



# **22. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**



## 22.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

*Комплексным числом называется  
выражение вида*

$$z = x + i \cdot y$$

*где  $x$  и  $y$  – действительные числа,*

*$i$  – мнимая единица:  $i^2 = -1$*



*Число  $x$  называется действительной  
частью числа  $z$ :*

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

*Число  $y$  называется мнимой  
частью числа  $z$ :*

$$y = \operatorname{Im}(z)$$



Действительное число  $x$  является частным случаем комплексного числа

$$z = x + i \cdot y$$

при  $y=0$ .

Комплексные числа вида  $z = x + i \cdot y$  не являющиеся действительными, т.е. при

$$y \neq 0$$

называются мнимыми, а при

$$x = 0, \quad y \neq 0$$

называются чисто мнимыми.



## *Комплексные числа*

$$z = x + i \cdot y \quad z = x - i \cdot y$$

*называются сопряженными*

## *Комплексные числа*

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1 \quad z_2 = x_2 + i \cdot y_2$$

*называются равными, если равны их действительные и мнимые части:*

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$



*Арифметические действия  
над множеством  
комплексных чисел*



*Сумма (разность) комплексных чисел:*

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i \cdot (y_1 \pm y_2)$$



*Произведение комплексных чисел:*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$



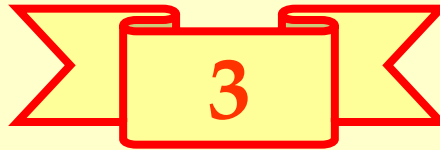
Поскольку

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + x_2 \cdot i \cdot y_1 - y_1 \cdot y_2 = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

Например:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = \\ &= (0 - 1) + i \cdot (0 + 0) = -1 \end{aligned}$$





*Деление комплексных чисел:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$



Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} \cdot \frac{x_2 - i \cdot y_2}{x_2 - i \cdot y_2} = \\ &= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$



# *Пример.*

*Найти сумму, разность, произведение  
и частное комплексных чисел:*

$$z_1 = 12 + 5 \cdot i$$

$$z_2 = 3 - 4 \cdot i$$



# Решение



$$z_1 + z_2 = 12 + 5 \cdot i + 3 - 4 \cdot i = 15 + i$$

$$z_1 - z_2 = 12 + 5 \cdot i - (3 - 4 \cdot i) = 9 + 9 \cdot i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (12 + 5 \cdot i) \cdot (3 - 4 \cdot i) = 36 + 15 \cdot i - 48 \cdot i + 20 = \\ &= 56 - 33 \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} = \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} \cdot \frac{3 + 4 \cdot i}{3 + 4 \cdot i} = \\ &= \frac{36 + 15 \cdot i + 48 \cdot i - 20}{9 + 16} = \frac{16 + 63 \cdot i}{25} = 0.64 + 2.52 \cdot i \end{aligned}$$



Если для изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости  $XOY$ .

Плоскость называется комплексной, если любому комплексному числу

$$z = x + i \cdot y$$

ставятся в соответствие точки плоскости  $XOY$ , причем это соответствие взаимно однозначное.

По оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа  $Re z$ , а по оси ординат – мнимая  $Im z$ , поэтому ось  $x$  называется действительной осью, а ось  $y$  – мнимой.

