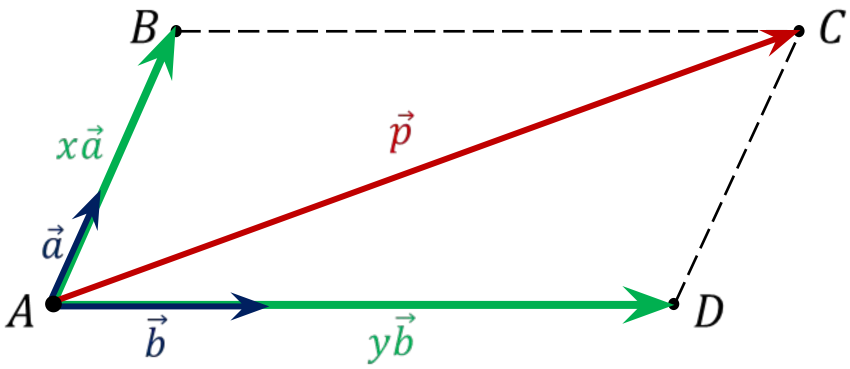
Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Вектор $\vec{p}$ разложен по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
x, y – коэффициенты разложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Теорема. На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

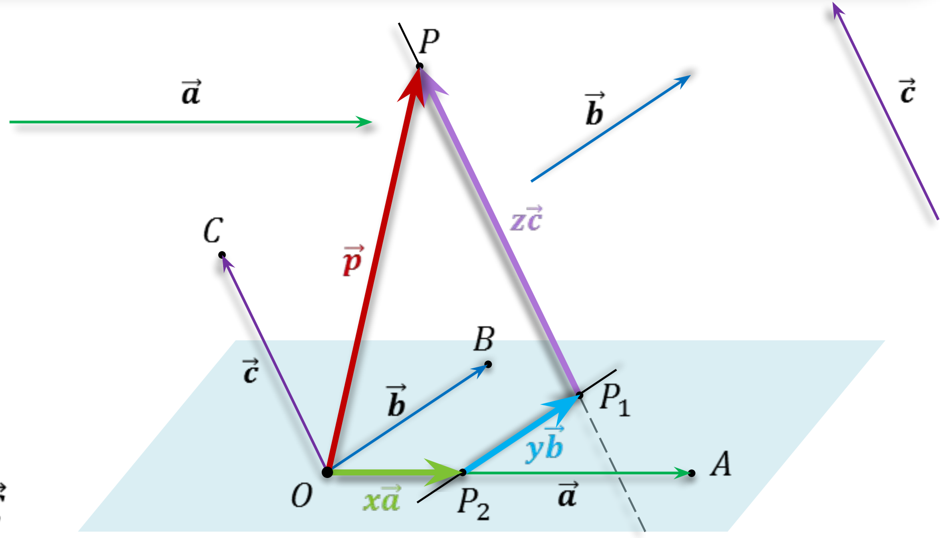
Вектор $\vec{p}$ разложен по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
x, y и z – коэффициенты разложения.

$$\boxed{\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}}$$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.



1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные
2. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$
3. $PP_1 \parallel OC$
4. $P_1P_2 \parallel OB$
5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$
6. $\overrightarrow{OP_2} \parallel \overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{P_2P_1} \parallel \overrightarrow{OB}$ $\quad \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{OC}$

   $\overrightarrow{OP_2} = x\overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{P_2P_1} = y\overrightarrow{OB}$ $\quad \overrightarrow{P_1P} = z\overrightarrow{OC}$
7. $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

   $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$$
-\begin{array}{l}
\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \\
\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} \\
\hline
\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}
\end{array}
$$

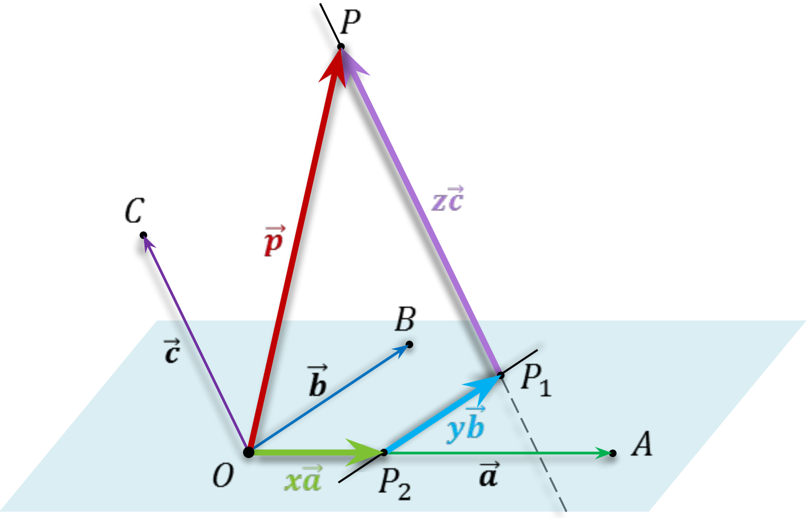
Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.

1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные
2. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$
3. $PP_1 \parallel OC$
4. $P_1P_2 \parallel OB$
5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$
6. $\overrightarrow{OP_2} \parallel \overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{P_2P_1} \parallel \overrightarrow{OB}$ $\quad \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{OC}$

   $\overrightarrow{OP_2} = x\overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{P_2P_1} = y\overrightarrow{OB}$ $\quad \overrightarrow{P_1P} = z\overrightarrow{OC}$
7. $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

   $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$



$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

$x - x_1 = 0$ $\quad y - y_1 = 0$ $\quad z - z_1 = 0$

!? $x = x_1$ $\quad y = y_1$ $\quad z = z_1$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.

1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные

2. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

3. $PP_1 \parallel OC$

4. $P_1P_2 \parallel OB$

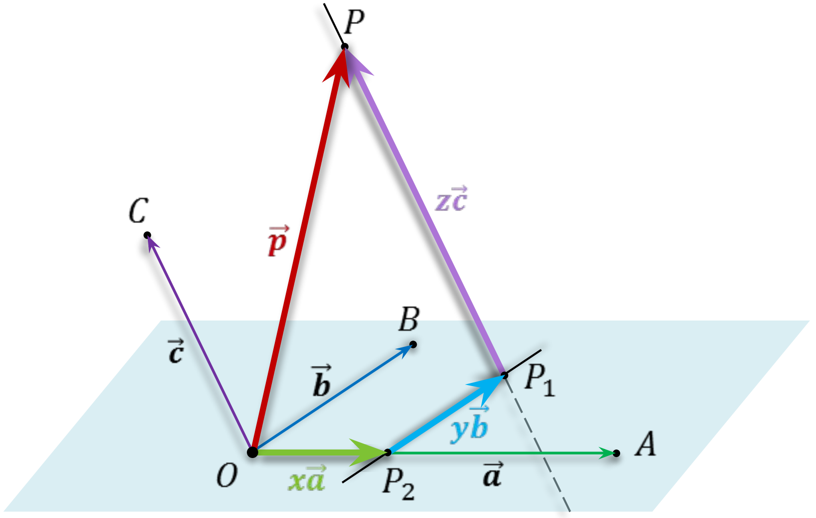
5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

6. $\overrightarrow{OP_2} \parallel \overrightarrow{OA}$ $\quad$ $\overrightarrow{P_2P_1} \parallel \overrightarrow{OB}$ $\quad$ $\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{OC}$

   $\overrightarrow{OP_2} = x\overrightarrow{OA}$ $\quad$ $\overrightarrow{P_2P_1} = y\overrightarrow{OB}$ $\quad$ $\overrightarrow{P_1P} = z\overrightarrow{OC}$

7. $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

   $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$



x, y, z определяются единственным образом

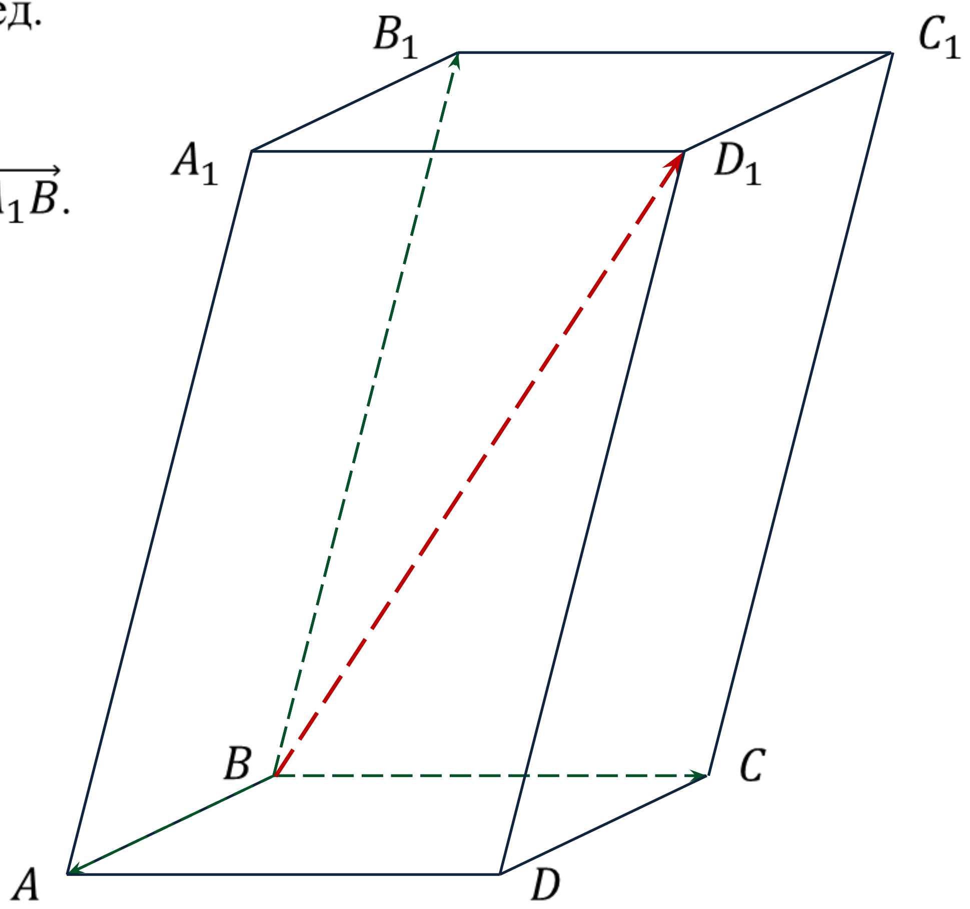
Что и требовалось доказать.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.
Разложить:
а) вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$;
б) вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{BD_1}$

$x = 1$ $\quad y = 1$ $\quad z = 1$



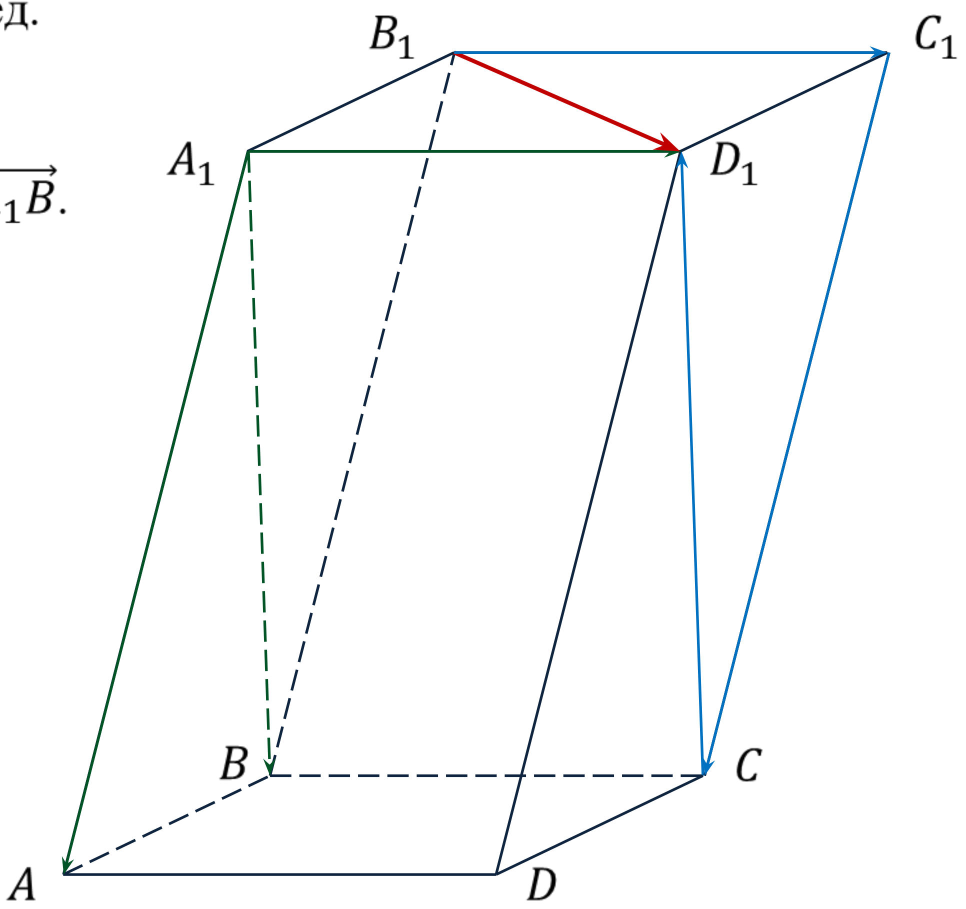
Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.
Разложить:
а) вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$;
б) вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.

Решение.

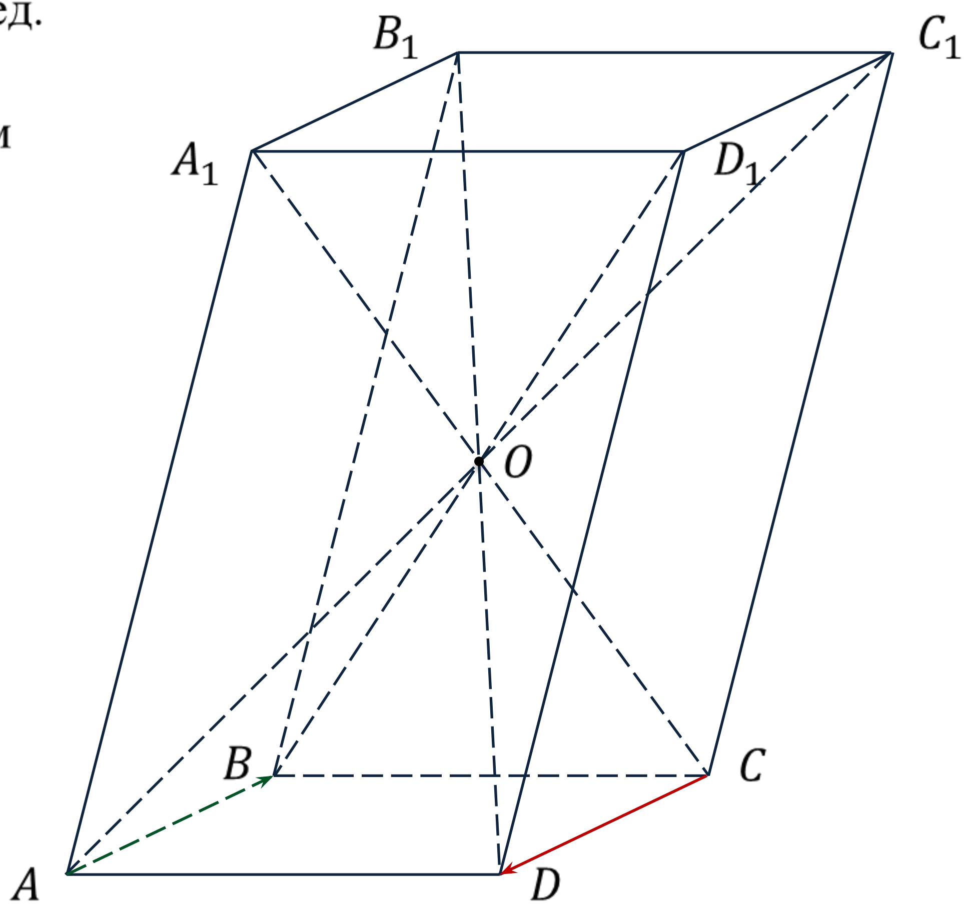
а) $\overrightarrow{BD_1} = \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{x=1} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{y=1} + \underbrace{\overrightarrow{BB_1}}_{z=1}$

б) $\overrightarrow{B_1D_1}$

$= \underbrace{\overrightarrow{A_1D_1}}_{x=1} + \underbrace{\overrightarrow{A_1A}}_{y=1} - \underbrace{\overrightarrow{A_1B}}_{z=-1}$



Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. O – точка пересечения диагоналей. Разложить векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Решение.

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = 0 \cdot \overrightarrow{AA_1} + (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$$

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. O – точка пересечения диагоналей. Разложить векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение.

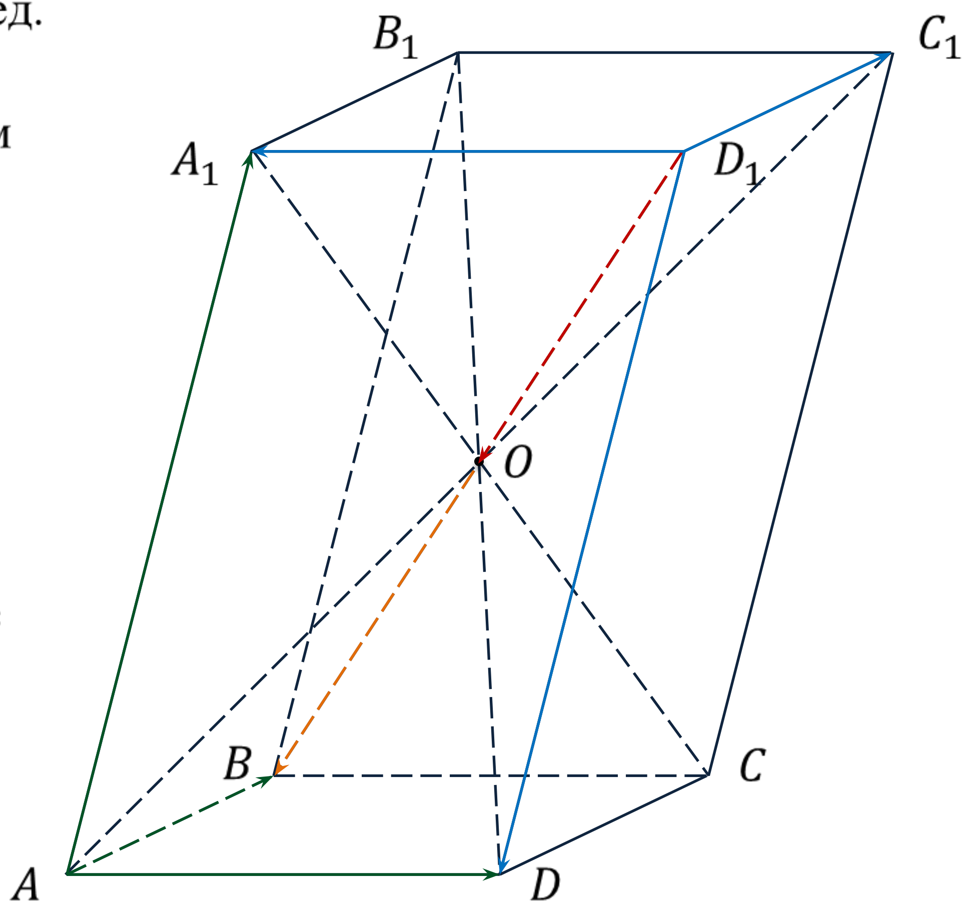
$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = 0 \cdot \overrightarrow{AA_1} + (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$$

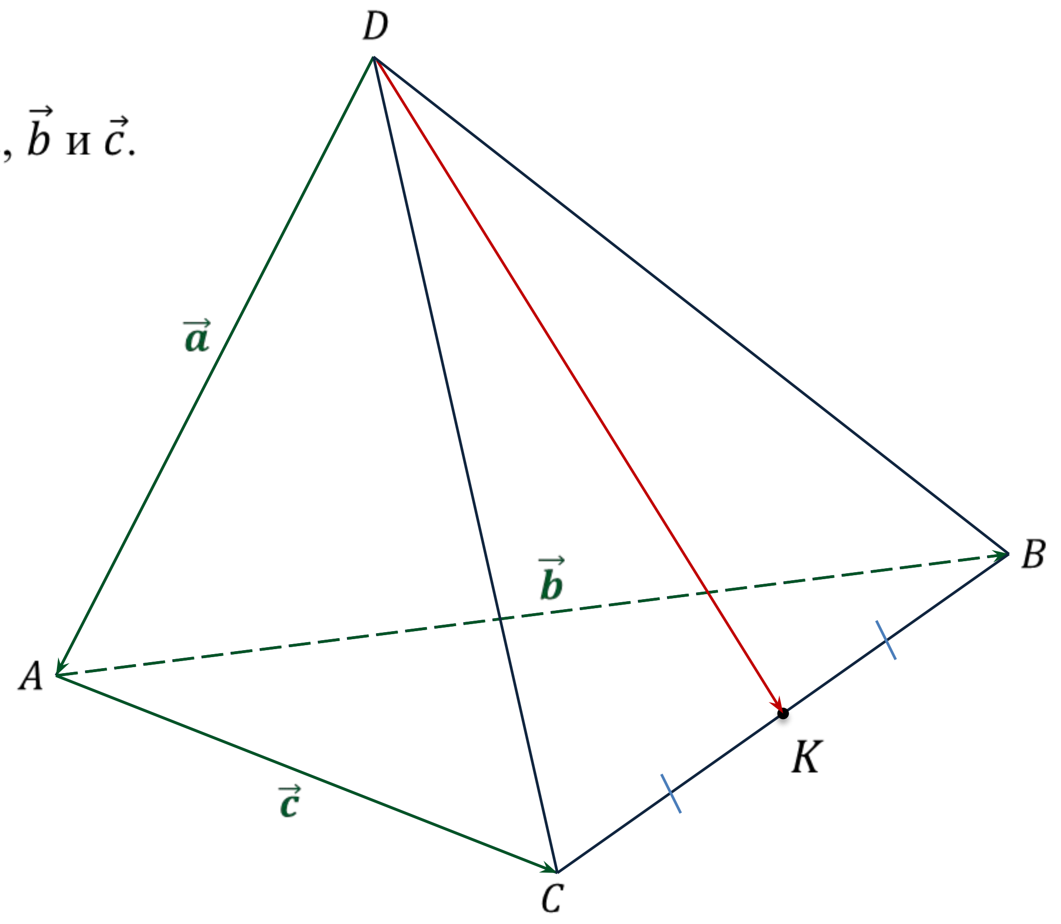
$$\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD})\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD}$$



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.
K – середина ребра BC.
Разложить векторы $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

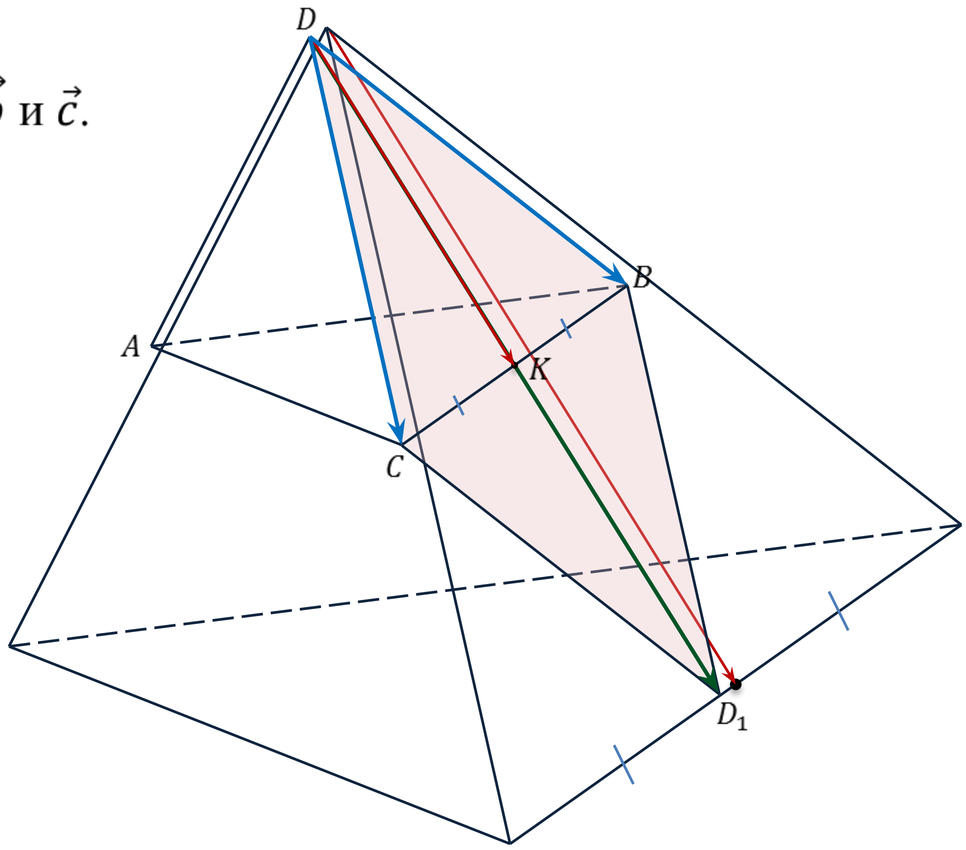


Задача. $ABCD$ – тетраэдр.
K – середина ребра BC.
Разложить векторы $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Решение.

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)$$



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.

K – середина ребра BC.

Разложить векторы $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Решение.

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$$

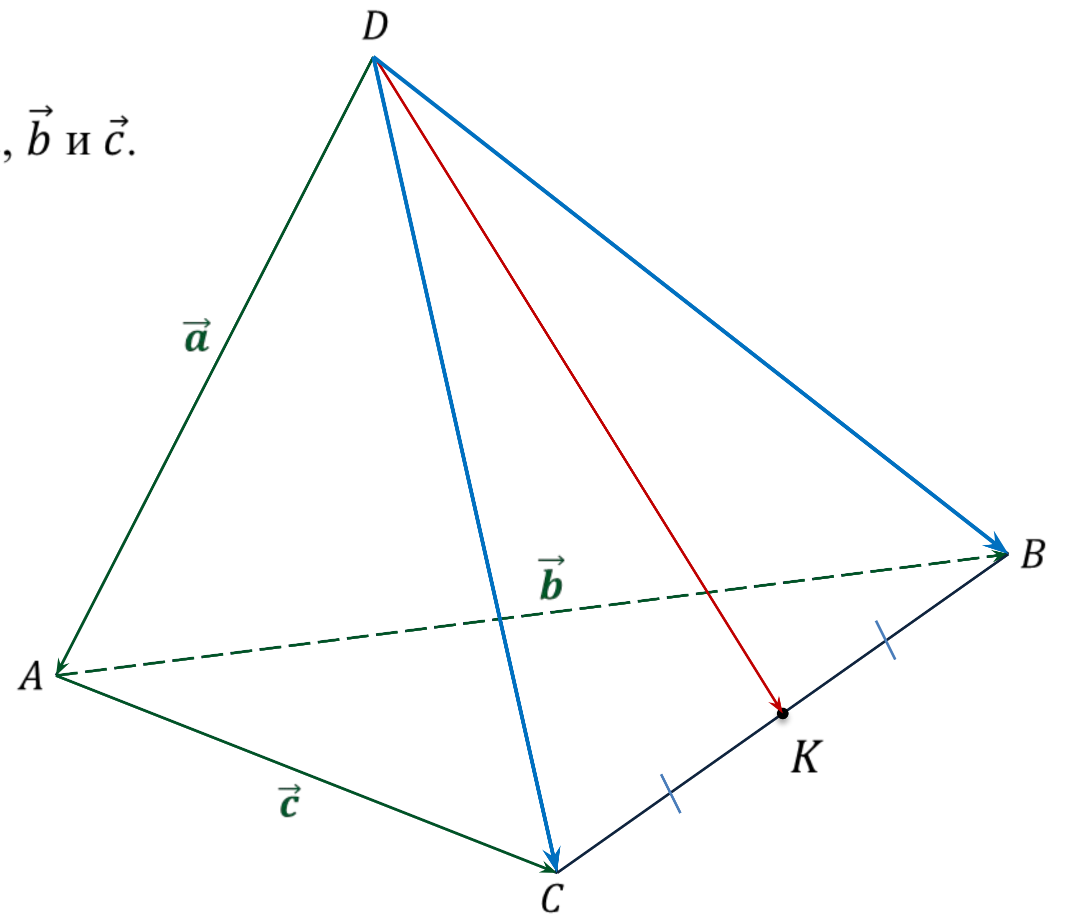
$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

$$\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{DK} = 1\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



Разложение вектора по трём некомпланарным векторам