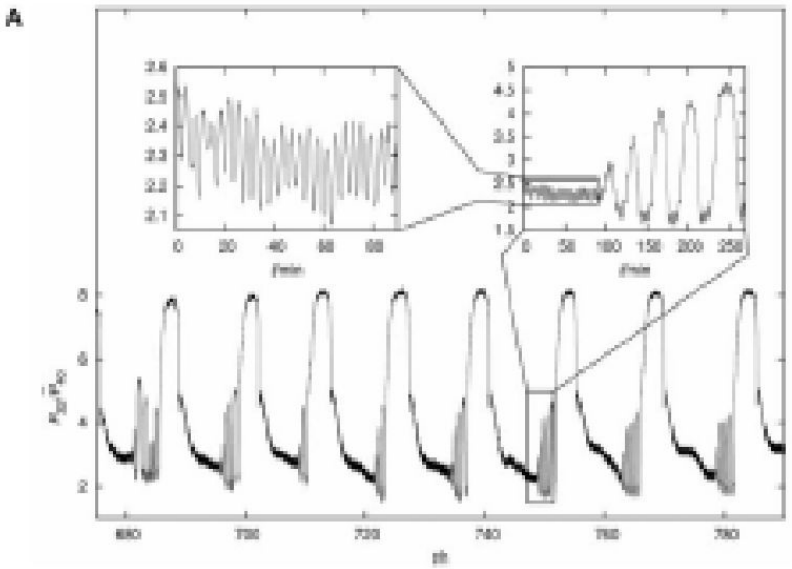


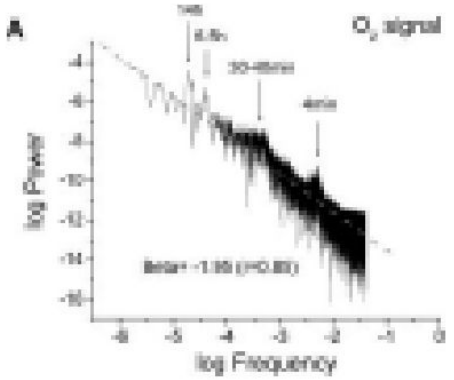
Fig.7. Phase diagram of the RE blood of a patients with cancer: A - rectal cancer; B - the esophague and proximal gastric compartment; C - gastric cancer. All figures show the analytic classificatio of neoplasia according to TNM with elements of clinical morphology.

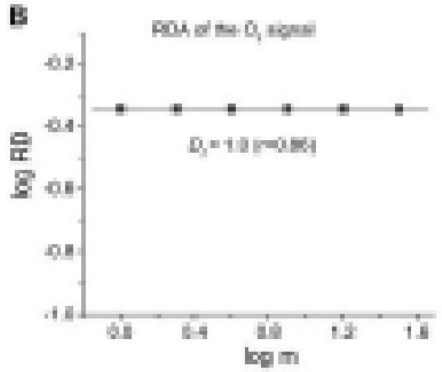
Лавина нервных спайков

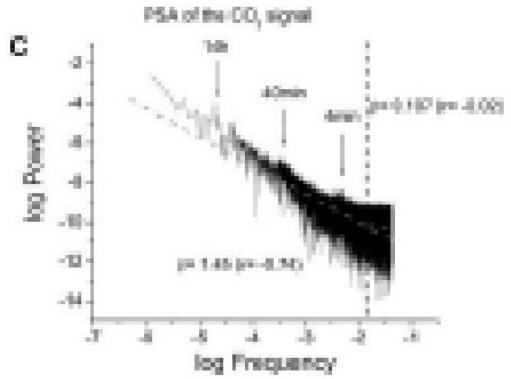


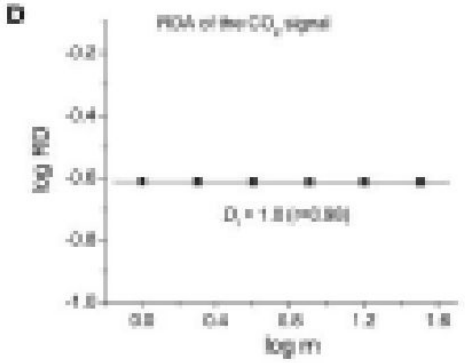
ФРАКТАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ O_2 И CO_2 В КУЛЬТУРАХ ДРОЖЖЕЙ (AON et al. 2008)

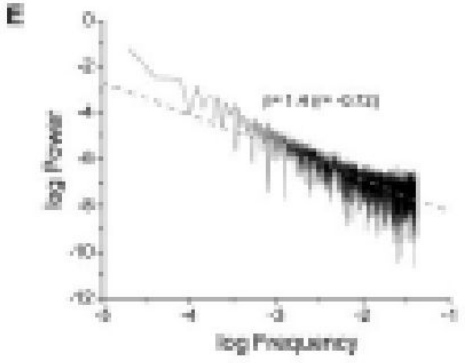


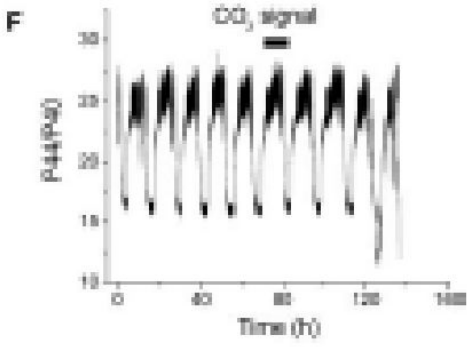




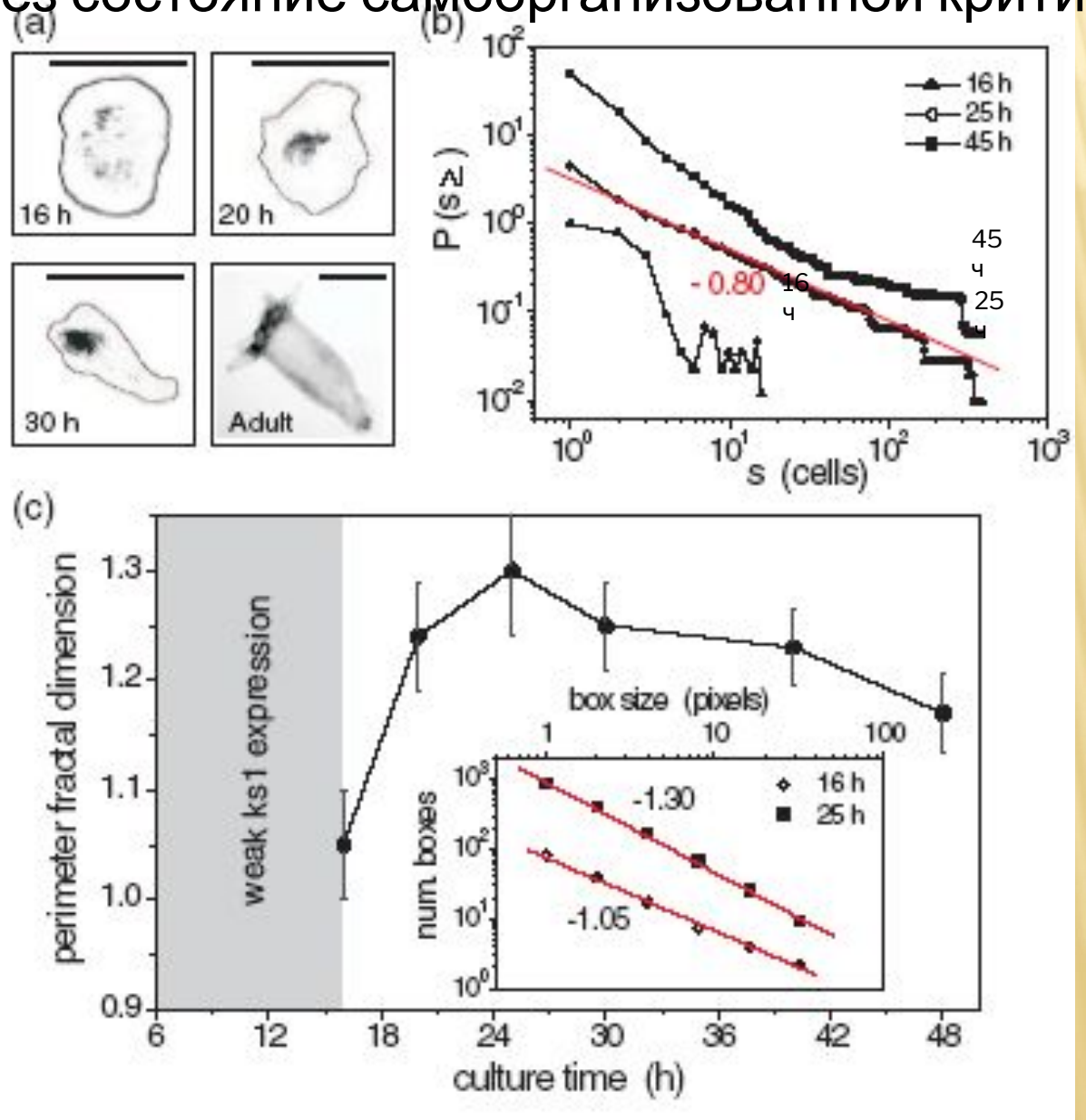








В ходе регенерации гидры паттерны экспрессии головного гена ks1
проходят через состояние самоорганизованной критичности



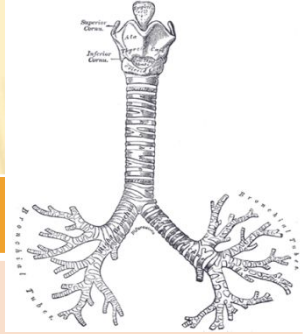
Частота встречаемости пятен определенного размера

ФРАКТАЛЫ

Fractus, лат. «дробленный» «сломанный».

-сложная геометрическая фигура, обладающая свойством *самоподобия*, т.е. составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре в целом.

Применение



область	пример
в информатике	сжатие изображений
стахостические фракталы	траектории броуновского движения на плоскости и пространстве*
в физике	моделирование нелинейных процессов (турбулентное течение жидкости, сл. процессы диффузии-адсорбции)
в биологии	моделирование популяций и для описания систем внутренних органов (бронхиальное древо, …).
в IT-технологии	децентрализация сети в системе Netsukukee
в архитектуре	конструктивизм, барокко, готика
в изобразительном искусстве	фрактальная монотипия: получение изображение случайного фрактала
в литературе	Произведения, обладающие текстуальной, структурной или семантической фрактальной природой

Историческая справка

Бенуа Мандельброт (1980)

С. Кранц: Р. Брукс, Дж. Мателски (1978)

Дж. Хаббард (1976)- Ф.Кочмен

Ф. Рисс (1952)

Людвиг Прандтль (1904)
Лоренц
Пьер Симон Лаплас
Гельмгольц
Кирхгофф
Рэлей
Ляв
Лэмб
Бассет

«Интегрирование встречается и у Архимеда, дифференцирование у Паскаля и Ферма, связь между обеими была известна Барроу. Ньютон изобрел ряды Тейлора- основное орудие анализа».

В.И. Арнольд

Бенуа Мандельброт

1924 – 14.10.2010

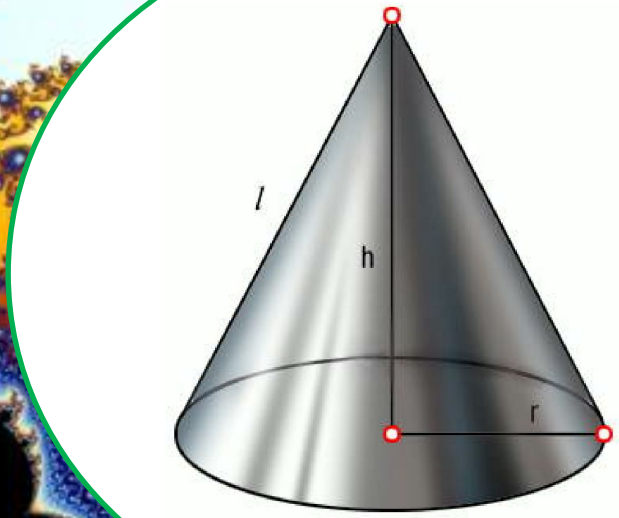
Wolf Foundation

- С/х
- Химия
- Математика
- Медицина
- Физика
- Искусство

Мать: Белла Лурие

Отец: Карл Мандельброт

Дядя: Шолем


l
h
r

BUGAGA.RU

?

«Природа демонстрирует совсем другой уровень сложности»

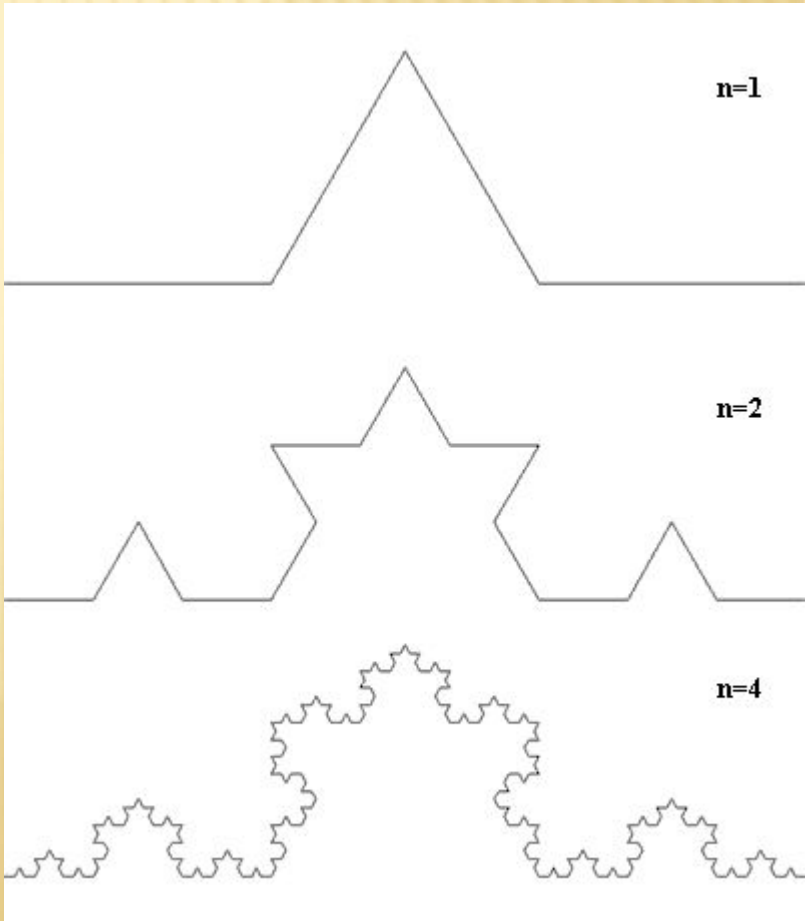
Мандельброт Б., «Фрактальная геометрия природы», 1975 год.

Необходимые условия для фрактальной фигуры:

- 1) нетривиальная структура на всех масшатабах, повышение масштаба для фрактальных фигур не ведет к упрощению структуры;
- 2) является самоподобной или приближенно самоподобной;
- 3) обладает дробной метрической размерностью или метрической размерностью, превосходящей топологическую.

Пример получения фрактальных кривых на плоскости

- 1) задать произвольную ломаную с конечным числом звеньев;
- 2) заменить в ней каждый отрезок генератором (точнее, ломаной, подобной генератору);
- 3) в получившейся ломаной вновь заменить каждый отрезок генератором.



- Размерность - степень, в которую возводится изменение линейного масштаба.

$n = k^d$, где d не является целым числом.

- Ковер Серпинского: $8 = 3^d$

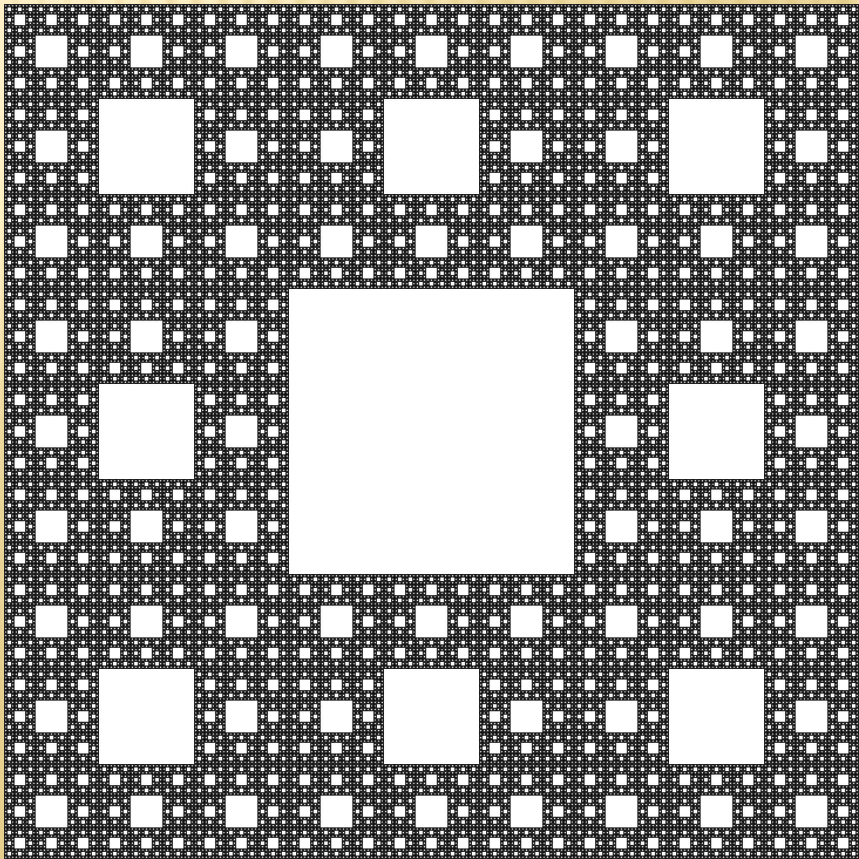
$$d = \log_3 8 = \frac{ln8}{ln3} \sim 1{,}89$$

S фигуры на шаге N:

$$S = \left(\frac{8}{9}\right)^N$$

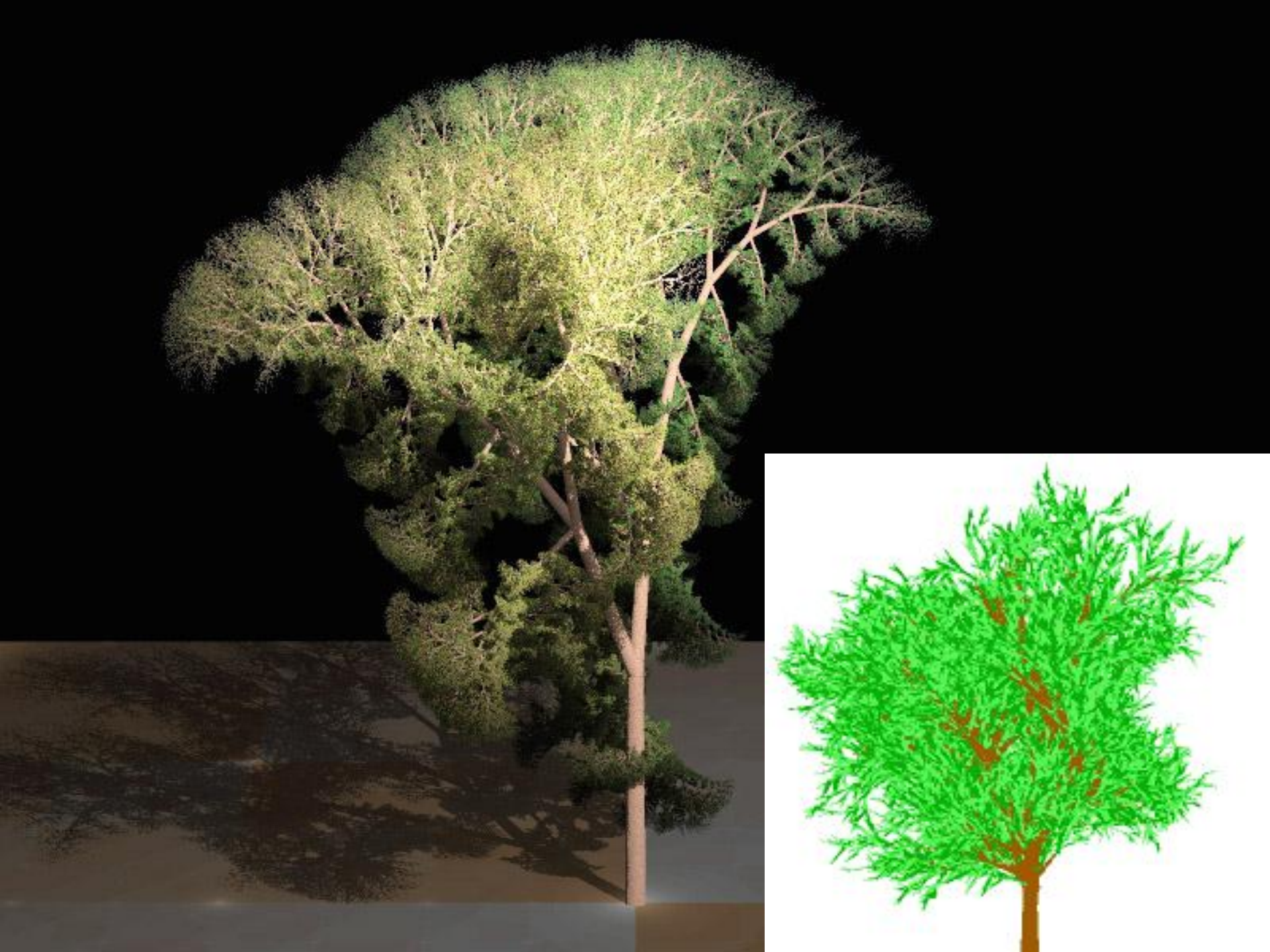
$P = \infty$
$S = 0$

Мера Минковского



Фрактал - это

-множество точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность.

Под микроскопом он открыл, что на блохе
Живёт блоху кусающая блошка;
На блошке той блошинка-крошка,
В блошинку же вонзает зуб сердито
Блошиночка, и так ad infinitum.

(Джонатан Свифт)