# Расстояние от точки до плоскости.


*Выполнили:*

*Буканов Никита*

*Калужин Денис*

*Коныгин Андрей*

*Лазаренко Сергей*

## Цель:

Научиться находить расстояние от точки до плоскости различными методами решения задач.

# Задачи

- Рисунок
- Решить задачу методом объёмов
- Решить задачу поэтапно-вычислительным методом
- Решить задачу координатно-векторным методом
- Решить задачу векторным методом

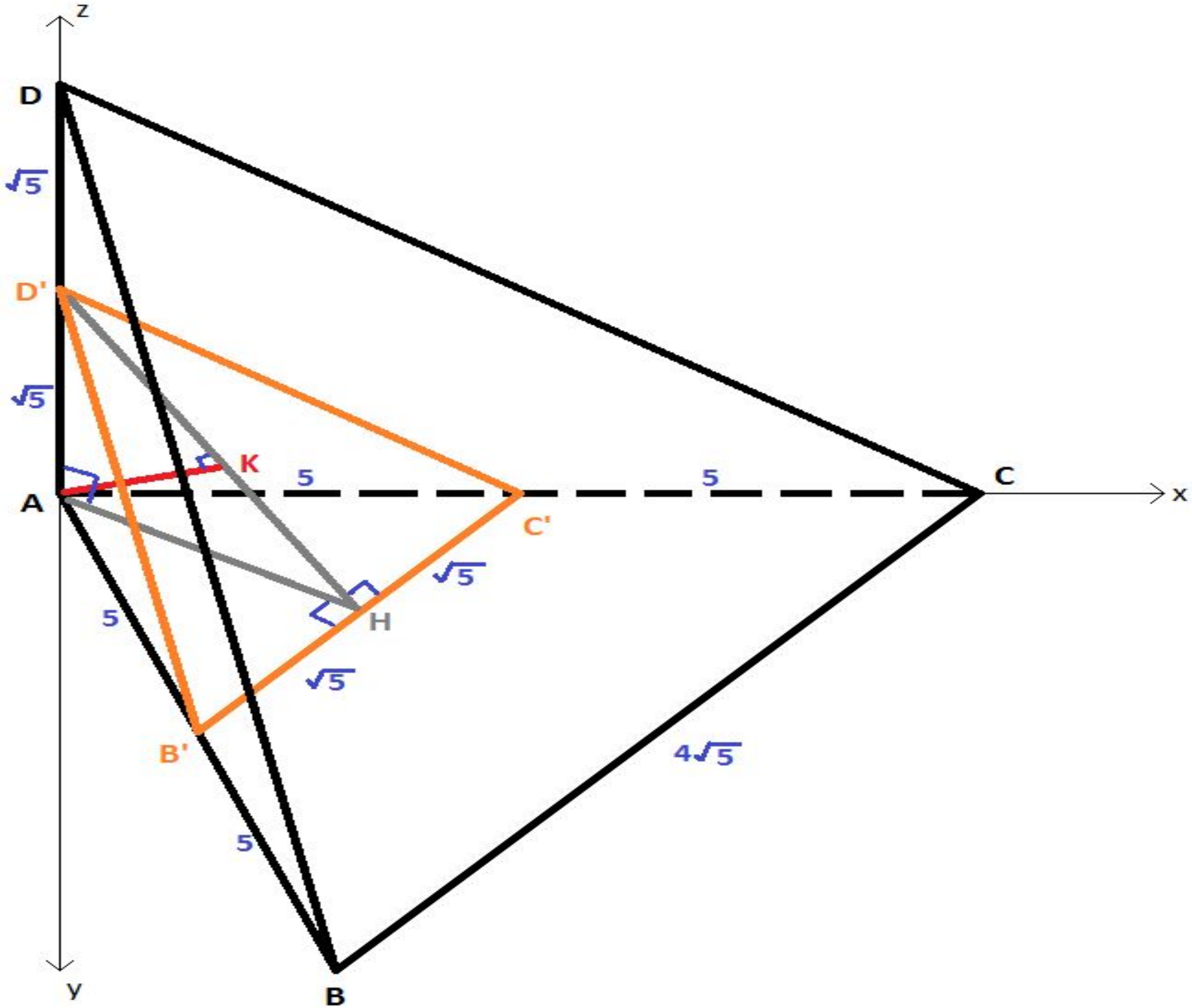
**Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длинна отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.**

# Задача

*Ребро AD пирамиды DABC перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC и AD, если AD=2$\sqrt{5}$, AB=AC=10, BC=4$\sqrt{5}$.*

*Дано:*

| | | |
|---|---|---|
| *AD_I_(ABC)* | AD=2$\sqrt{5}$ | **Найти:** |
| **AC'=C'C** | **AC=AB=10** | ρ(A,(B'C'D') ) - ? |
| **AB'=B'B** | **BC=4$\sqrt{5}$** | |
| **AD'=D'D** | | |



z
D
√5
D'
√5
K
5
5
C
x
A
C'
√5
H
5
√5
B'
4√5
5
y
B

## Метод объёмов

**Если объём пирамиды ABCM равен $V_{DABC}$, то расстояние от точки M до плоскости α, содержащий треугольник ABC, вычисляют по формуле**

$$P(M,\alpha)=\rho(M,ABC)=\frac{3V}{S_{осн}}$$

**В общем случае рассматривают равенство объёмов одной фигуры, выраженные двумя независимыми способами.**

**Решение:**

$$V_{AB'C'D'_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{4}{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$V_{AB'C'D'_2}=Sh=S\rho$ где $\rho$ искомое расстояние

$$V_{AB'C'D'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 5\cdot\rho\cdot=\frac{5\sqrt{5}}{3}\rho$$

$$\rho=\frac{V1}{V2}=2$$

# Поэтапно-вычислительный метод.

Расстояние от точки М до плоскости α:

1) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки Р, лежащей на прямой *l*, которая проходит через точку М и параллельна плоскости α;
2) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки Р, лежащей в плоскости β, которая проходит через точку М и параллельна плоскости α.

Решение :

1) Пусть H – середина B’C’

B’C’=$\frac{1}{2}$BC=$2\sqrt{5}$ так как средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны и параллельна ей.

B’H=HC’=$\sqrt{5}$

2) Δ AB’C’ – равнобедренный, т. к. AB’=AC’=$\frac{1}{2}$AB=5

AH – медиана, высота и биссектриса.

3) AH=$\sqrt{AB'^2 - B'H^2}$=$2\sqrt{5}$ по теореме Пифагора из Δ AB’H

4) Δ B’D’C’ – равнобедренный B’D’=D’C’= $\sqrt{5^2 + \sqrt{5}^2}$= $\sqrt{30}$

D’H $\perp$ B’C’ – т. к. в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой и высотой.

AK $\perp$ D’H AK $\perp$ (B’C’D’) AK=ρ(A,B’C’D’)

AK=$\frac{ab}{c}$=$\frac{AH \cdot B'H}{AB'}$=$\frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5}$=2

## Координатно-векторный метод

Расстояние от точки M до плоскости можно вычислить по формуле

$P(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ где $M(x_0,y_0,z_0)$, плоскость α задана уравнением $ax+by+cz+d=0$

Решение:

1) Введём прямоугольную систему координат с центром в точке A.
2) $D'(0;0;\sqrt{5})$ $A(0;0;0)$
3) $B'C'=2\sqrt{5}$ - по условию $AB'=5$ $AC'=5$
4) Из Δ AB'C' по теореме косинусов

$B'C'^2=AB'^2+AC'^2-2AB'AC'\cos\alpha$

$20=25+25-2\cdot5\cdot5\cdot\cos\alpha$

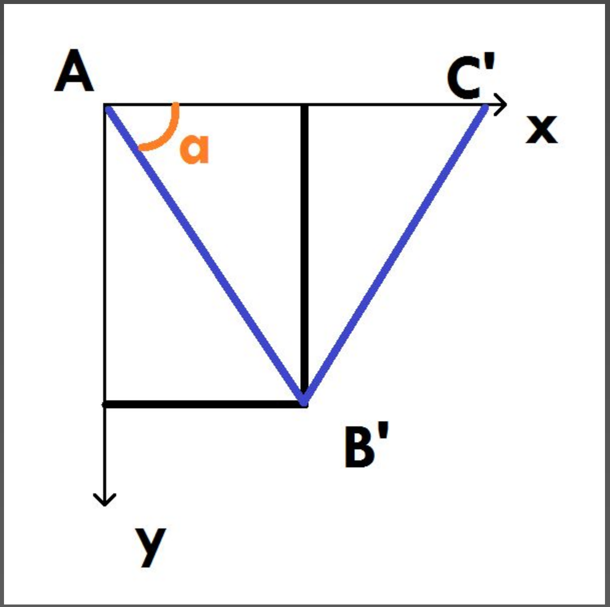
$-30=-50\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$

B'=(AB'cosα; Absinα; 0)      B'(5;4;0)

4) Составим уравнение плоскостиB'C'D'

ax+by+cz+d=0




$$\begin{cases} 5a + d = 0 \\ \sqrt{5}c + d = 0 \\ 3a + 4b + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -\frac{d}{5} \\ c = -\frac{\sqrt{5}d}{5} \\ -\frac{3}{5}d + d + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{d}{5} \\ c = -\frac{\sqrt{5}}{5}d \\ b = -\frac{d}{10} \end{cases}$$

$-\frac{d}{5}$x-$\frac{d}{10}$y-$\frac{\sqrt{5}d}{5}$z+d=0 умножив на -$\frac{10}{d}$

2x+y+2$\sqrt{5}$z-10=0

5) Искомое расстояние ρ(A,(B'C'D')=$\frac{|-10|}{\sqrt{4+1+20}}$=$\frac{10}{5}$=2

# Векторный метод.

$\overline{a}=\overline{b}=\overline{c}=1$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=0$

$\overline{AC'}=5\overline{a}$

$\overline{AB'}=3\overline{a}+4\overline{b}$

$\overline{D'B'}=3\overline{a}+4\overline{b}+\sqrt{5}\overline{c}$

$\overline{D'C'}=5\overline{a}-\sqrt{5}\overline{c}$

$\overline{D'K}=x\overline{D'B'}+y\overline{D'C'}$

$\overline{AK}=\overline{AD'}+\overline{D'K}$=AD'+(xD'B+yD'C')

$$\begin{cases}\overline{AK}\cdot\overline{D'B'}=0\\ \overline{AK}\cdot\overline{D'C'}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{AD'}\cdot\overline{D'B'}+x\overline{D'B'}^2+y\overline{D'C'}\cdot\overline{D'B'}=0\\ \overline{AD'}\cdot\overline{D'C'}+x\overline{D'B'}\cdot\overline{D'C'}+y\overline{D'C'}^2=0\end{cases}$$

$\overline{AD'}\cdot\overline{D'B'}=\sqrt{5}\overline{c}\cdot(3\overline{a}+4\overline{b}-\sqrt{5}\overline{c})=-5\overline{c}=-5$

$\overline{D'B'}=\sqrt{30}$

$\overline{D'C'}=\sqrt{30}$

$\begin{cases} -5+30x+20y=0 \\ -5+20x+30y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 30x+20y=5 \\ 20x+30y=5 \end{cases}$

30x+20y=20x+30y

-10x=-10y

x=y

50x=5

X=0,1

Y=0,1

$$\overline{AK}=\sqrt{5}\overline{c}+0,1\overline{D'B'}+0,1\overline{D'C'}=\sqrt{5}\overline{c}+0,3\overline{a}+0,4\overline{b}-\frac{\sqrt{5}}{10}\overline{c}+0,5\overline{a}-\frac{\sqrt{5}}{10}\overline{c}=\frac{8\sqrt{5}}{10}\overline{c}+0,8\overline{a}+0,4\overline{b}$$

$$|\overline{AK}|=\sqrt{\frac{320}{100}+\frac{64+16}{100}}=\sqrt{4}=2$$