22. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

22.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + i \cdot y$$

где x и y – действительные числа,

i – мнимая единица: $i^2 = -1$

Число х называется действительной частью числа z:

$x = Re(z)$

Число у называется мнимой частью числа z:

$y = Im(z)$

Действительное число x является частным случаем комплексного числа

$$z = x + i \cdot y$$

при y=0.

Комплексные числа вида $z = x + i \cdot y$

не являющиеся действительными, т.е. при

$$y \neq 0$$

называются мнимыми, а при

$$x = 0, \quad y \neq 0$$

называются чисто мнимыми.

Комплексные числа

$$z = x + i \cdot y \qquad z = x - i \cdot y$$

называются сопряженными

Комплексные числа

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1 \qquad z_2 = x_2 + i \cdot y_2$$

называются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Арифметические действия над множеством комплексных чисел

1

Сумма (разность) комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i \cdot (y_1 \pm y_2)$$

2

Произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Поскольку

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + x_2 \cdot i \cdot y_1 - y_1 \cdot y_2 =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Например:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) =$$

$$= (0 - 1) + i \cdot (0 + 0) = -1$$

3

Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Поскольку

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}=\frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}\cdot\frac{x_2-i\cdot y_2}{x_2-i\cdot y_2}=$$

$$=\frac{(x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2)+i\cdot(x_2\cdot y_1-x_1\cdot y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

Пример.

Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 12 + 5 \cdot i$$
$$z_2 = 3 - 4 \cdot i$$

Решение

$$z_1 + z_2 = 12 + 5 \cdot i + 3 - 4 \cdot i = 15 + i$$

$$z_1 - z_2 = 12 + 5 \cdot i - (3 - 4 \cdot i) = 9 + 9 \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (12 + 5 \cdot i) \cdot (3 - 4 \cdot i) = 36 + 15 \cdot i - 48 \cdot i + 20 =$$

$$= 56 - 33 \cdot i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} = \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} \cdot \frac{3 + 4 \cdot i}{3 + 4 \cdot i} =$$

$$= \frac{36 + 15 \cdot i + 48 \cdot i - 20}{9 + 16} = \frac{16 + 63 \cdot i}{25} = 0.64 + 2.52 \cdot i$$

Если для изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости XOY.

Плоскость называется комплексной, если любому комплексному числу

$$z = x + i \cdot y$$

ставятся в соответствие точки плоскости XOY, причем это соответствие взаимно однозначное.

По оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа *Re z*, а по оси ординат – мнимая *Im z*, поэтому ось х называется действительной осью, а ось у – мнимой.