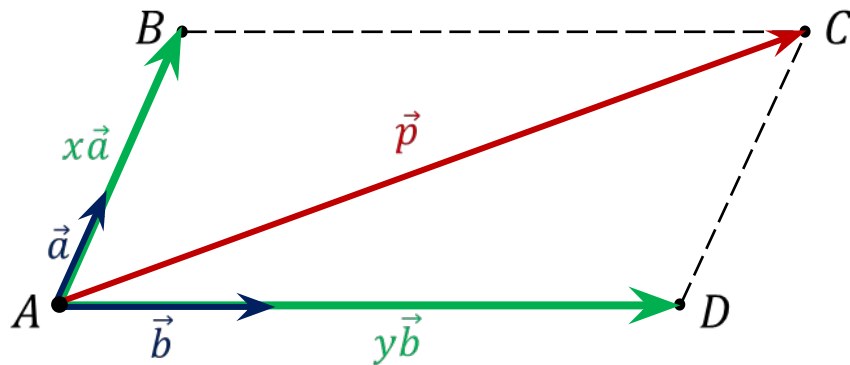


Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Вектор \vec{p} разложен по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} .
 x, y — коэффициенты разложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Теорема. На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Вектор \vec{p} разложен по некопланарным векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .
 x , y и z — коэффициенты разложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некопланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некопланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные
- $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OP} = \vec{p}$

- $PP_1 \parallel OC$

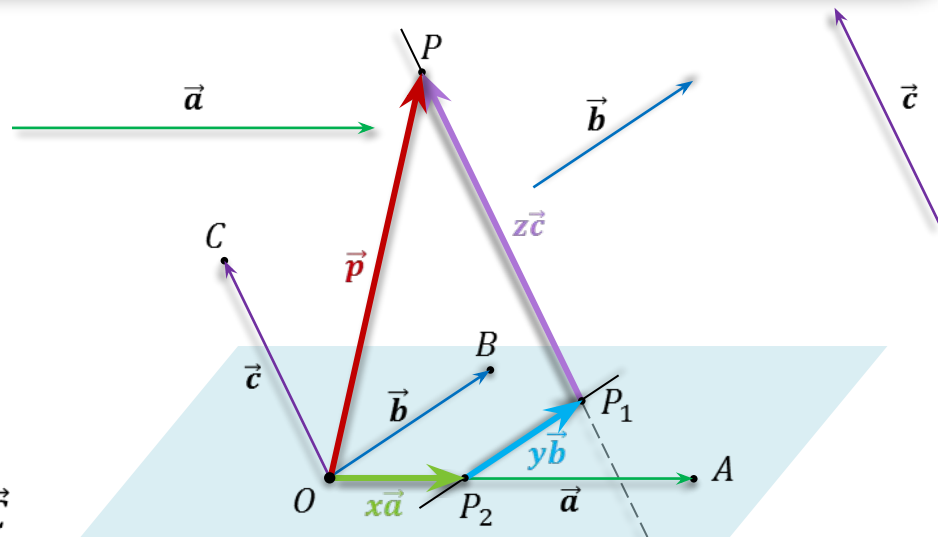
- $P_1P_2 \parallel OB$

- $\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| $\vec{OP}_2 \parallel \vec{OA}$ | $\vec{P}_2P_1 \parallel \vec{OB}$ | $\vec{P}_1P \parallel \vec{OC}$ |
| $\vec{OP}_2 = x\vec{OA}$ | $\vec{P}_2P_1 = y\vec{OB}$ | $\vec{P}_1P = z\vec{OC}$ |

- $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$



$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$-\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некопланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные
- $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OP} = \vec{p}$

- $PP_1 \parallel OC$

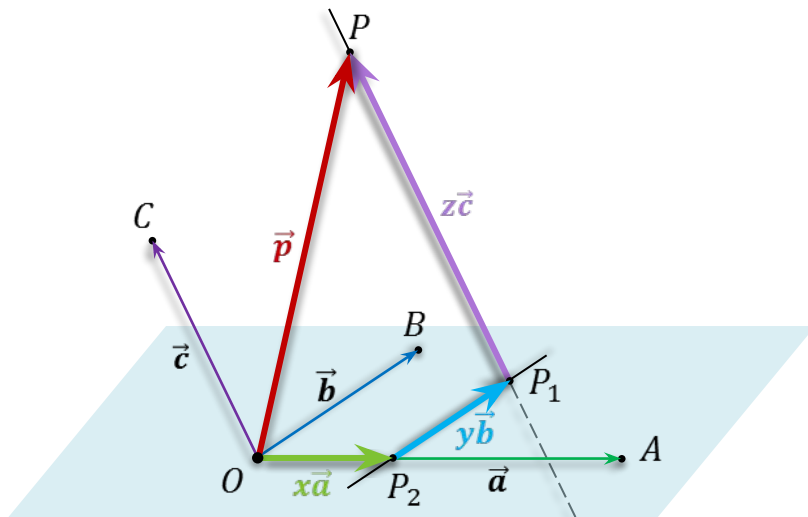
- $P_1P_2 \parallel OB$

- $\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2\vec{P}_1 + \vec{P}_1\vec{P}$

- $\vec{OP}_2 \parallel \vec{OA} \quad \vec{P}_2\vec{P}_1 \parallel \vec{OB} \quad \vec{P}_1\vec{P} \parallel \vec{OC}$
 $\vec{OP}_2 = x\vec{OA} \quad \vec{P}_2\vec{P}_1 = y\vec{OB} \quad \vec{P}_1\vec{P} = z\vec{OC}$

- $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$



$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

$$x - x_1 = 0 \quad y - y_1 = 0 \quad z - z_1 = 0$$

!?

$$x = x_1 \quad y = y_1 \quad z = z_1$$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём некопланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство.

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные
- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

- $PP_1 \parallel OC$

- $P_1P_2 \parallel OB$

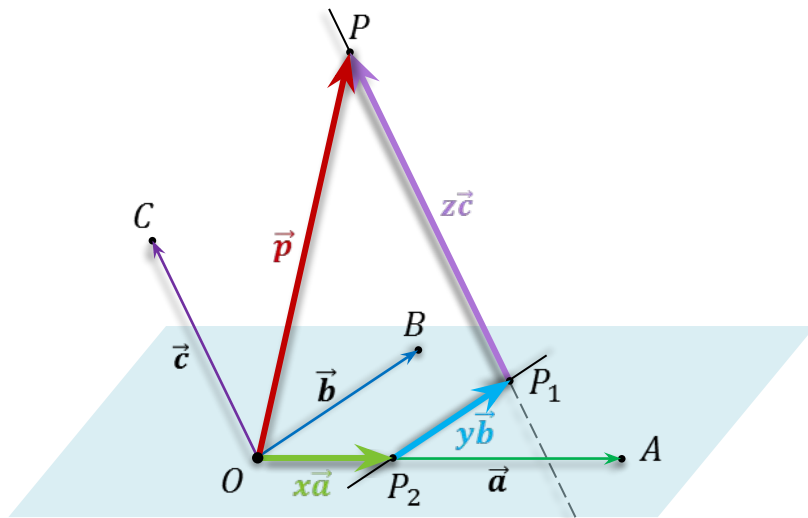
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

- $\overrightarrow{OP_2} \parallel \overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{P_2P_1} \parallel \overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{OC}$
 $\overrightarrow{OP_2} = x\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{P_2P_1} = y\overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{P_1P} = z\overrightarrow{OC}$

- $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Что и требовалось доказать.



x, y, z определяются единственным образом

Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

Разложить:

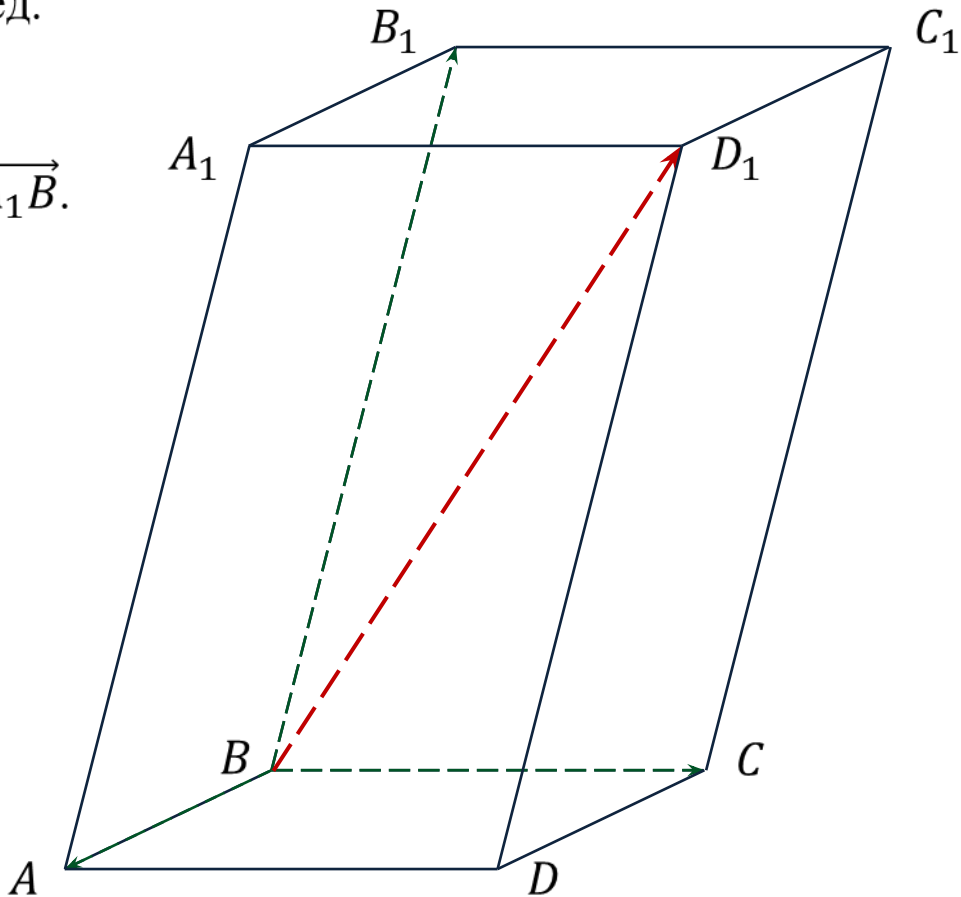
а) вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} и $\overrightarrow{BB_1}$;

б) вектор $\overrightarrow{B_1 D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1 D_1}$, $\overrightarrow{A_1 A}$ и $\overrightarrow{A_1 B}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{BD_1}$

$$x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$$



Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед.

Разложить:

а) вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} и $\overrightarrow{BB_1}$;

б) вектор $\overrightarrow{B_1 D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1 D_1}$, $\overrightarrow{A_1 A}$ и $\overrightarrow{A_1 B}$.

Решение.

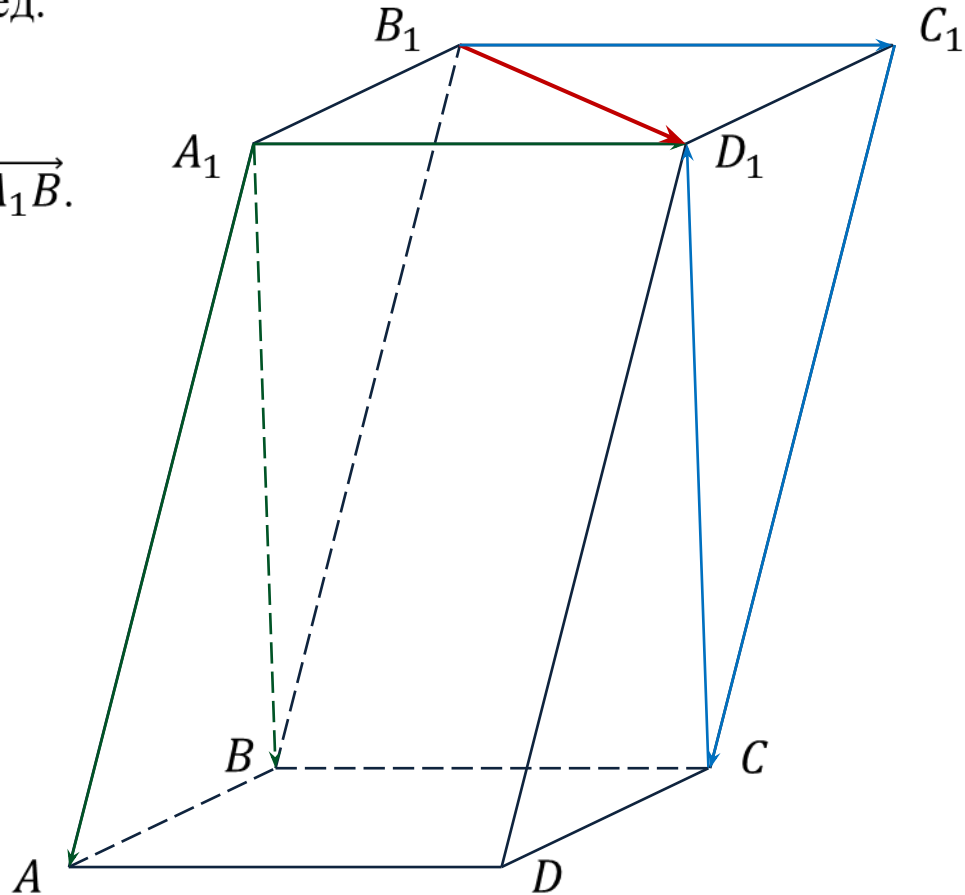
$$\text{а) } \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$$

$x=1 \quad y=1 \quad z=1$

$$\text{б) } \overrightarrow{B_1 D_1}$$

$$= \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{A_1 B}$$

$x=1 \quad y=1 \quad z=-1$



Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

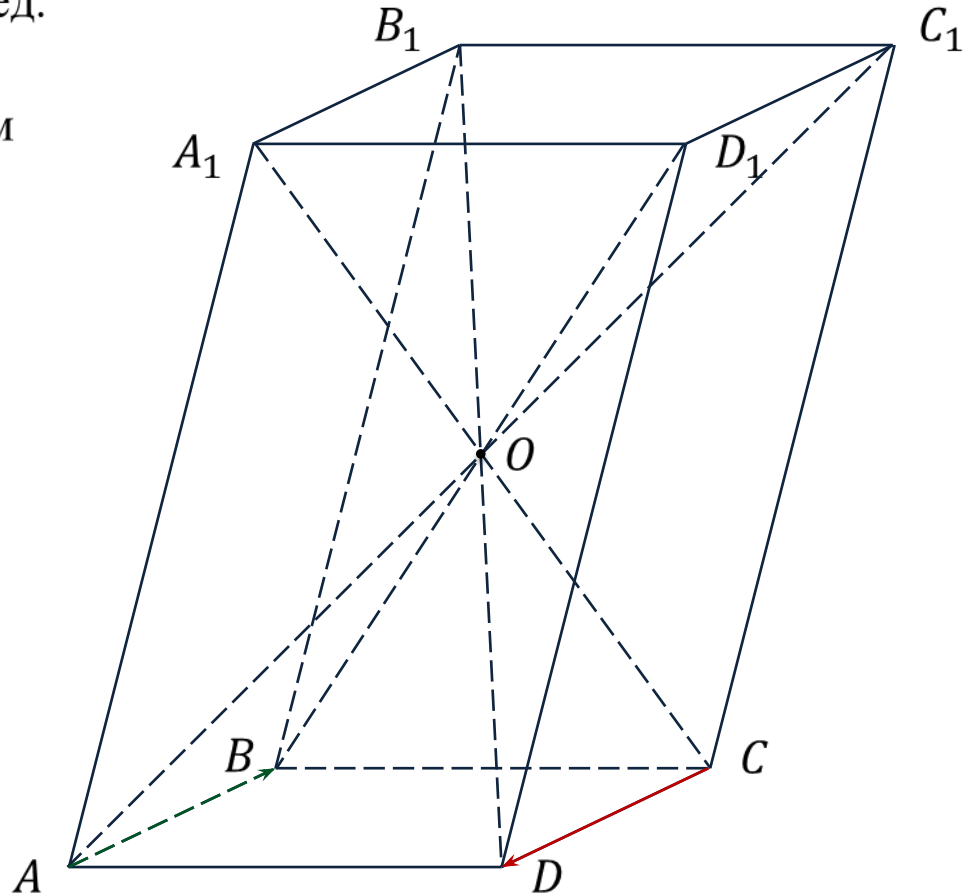
O – точка пересечения диагоналей.

Разложить векторы \overrightarrow{CD} и $\overrightarrow{D_1 O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .

Решение.

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{AA_1} + (-\mathbf{1}) \cdot \overrightarrow{AB} + \mathbf{0} \cdot \overrightarrow{AD}$$



Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

O – точка пересечения диагоналей.

Разложить векторы \overrightarrow{CD} и $\overrightarrow{D_1 O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .

Решение.

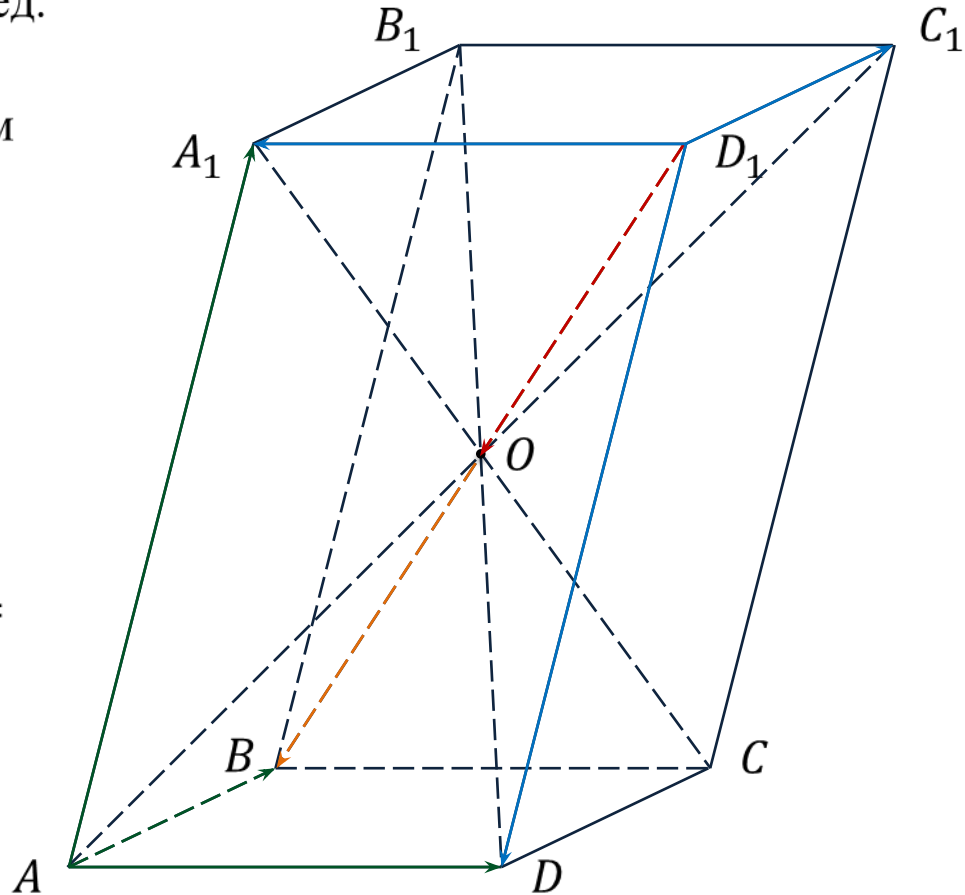
$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = 0 \cdot \overrightarrow{AA_1} + (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{D_1 O} = \frac{1}{2} \overrightarrow{D_1 B} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{D_1 D} + \overrightarrow{D_1 C_1} + \overrightarrow{D_1 A_1}) =$$

$$= \frac{1}{2} (-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD})) =$$

$$= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{1}{2}\right) \overrightarrow{AD}$$

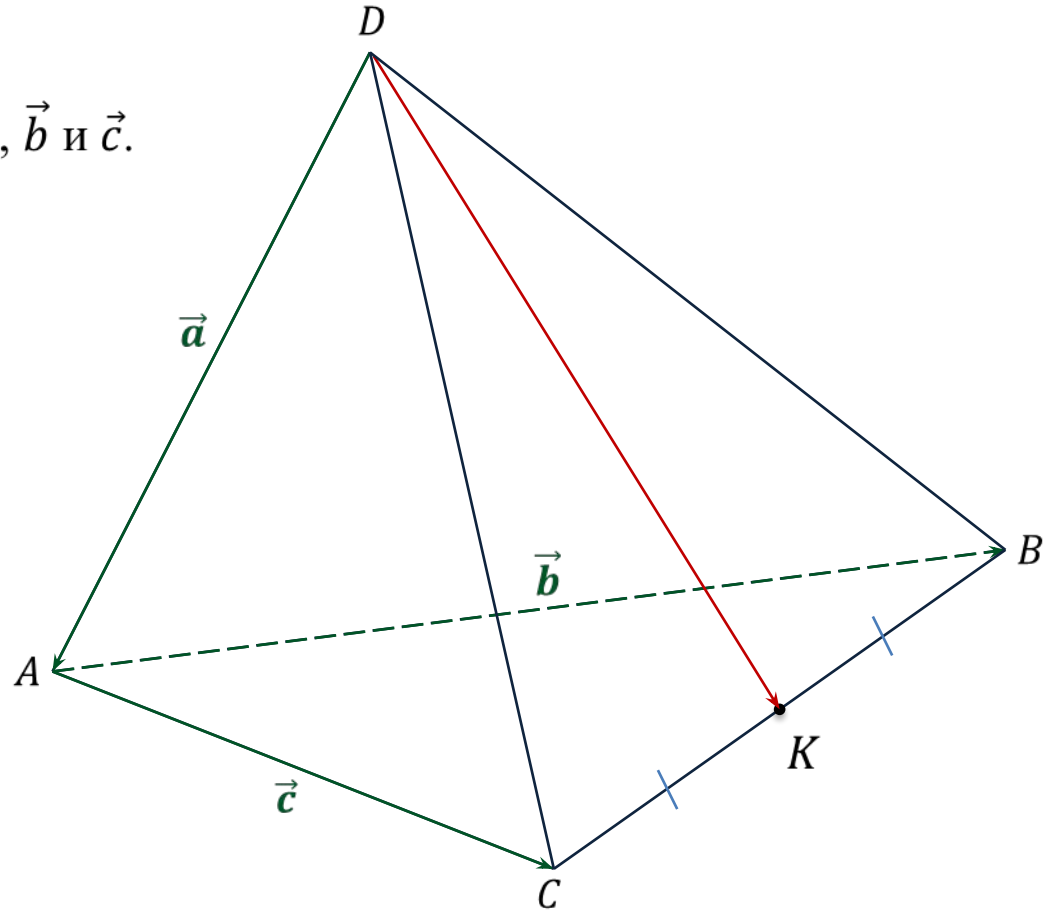


Задача. $ABCD$ – тетраэдр.

K – середина ребра BC .

Разложить векторы \overrightarrow{DK} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.

K – середина ребра BC .

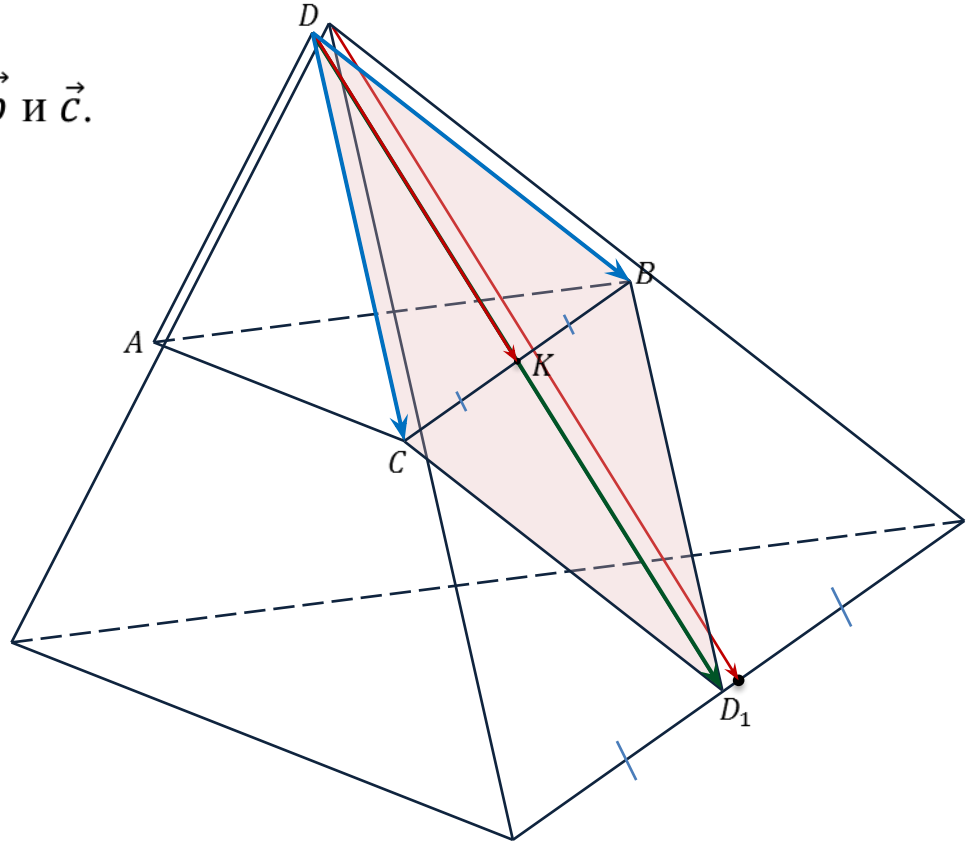
Разложить векторы \overrightarrow{DK} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Решение.

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DD_1}$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.

K – середина ребра BC .

Разложить векторы \overrightarrow{DK} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Если $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Решение.

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DD_1}$$

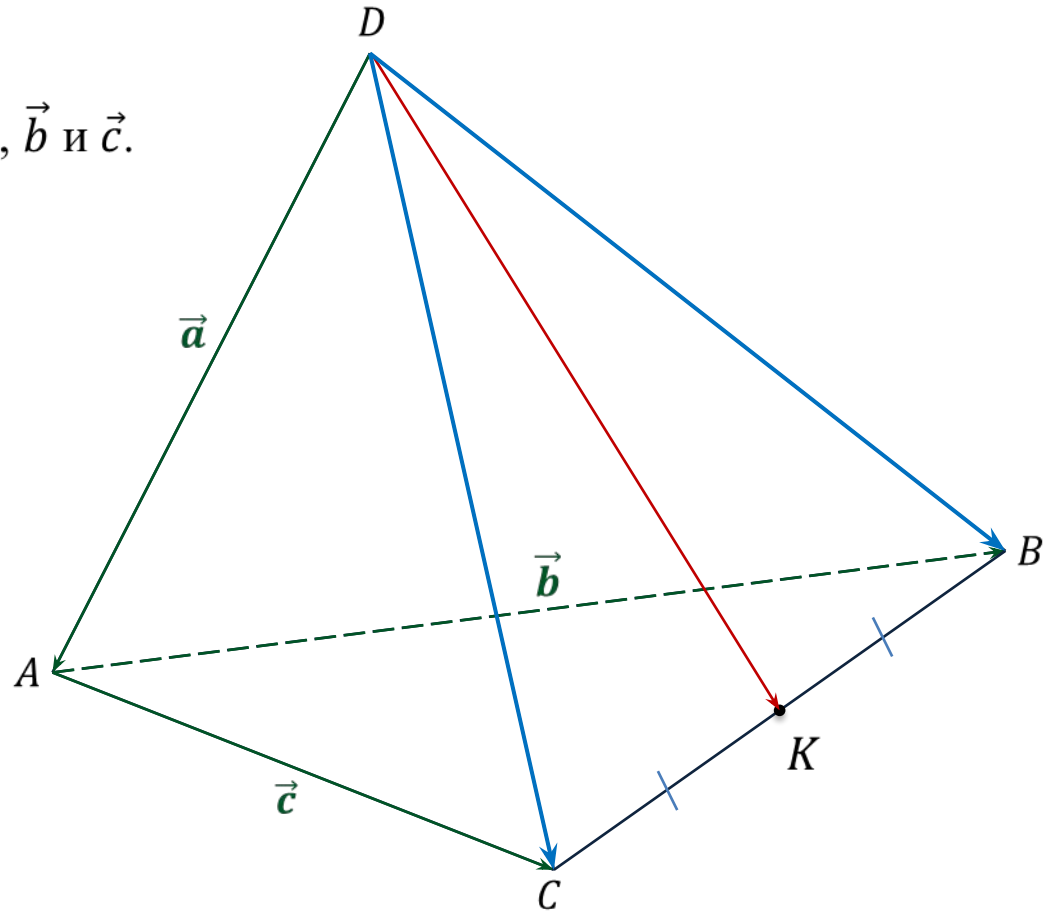
$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

$$\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{DK} = 1\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



Разложение вектора по трём некопланарным векторам