

Расстояние от точки до плоскости.

Выполнили:

Буканов Никита

Калужин Денис

Коньгин Андрей

Лазаренко Сергей

Цель:

Научиться находить расстояние от точки до плоскости различными методами решения задач.

Задачи

- Рисунок
- Решить задачу методом объёмов
- Решить задачу поэтапно-вычислительным методом
- Решить задачу координатно-векторным методом
- Решить задачу векторным методом

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Задача

Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины рёбер AB , AC и AD , если $AD=2\sqrt{5}$, $AB=AC=10$, $BC=4\sqrt{5}$.

Дано:

$$AD \perp (ABC)$$

$$AC' = C'C$$

$$AB' = B'B$$

$$AD' = D'D$$

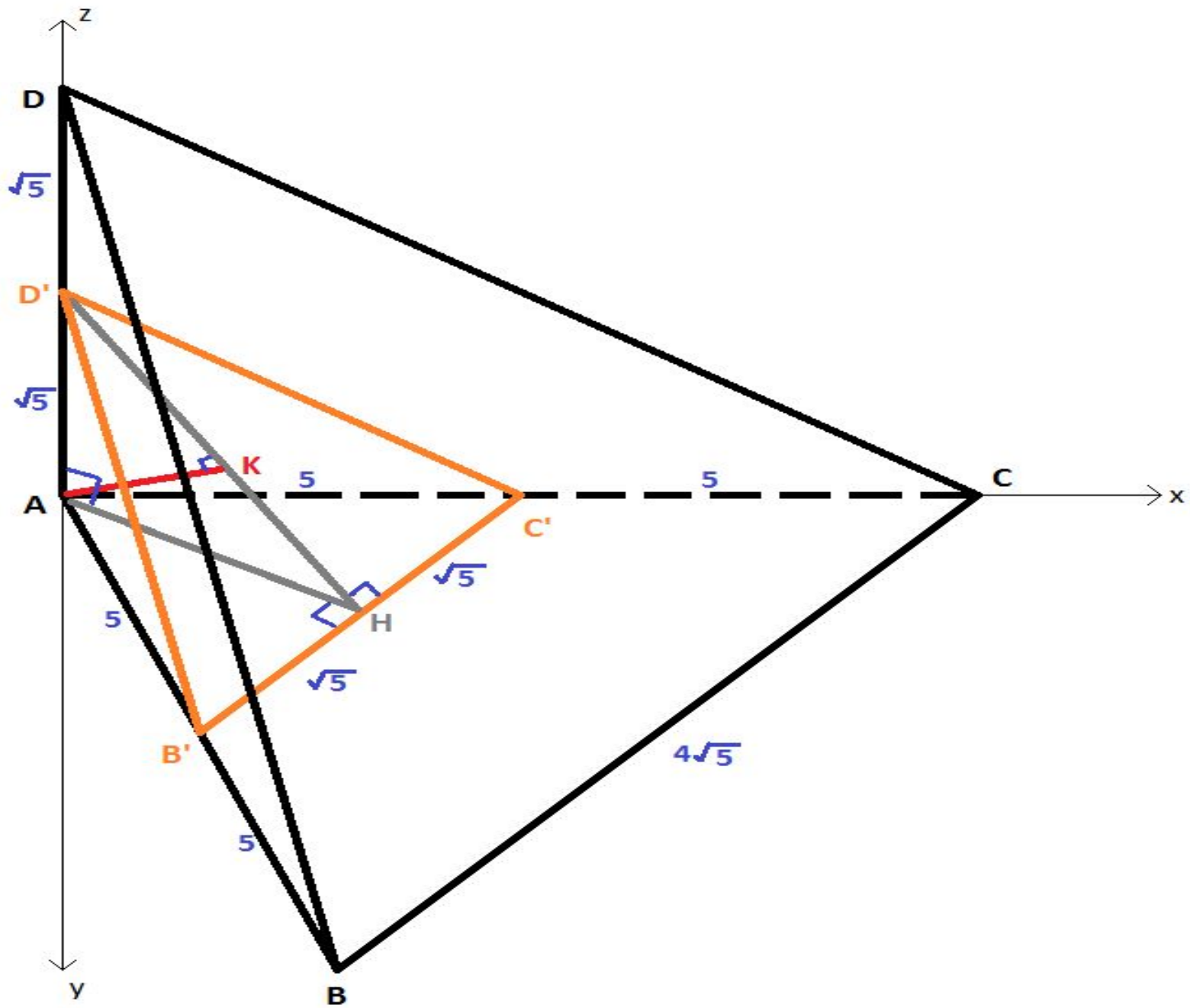
$$AD = 2\sqrt{5}$$

$$AC = AB = 10$$

$$BC = 4\sqrt{5}$$

Найти:

$$\rho(A, (B'C'D')) - ?$$



0

Метод объёмов

Если объём пирамиды $ABCM$ равен V_{DABC} , то расстояние от точки M до плоскости α , содержащий треугольник ABC , вычисляют по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \rho(M, ABC) = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}$$

В общем случае рассматривают равенство объёмов одной фигуры, выраженные двумя независимыми способами.

Решение:

$$V_{AB'C'D'_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$V_{AB'C'D'_2} = Sh = S\rho$ где ρ искомое расстояние

$$V_{AB'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \rho = \frac{5\sqrt{5}}{3} \rho$$

$$\rho = \frac{V_1}{V_2} = 2$$

Поэтапно-вычислительный метод.

Расстояние от точки M до плоскости α :

- 1) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P , лежащей на прямой l , которая проходит через точку M и параллельна плоскости α ;
- 2) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P , лежащей в плоскости β , которая проходит через точку M и параллельна плоскости α .

Решение :

1) Пусть Н – середина В'С'

$V'C' = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{5}$ так как средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны и параллельна ей.

$$V'H = HC' = \sqrt{5}$$

2) $\Delta AB'C'$ – равнобедренный, т. к. $AB' = AC' = \frac{1}{2}AB = 5$

АН – медиана, высота и биссектриса.

3) $AN = \sqrt{AB'^2 - B'H^2} = 2\sqrt{5}$ по теореме Пифагора из $\Delta AB'H$

4) $\Delta B'D'C'$ – равнобедренный $B'D' = D'C' = \sqrt{5^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{30}$

$D'H \perp B'C'$ – т. к. в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой и высотой.

$$AK \perp D'H$$

$$AK \perp (B'C'D')$$

$$AK = \rho(A, B'C'D')$$

$$AK = \frac{ab}{c} = \frac{AN \cdot B'H}{AB'} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2$$

Координатно-векторный метод

Расстояние от точки M до плоскости можно вычислить по формуле

$$P(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{где } M(x_0, y_0, z_0), \text{ плоскость } \alpha \text{ задана}$$

уравнением $ax + by + cz + d = 0$

Решение:

1) Введём прямоугольную систему координат с центром в точке A .

2) $D'(0; 0; \sqrt{5}) \quad A(0; 0; 0)$

3) $B'C' = 2\sqrt{5}$ - по условию $AB' = 5 \quad AC' = 5$

4) Из $\Delta AB'C'$ по теореме косинусов

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB'AC' \cos \alpha$$

$$20 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$-30 = -50 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$B' = (AB' \cos \alpha; AB' \sin \alpha; 0) \quad B'(5; 4; 0)$$

4) Составим уравнение плоскости $B'C'D'$

$$ax + by + cz + d = 0$$

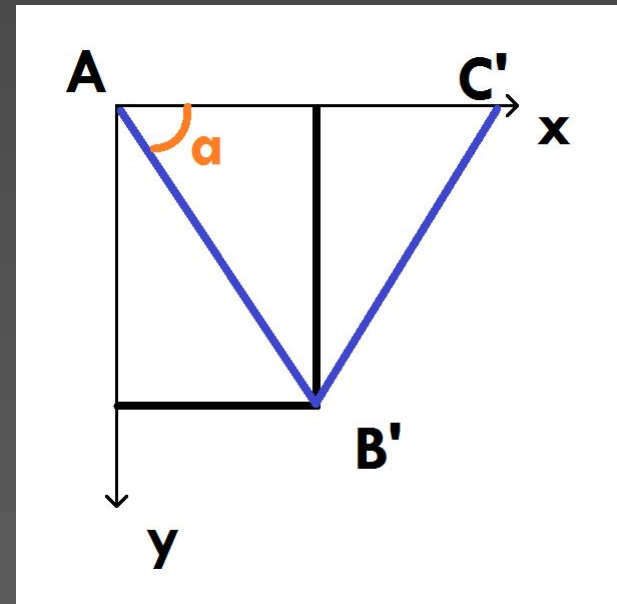
$$\begin{cases} 5a + d = 0 \\ \sqrt{5}c + d = 0 \\ 3a + 4b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = -\frac{d}{5} \\ c = -\frac{\sqrt{5}d}{5} \\ -\frac{3}{5}d + d + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{d}{5} \\ c = -\frac{\sqrt{5}}{5}d \\ b = -\frac{d}{10} \end{cases}$$

$$-\frac{d}{5}x - \frac{d}{10}y - \frac{\sqrt{5}d}{5}z + d = 0 \text{ умножив на } -\frac{10}{d}$$

$$2x + y + 2\sqrt{5}z - 10 = 0$$

5) Искомое расстояние $\rho(A, (B'C'D')) = \frac{|-10|}{\sqrt{4+1+20}} = \frac{10}{5} = 2$



Векторный метод.

$$\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$$

$$\overline{AC'} = 5\bar{a}$$

$$\overline{AB'} = 3\bar{a} + 4\bar{b}$$

$$\overline{D'B'} = 3\bar{a} + 4\bar{b} + \sqrt{5}\bar{c}$$

$$\overline{D'C'} = 5\bar{a} - \sqrt{5}\bar{c}$$

$$\overline{D'K} = x\overline{D'B'} + y\overline{D'C'}$$

$$\overline{AK} = \overline{AD'} + \overline{D'K} = \overline{AD'} + (x\overline{D'B'} + y\overline{D'C'})$$

$$\begin{cases} \overline{AK} \cdot \overline{D'B'} = 0 \\ \overline{AK} \cdot \overline{D'C'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{AD'} \cdot \overline{D'B'} + x\overline{D'B'}^2 + y\overline{D'C'} \cdot \overline{D'B'} = 0 \\ \overline{AD'} \cdot \overline{D'C'} + x\overline{D'B'} \cdot \overline{D'C'} + y\overline{D'C'}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{AD'} \cdot \overline{D'B'} = \sqrt{5}\bar{c} \cdot (3\bar{a} + 4\bar{b} - \sqrt{5}\bar{c}) = -5\bar{c} = -5$$

$$\overline{D'B'} = \sqrt{30}$$

$$\overline{D'C'} = \sqrt{30}$$

$$\begin{cases} -5 + 30x + 20y = 0 \\ -5 + 20x + 30y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 5 \\ 20x + 30y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 + 30x + 20y = 0 \\ -5 + 20x + 30y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 5 \\ 20x + 30y = 5 \end{cases}$$

$$30x + 20y = 20x + 30y$$

$$-10x = -10y$$

$$x = y$$

$$50x = 5$$

$$x = 0,1$$

$$y = 0,1$$

$$\begin{aligned} \overline{AK} &= \sqrt{5}\bar{c} + 0,1\overline{D'B'} + 0,1\overline{D'C'} = \sqrt{5}\bar{c} + 0,3\bar{a} + 0,4\bar{b} - \frac{\sqrt{5}}{10}\bar{c} + \\ &0,5\bar{a} - \frac{\sqrt{5}}{10}\bar{c} = \frac{8\sqrt{5}}{10}\bar{c} + 0,8\bar{a} + 0,4\bar{b} \end{aligned}$$

$$|\overline{AK}| = \sqrt{\frac{320}{100} + \frac{64+16}{100}} = \sqrt{4} = 2$$