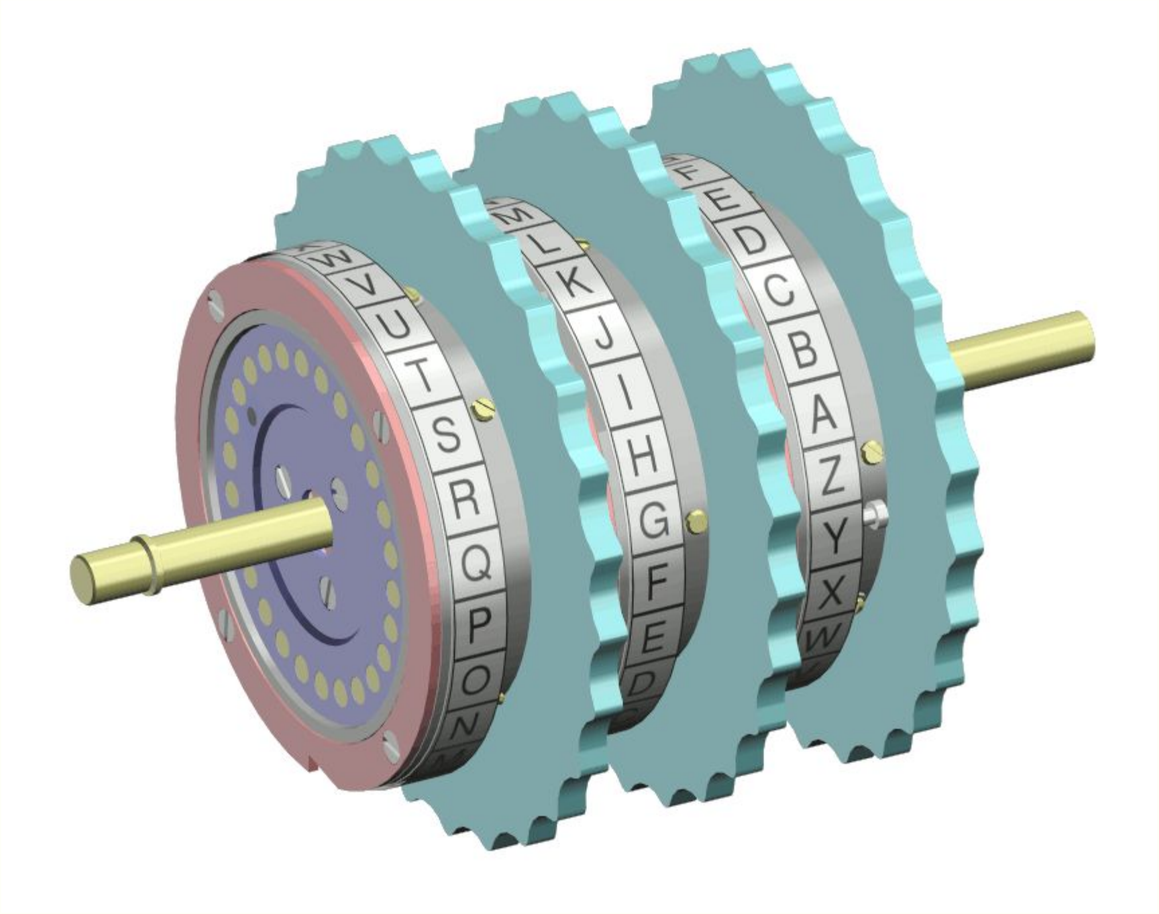
КЛАСИФІКАЦІЯ ПЕРЕСТАНОВОК ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ТА ОЦІНКА ПОТУЖНОСТІ КЛАСІВ

Виконала: Бурлака Марія Костянтинівна

Керівник: в.о. завідувача кафедри ММЗІ ФТІ Савчук Михайло Миколайович, д.ф.-м.н., доцент

Актуальність

- Підстановки, що досліджуються в роботі, є підключами найбільш поширених систем криптографічного захисту інформації у XX сторіччі - роторних шифрувальних машин
- Модифіковані системи роторного шифрування застосовуються і сьогодні
- Перестановки та підстановки є базовими криптографічними перетвореннями в сучасних системах захисту інформації, від якості яких залежить стійкість та ефективність систем захисту


W V U T S R Q P O N
M L K J I H G F E D
F E D C B A Z Y X W

Мета, об'єкт та предмет дослідження

Мета дослідження:

- класифікація підстановок в ключах роторних шифрувальних машин в залежності від їх криптографічних характеристик
- експериментальне отримання статистичних оцінок потужностей класів для підстановок різного розміру

Об'єкт дослідження: ключі зашифрування у роторних машинах та їх модифікаціях

Предмет дослідження: криптографічні характеристики підстановок над алфавітами

Завдання

- Провести огляд та аналіз опублікованої літератури за тематикою
- Ввести поняття криптографічної характеристики перестановки та запропонувати класифікацію перестановок за їх характеристиками
- Створити програму для реалізації розбиття множини усіх перестановок різних розмірів на класи
- Методом статистичного моделювання оцінити потужності отриманих класів та ймовірність вибору випадкової перестановки с заданою характеристикою
- Перевірити якість оцінки потужності

Перестановки “без перепайок” та їх кількість

Означення. Перестановка $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ множини $\{0, 1, \dots, n-1\}$ є перестановкою “без перепайок”, якщо

$$\forall\ k, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}: \quad k + i_k \pmod n \neq l + i_l \pmod n, \quad k \neq l$$

Відомі результати та їх автори

- Таблиця точних значень P_n для непарних n від 1 до 19 та оцінки P_n для n = 25, 35, 45, 55, ∞
  (Cooper C., Gilchrist R., Kovalenko I.N., Novacovic D. - Deriving the number of good permutations with applications to cryptography)
- Доведено, що для $n \geq 75$: $413.099e^{-0.9883n} \leq P_n \leq 267.384e^{-0.9825n}$
  (Кузнецов Н.Ю. Применение ускоренного моделирования к нахождению количества “хороших” перестановок)

Побудова характеристики $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ **перестановки** $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$

Для заданої перестановки $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ множини $\{0, 1, \dots, n-1\}$ характеристика шукається наступним чином:

1. Знайти послідовність $(j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$, де $j_m = m + i_m \pmod n$
2. Представити отриману послідовність у вигляді мультимножини $\{0^{k_0}, 1^{k_1}, \dots, (n-1)^{k_{n-1}}\}$
3. Знайти характеристику $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де α_0 – кількість нулів серед чисел k_m, $m=0,1,2,..,n-1$, α_1 – кількість одиниць і так далі

Властивості характеристик перестановки

- Для $\{k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = n$$

- Для $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i = n$$

Приклади характеристик перестановки

Перестановка без “паралельних перепайок”: $(0, n, 0, 0, \dots, 0)$

Перестановка з виродженою характеристикою: $(n-1, 0, \dots, 0, 1)$

Алгоритм генерування випадкової перестановки

Вхід: множина {0, 1, … , n-1}

1. Для всіх i від n-1 до 1:
   1. Обрати j ∈ {0, 1, … , i} - випадкове число
   2. Поміняти місцями i-тий та j-тий елементи

Вихід: випадкова перестановка

Алгоритм отримання статистичних оцінок потужностей класів

Вхід: множина {0, 1, ... , n-1}

1. Встановити кількість експериментів N - велике число
2. Поки N ≥ 0:
   1. Побудувати випадкову незалежну перестановку $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$
   2. Для перестановки $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ знайти характеристику $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
   3. Якщо характеристика $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ не зустрічалася на попередніх ітераціях, встановити лічильник c = 1.
      Інакше - збільшити c на 1

3. Для кожного отриманого класу за допомогою точкової оцінки c побудувати довірчий інтервал для потужності класу, використовуючи метод Монте-Карло і апроксимацію біноміального розподілу пуассоновим та гауссовим розподілами

Вихід: інтервальні оцінки потужностей класів з різними характеристиками

Кількість перестановок “без перепайок”

n	К-ть перестановок	К-ть перестановок “без перепайок”	Точна імов-ть	Оцінка імов-ті
3	6	3	0.5	0.5
5	120	15	0.125	0.125
7	5040	133	0.0263889	0.0263889
9	362880	2025	0.00558036	0.00558036
11	39916800	37851	0.000948247	0.000948247

Порівняння кількості перестановок “без перепайок”

n	Отримана оцінка	Відома оцінка
11	0.0009506	0.000948247
13	0.0002991	0.000165467
15	0.0000498	0.0000278096
17	0.0000052	0.00000451522
19	0.0000016	0.000000720595
25	0	$2.73 \cdot 10^{-9}$
35	0	$2.25 \cdot 10^{-13}$
45	0	$1.75 \cdot 10^{-17}$
55	0	$1.32 \cdot 10^{-21}$

Деякі класи перестановок довжини 11

$(\alpha_0,\alpha_1, \dots , \alpha_{12})$	Точне значен-ня	ДІ, побудований засобами Python	ДІ для біноміальної моделі	ДІ для нормальної моделі	ДІ для моделі Пуассона
(4, 4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	8252200	[8237749, 8257785]	[8239302, 8256233]	[8236124, 8256157]	[8234899, 8257393]
(5, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2017070	[2011495, 2022333]	[2012364, 2021468]	[2011493, 2022331]	[2011354, 2022482]
(2, 8, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	464035	[460456, 465754]	[460881, 465333]	[460453, 465753]	[460441, 465776]
(7, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	65340	[63559, 65552]	[63721, 65394]	[63559, 65548]	[63562, 65557]
(0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	37851	[36715, 38229]	[36836, 38113]	[36712, 38228]	[36715, 38236]
(7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	2420	[2259, 2647]	[2290, 2620]	[2257, 2645]	[2260, 2653]
(10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	11	[3, 32]	[5, 37]	[0, 32]	[4, 41]

Характеристики перестановок довжини 26 та 33

$(\alpha_0,\alpha_1, \dots , \alpha_{27})$	ДІ для біноміальної моделі	ДІ для нормальної моделі	ДІ для моделі Пуассона
(9,10,5,2,0,...,0)	$[2.723086 \cdot 20^{25}, 2.73363 \cdot 20^{25}]$	$[2.722078 \cdot 20^{25}, 2.73463 \cdot 20^{25}]$	$[2.72186 \cdot 20^{25}, 2.73486 \cdot 20^{25}]$
(7,14,3,2,0,0,...,0)	$[6.06225 \cdot 20^{24}, 6.11344 \cdot 20^{24}]$	$[6.05733 \cdot 20^{24}, 6.11828 \cdot 20^{24}]$	$[6.05713 \cdot 20^{24}, 6.11859 \cdot 20^{24}]$
(3,20,3,0,0,0,...,0)	$[1.40603 \cdot 20^{21}, 1.01765 \cdot 20^{22}]$	$[7.92611 \cdot 20^{21}, 1.03027 \cdot 20^{21}]$	$[7.96474 \cdot 20^{21}, 1.0383 \cdot 20^{21}]$
(17,1,5,1,0,1,0,1,0,...)	$[2.06861 \cdot 20^{18}, 1.91316 \cdot 20^{20}]$	$[0, 1.19373 \cdot 20^{20}]$	$[1.02105 \cdot 20^{18}, 2.24699 \cdot 20^{20}]$

$(\alpha_0,\alpha_1, \dots , \alpha_{34})$	ДІ для біноміальної моделі	ДІ для нормальної моделі	ДІ для моделі Пуассона
(11,13,7,2,0,...,0)	$[3.96965 \cdot 10^{35}, 3.98856 \cdot 10^{35}]$	$[3.96784 \cdot 10^{35}, 3.9035 \cdot 10^{35}]$	$[3.96758 \cdot 10^{35}, 3.9063 \cdot 10^{35}]$
(10,17,3,2,1,0,...,0)	$[4.56102 \cdot 10^{34}, 4.62664 \cdot 10^{35}]$	$[4.55469 \cdot 10^{34}, 4.63278 \cdot 10^{35}]$	$[4.55467 \cdot 10^{34}, 4.63305 \cdot 10^{35}]$
(9, 19, 2, 2, 1, 0, . . . , 0)	$[7.470017 \cdot 10^{33}, 7.73807 \cdot 10^{33}]$	$[7.44393 \cdot 10^{33}, 7.76230 \cdot 10^{33}]$	$[7.44469 \cdot 10^{33}, 7.76406 \cdot 10^{33}]$
(9,21,0,2,0,0,1,0,...,0)	$[1.71074 \cdot 10^{30}, 9.12880 \cdot 10^{30}]$	$[1.71074 \cdot 10^{30}, 9.12880 \cdot 10^{30}]$	$[1.40972 \cdot 10^{30}, 1.01320 \cdot 10^{31}]$

Висновки

- Введено поняття характеристики перестановки, що узагальнює поняття перестановки “без паралельних перепайок”

- Розроблено алгоритм та програма для побудови класів перестановок довільного порядку за їх характеристиками

- Методом статистичного моделювання отримано точечні та інтервальні оцінки потужності класів для перестановок довжини 11, 26, 30, 31, 32, 33, 45 та 55 з різними характеристиками. Перевірена якість оцінок.

- Показано, що ймовірність випадково вибрати перестановку з високими криптографічними властивостями швидко зменшується з ростом порядку перестановки

Дякую за увагу!